$$+\frac{178}{40353607}a_1^6a_2-\frac{50}{5764801}a_1^4a_2^2+\frac{25}{823543}a_1^4a_4+\frac{30}{823543}a_1^2a_2^3-\frac{20}{117649}a_1^2a_2a_4+\frac{6}{16807}a_1^2a_6-$$

$$-\frac{15}{117649}a_2^4+\frac{10}{16807}a_2^2a_4-\frac{4}{2401}a_2a_6+\frac{1}{343}a_8\Big)b_1^3+\Big(-\frac{26}{40353607}a_1^6-\frac{20}{5764801}a_1^4a_2-\frac{15}{823543}a_1^2a_2^2+$$

$$+\frac{5}{117649}a_1^2a_4+\frac{10}{117649}a_2^3-\frac{5}{16807}a_2a_4+\frac{1}{2401}a_6\Big)b_1^4+\Big(\frac{13}{5764801}a_1^4+\frac{3}{823543}a_1^2a_2-\frac{3}{117649}a_2^2+$$

$$+\frac{1}{16807}a_4+\frac{1}{823543}b_1^7$$ *; параметр* b_1 *остается свободным.*

На практике удобно выбирать $b_1=0$.

Заключение. Таким образом, в работе получены необходимые и достаточные условия представления произвольного полинома четырнадцатой степени комплексного аргумента в виде композиции полиномов второй и седьмой степеней. Также получены формулы прямого перехода от коэффициентов исходного полинома к коэффициентам полиномов, составляющих композицию.

Благодарности. *Исследование выполнено при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф25М-063, рег. № 20251037), а также в рамках ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция – 2025» (рег. № 20210494).*

1. Kozen, D. Polynomial Decomposition Algorithms / D. Kozen, S. Landau // Journal of Symbolic Computation. – 1989. – Vol. 7, № 5. – P. 445–456.

2. Перминова, М. Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М. Ю. Перминова, В. В. Кручинин, Д. В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.

3. Чернявский, М. М. Аналитические условия представимости полинома восьмой степени в виде композиции полиномов меньших степеней / М. М. Чернявский, Н. С. Грицкевич. – Текст : электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/34660 (дата обращения: 20.12.2025). – Электрон. версия ст. из: XVI Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 21 окт. 2022 г. : в 2 т. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2022. – Т. 1. – С. 48–51.

4. Чернявский, М. М. Условия декомпозиции полинома двенадцатой степени на полиномы четвертой и третьей степеней / М. М. Чернявский, Д. А. Китаров. – Текст : электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/44696 (дата обращения: 20.12.2025). – Электрон. версия ст. из: XVIII Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 25 окт. 2024 г. : в 2 т. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2024. – Т. 1. – С. 60–62.

5. Трубников, Ю. В. О представимости полинома двенадцатой степени в виде композиции трех полиномов меньших степеней / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский. – Текст : электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/46195 (дата обращения: 20.12.2025). – Электрон. версия ст. из: Наука – образованию, производству, экономике : материалы 77-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 28 февр. 2025 г. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2025. – С. 49–51.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. В качестве производной выступает дробная производная Адамара [2] порядка $0<\alpha<1$. Аналитическое решение такой задачи для значений $\alpha>0$ в пространстве суммируемых функций построено в [6]. Цель данного исследования – понять структуру полученного решения для малых значений порядка α.

Материал и методы. Материалом исследования служат операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, являющиеся модификациями классических операций дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля [1].

В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. В работе [6] рассматривалась дифференциальная задача с дробными производными

Адамара следующего вида:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \theta y(x) + g(x),\ \alpha > 0,\ a > 0,\ \theta \in R, \tag{1}$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k,\ b_k \in R,\ k = 1, 2, \ldots, n = \lceil \alpha \rceil. \tag{2}$$

Её решение в пространстве регулярных функций [3; 4; 6]

$$L_{\delta}^{\alpha}(a,b) = \left\{ y \in L(a,b) \,\middle|\, D_{a+}^{\alpha} y \in L(a,b) \right\},\ 0 < a < b < +\infty \tag{3}$$

запишется в виде

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right) + \int_a^x E_{\alpha,\alpha}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} g(t)\frac{dt}{t}, \tag{4}$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг-Лефлера [1]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z, \alpha, \beta \in C, \operatorname{Re}\alpha > 0.$$

Поскольку порядок α уравнения (1) имеет значение $0 < \alpha < 1$, то $n = \lceil \alpha \rceil = 1$ и k=1, то есть условия (2) трансформируются в одно условие:

$$\left(D_{a+}^{\alpha-1} y\right)(a+) = b_1, \quad b_1 \in R,$$

которое можно записать в виде

$$\lim_{x \to a+} \delta\left(\Im_{a+}^{1-\alpha} y\right)(x) = b_1, \quad b_1 \in R, \quad \delta = x\frac{d}{dx},$$

где конструкция

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} g(t)\frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0, \quad 0 \le a < x$$

является дробным интегралом Адамара, причём справедливо соотношение, связывающее дробные производные и интегралы Адамара [5; 6]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \delta^n \left(\Im_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x) = \delta^n \left(D_{a+}^{\alpha-n} g\right)(x),\ \alpha > 0,\ n = \lceil \alpha \rceil.$$

В конструкции (4) сумма слагаемых трансформируется в одно слагаемое (с j=1) вида:

$$y_0(x) = b_1 \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right). \tag{5}$$

Таким образом, приходи м к следующему утверждению.

Теорема. Пусть $0 < \alpha < 1,\ \theta \in R,\ g(x) \in L(a,b),\ 0 < a < b < \infty$. Тогда дифференциальная задача

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \theta y(x) + g(x),$$
$$\left(D_{a+}^{\alpha-1} y\right)(a+) = b_1, \quad b_1 \in R$$

в пространстве (3) имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$y(x) = y_0(x) + \int_a^x E_{\alpha,\alpha}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} g(t)\frac{dt}{t},$$

где $y_0(x)$ определено в (5). Решение же соответствующей однородной задачи типа Коши (с $g(x)=0$) имеет вид (5):

$$y(x)=y_0(x)=b_1\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что, например, $y_0(x)$ является решением однородной задачи:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\theta y(x),$$
$$\left(D_{a+}^{\alpha-1}y\right)(a+)=b_1,\quad \theta,b_1\in R,\quad 0<\alpha<1.$$

Заключение. В приложениях часто приходится решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. Интегрируя некоторые классы дифференциальных уравнений целого порядка, приходится руководствоваться положениями теории дробного дифференцирования и интегрирования. В работе исследован частный случай аналитического решения дифференциальной задачи типа Коши для линейного однородного дифференциального уравнения с дробными производными Адамара в пространстве регулярных функций.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11марта 2021 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2021. С. 71-72.
3. Шлапаков, С.А. Об одной дифференциальной задаче с дробными производными Адамара / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы 75-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 03 марта 2023 г. / Витебский гос. ун-т; ред. кол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – с. 66-68.
4. Шлапаков, С.А. О задаче типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара/ С.А. Шлапаков // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы 76-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 01 марта 2024 г. / Витебский гос. ун-т; ред. кол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – С. 53-54.
5. Шлапаков С.А. Однородная задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы 77 Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 28 февраля 2025 г. / Витебский гос. ун-т; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2025. – с. 52-54.
6. Шлапаков, С.А. Об одной линейной дифференциальной задаче // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта (в печати).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИСТЕРЕЗИСА В СТРУКТУРАХ С ГРАДИЕНТОМ СОСТАВА

В.Н. Шут[1], И.Ф. Кашевич[2], И.Е. Сипаков[2]
[1]Витебск, ВГТУ
[2]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Исследование сегнетоэлектрических материалов с градиентом состава, так называемых градиентных сегнетоэлектриков, представляет собой одно из активно развивающихся направлений в физике диэлектриков. Создание в материале управляемой неоднородности физических свойств позволяет не только улучшать существующие характеристики, но и получать материалы с принципиально новыми функциональными возможностями. Однако поведение таких систем, в частности их поляризационные характеристики, существенно отличается от поведения однородных аналогов, что требует разработки специализированных теоретических моделей.

В отличие от тонкоплёночных градиентных структур, где часто наблюдается сдвиг петель диэлектрического гистерезиса, в объёмных (толстоплёночных) образцах