

Результаты и их обсуждение. Описанные выше результаты приводят к задаче определения локально нормального радикального множества в группе и его приложений для описания ее подгруппового строения.

Определение 1. Пусть \mathcal{X} – инъективное радикальное множество группы G , \mathcal{F} – неединичное радикальное множество группы G . Множество \mathcal{F} группы G назовём \mathcal{X} -нормальным или локально нормальным в \mathcal{X} , если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ и для любой подгруппы $H \in \mathcal{X}$ группы G , ее \mathcal{F} -радикал является \mathcal{F} -максимальной подгруппой H .

Определение 2 [1; определение VIII 4.3]. Множеством Фишера группы G называется радикальное множество \mathcal{F} группы G , которое удовлетворяет следующему условию: если $L \leq G, K \trianglelefteq L \in \mathcal{F}$ и H/K является p -подгруппой L/K для некоторого простого числа p , то $H \in \mathcal{F}$.

Если \mathcal{F} – непустое радикальное множество группы G и \mathfrak{X} – радикальный класс, то множество $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X} = \{H \leq G: H/H_F \in \mathfrak{X}\}$ подгрупп группы G называют произведением \mathcal{F} и \mathfrak{X} [9]. В частности, если $\mathfrak{S}^{\pi(\mathcal{F})}$ – радикальный класс всех $\pi(\mathcal{F})$ -разрешимых групп, то $\mathcal{F} \odot \mathfrak{S}^{\pi(\mathcal{F})} = \{H \leq G: H/H_F \in \mathfrak{S}^{\pi(\mathcal{F})}\}$.

Результатом работы является развитие и расширение упомянутого ранее результата Блессеноля-Гашюца в двух направлениях. Во-первых, доказан аналог теоремы Блессеноля-Гашюца для \mathcal{X} -нормальных радикальных множеств, где \mathcal{X} – множество Фишера группы G . Во-вторых, условие разрешимости группы заменяется на условие частичной разрешимости группы. Основной результат работы

Теорема. Пусть \mathcal{X} – множество Фишера группы G , $\{\mathcal{F}_i | i \in I\}$ – семейство \mathcal{X} -нормальных радикальных множеств группы G . Если $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}^{\pi(\mathcal{F})}$, то \mathcal{F} – \mathcal{X} -нормальное радикальное множество.

Заключение. В настоящей работе доказана теорема о пересечении локально нормальных радикальных множеств.

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978.
3. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, 1. – S. 337–339.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.
5. Blessenohl D., Gaschütz W. Über normale Schunck- und Fittingklassen // Math. Z. 1970. V 118, N 1. P. 1–8.
6. Laue, H. Über nichtauflösbarer normale Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45. – P. 274–283.
7. Шеметков Л. А. О подгруппах π -разрешимых групп // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 207–212.
8. Anderson W. Injectors in finite solvable groups // J. Algebra. 1975. V. 36. P. 333–338.
9. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing ; New York ; Dordrecht ; Boston ; London : Science Press/Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.

О КОМПОЗИЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛИНОМА ЧЕТЫРНАДЦАТОЙ СТЕПЕНИ

М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Композиции алгебраических полиномов встречаются в приложениях, например, при шифровании данных и кодировании информации.

К настоящему времени математиками разработаны и применяются некоторые машинные алгоритмы декомпозиции полиномов [1, 2]. При этом установление наличия какой-либо композиции у полинома является отдельной трудной задачей, поэтому практическую ценность представляет также получение аналитических условий связи между коэффициентами полинома, при выполнении которых полином имеет заданную композиционную структуру. Получение таких условий требует большого числа преоб-

разований в символьном виде и не поддается ручным вычислениям уже для полиномов относительно невысоких степеней, например, восьмой. Применение современных программных средств (например систем компьютерной математики) позволяет преодолеть данную трудность.

Цель исследования – получить необходимые и достаточные условия представления произвольного полинома четырнадцатой степени в виде композиции полиномов второй и седьмой степеней. Настоящее исследование является естественным продолжением работ [3–5].

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента четырнадцатой степени, являющиеся композицией полиномов меньших степеней. Методы исследования – методы алгебры с использованием системы компьютерной математики *Maple 2023*.

Результаты и их обсуждение. Доказаны теоремы следующего вида.

Теорема. Для представления полинома $P_{14}(z) = \sum_{i=0}^{14} a_i z^{14-i}$ ($a_0 = 1$) в виде композиции $P_{14}(z) = f(g(z))$, где $f(z) = z^7 + b_1 z^6 + b_2 z^5 + b_3 z^4 + b_4 z^3 + b_5 z^2 + b_6 z + b_7$, $g(z) = z^2 + c_1 z + c_2$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия связей между его коэффициентами:

$$a_3 = -\frac{a_1(13a_1^2 - 42a_2)}{49}; \quad a_5 = \frac{a_1(143a_1^4 - 385a_1^2a_2 + 1715a_4)}{2401};$$

$$a_7 = -\frac{a_1(7293a_1^6 - 19404a_1^4a_2 + 72030a_1^2a_4 - 470596a_6)}{823543};$$

$$a_7 = \frac{a_1(4433a_1^8 - 11781a_1^6a_2 + 43218a_1^4a_4 - 235298a_1^2a_6 + 2470629a_8)}{5764801};$$

$$a_{11} = -\frac{a_1(8983a_1^{10} - 23870a_1^8a_2 + 87465a_1^6a_4 - 470596a_1^4a_6 + 4117715a_1^2a_8 - 80707214a_{10})}{282475249};$$

$$a_{13} = \frac{a_1(5461a_1^{12} - 14511a_1^{10}a_2 + 53165a_1^8a_4 - 285719a_1^6a_6 + 2470629a_1^4a_8 - 40353607a_1^2a_{10} + 1977326743a_{12})}{13841287201}.$$

$$\text{При этом } c_1 = \frac{a_1}{7}; \quad c_2 = \frac{a_2}{7} - \frac{3a_1^2}{49} - \frac{b_1}{7}; \quad b_2 = \frac{13}{343}a_1^4 + \frac{3}{49}a_1^2a_2 - \frac{3}{7}a_2^2 + a_4 + \frac{3}{7}b_1^2;$$

$$b_3 = -\frac{26}{16807}a_1^6 - \frac{20}{2401}a_1^4a_2 - \frac{15}{343}a_1^2a_2^2 + \frac{5}{49}a_1^2a_4 + \frac{10}{49}a_2^3 - \frac{5}{7}a_2a_4 + a_6 +$$

$$+ \left(\frac{5}{7}a_4 + \frac{65}{2401}a_1^4 + \frac{15}{343}a_1^2a_2 - \frac{15}{49}a_2^2 \right)b_1 + \frac{5}{49}b_1^3;$$

$$b_4 = \frac{52}{823543}a_1^8 + \frac{178}{117649}a_1^6a_2 + \frac{25}{2401}a_1^4a_4 - \frac{50}{16807}a_1^4a_2^2 + \frac{30}{2401}a_1^2a_2^3 - \frac{20}{343}a_1^2a_2a_4 + \frac{6}{49}a_1^2a_6 - \frac{15}{343}a_2^4 +$$

$$+ \frac{10}{49}a_2^2a_4 - \frac{4}{7}a_2a_6 + a_8 + \left(\frac{40}{343}a_2^3 - \frac{60}{2401}a_1^2a_2^2 - \frac{80}{16807}a_1^4a_2 - \frac{20}{49}a_2a_4 + \frac{20}{343}a_1^2a_4 - \frac{104}{117649}a_1^6 + \frac{4}{7}a_6 \right)b_1 +$$

$$+ \left(\frac{10}{49}a_4 + \frac{30}{2401}a_1^2a_2 + \frac{130}{16807}a_1^4 - \frac{30}{343}a_2^2 \right)b_1^2 + \frac{5}{343}b_1^4;$$

$$b_5 = \frac{650}{40353607}a_1^{10} - \frac{36}{823543}a_1^8a_2 - \frac{54}{117649}a_1^6a_2^2 + \frac{10}{16807}a_1^6a_4 + \frac{20}{16807}a_1^4a_2^3 - \frac{75}{16807}a_1^4a_2a_4 + \frac{17}{2401}a_1^4a_6 +$$

$$+ \frac{30}{16807}a_1^2a_2^4 - \frac{18}{343}a_1^2a_2a_6 + \frac{30}{2401}a_1^2a_2^2a_4 + \frac{6}{49}a_1^2a_8 + \frac{12}{2401}a_2^5 - \frac{10}{343}a_2^3a_4 + \frac{6}{49}a_2^2a_6 - \frac{3}{7}a_2a_8 + a_{10} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{18}{343} a_1^2 a_6 - \frac{60}{2401} a_1^2 a_2 a_4 + \frac{75}{16807} a_1^4 a_4 + \frac{90}{16807} a_1^2 a_2^3 + \frac{30}{343} a_2^2 a_4 + \frac{534}{823543} a_1^6 a_2 - \frac{150}{117649} a_1^4 a_2^2 - \right. \\
& \left. - \frac{12}{49} a_2 a_6 - \frac{45}{2401} a_2^4 + \frac{156}{5764801} a_1^8 + \frac{3}{7} a_8 \right) b_1 + \left(- \frac{156}{823543} a_1^6 - \frac{120}{117649} a_1^4 a_2 - \frac{90}{16807} a_1^2 a_2^2 + \frac{30}{2401} a_1^2 a_4 + \right. \\
& \left. + \frac{60}{2401} a_2^3 - \frac{30}{343} a_2 a_4 + \frac{6}{49} a_6 \right) b_1^2 + \left(\frac{130}{117649} a_1^4 + \frac{30}{16807} a_1^2 a_2 - \frac{30}{2401} a_2^2 + \frac{10}{343} a_4 \right) b_1^3 + \frac{3}{2401} b_1^5; \\
b_6 = & - \frac{845}{1977326743} a_1^{12} - \frac{844}{282475249} a_1^{10} a_2 + \frac{348}{40353607} a_1^8 a_2^2 + \frac{5}{823543} a_1^8 a_4 - \frac{20}{117649} a_1^6 a_2 a_4 + \\
& + \frac{31}{117649} a_1^6 a_6 - \frac{34}{16807} a_1^4 a_2 a_6 + \frac{75}{117649} a_1^4 a_2^2 a_4 - \frac{115}{823543} a_1^4 a_2^4 + \frac{12}{2401} a_1^4 a_8 + \frac{15}{117649} a_1^2 a_2^5 - \frac{12}{343} a_1^2 a_2 a_8 - \\
& - \frac{5}{16807} a_2^6 + \frac{5}{2401} a_2^4 a_4 - \frac{4}{343} a_2^3 a_6 + \frac{3}{49} a_2^2 a_8 - \frac{2}{7} a_2 a_{10} + a_{12} + \left(\frac{1300}{282475249} a_1^{10} - \frac{72}{5764801} a_1^8 a_2 - \right. \\
& \left. - \frac{108}{823543} a_1^6 a_2^2 + \frac{20}{117649} a_1^6 a_4 + \frac{40}{117649} a_1^4 a_2^3 - \frac{150}{117649} a_1^4 a_2 a_4 + \frac{34}{16807} a_1^4 a_6 - \frac{60}{117649} a_1^2 a_2^4 - \right. \\
& \left. - \frac{36}{2401} a_1^2 a_2 a_6 + \frac{60}{16807} a_1^2 a_2^2 a_4 + \frac{12}{343} a_1^2 a_8 - \frac{20}{2401} a_2^3 a_4 + \frac{12}{343} a_2^2 a_6 - \frac{6}{49} a_2 a_8 + \frac{24}{16807} a_2^5 + \frac{2}{7} a_{10} \right) b_1 + \\
& + \left(\frac{156}{40353607} a_1^8 + \frac{534}{5764801} a_1^6 a_2 - \frac{150}{823543} a_1^4 a_2^2 + \frac{75}{117649} a_1^4 a_4 + \frac{90}{117649} a_1^2 a_2^3 - \frac{60}{16807} a_1^2 a_2 a_4 + \right. \\
& \left. + \frac{18}{2401} a_1^2 a_6 - \frac{45}{16807} a_2^4 + \frac{30}{2401} a_2^2 a_4 - \frac{12}{343} a_2 a_6 + \frac{3}{49} a_8 \right) b_1^2 + \left(- \frac{104}{5764801} a_1^6 - \frac{80}{823543} a_1^4 a_2 - \right. \\
& \left. - \frac{60}{117649} a_1^2 a_2^2 + \frac{20}{16807} a_1^2 a_4 - \frac{20}{2401} a_2 a_4 + \frac{40}{16807} a_2^3 + \frac{4}{343} a_6 \right) b_1^3 + \left(\frac{65}{823543} a_1^4 + \frac{15}{117649} a_1^2 a_2 - \right. \\
& \left. - \frac{15}{16807} a_2^2 + \frac{5}{2401} a_4 \right) b_1^4 + \frac{1}{16807} b_1^6; \\
b_7 = & - \frac{9825}{678223072849} a_1^{14} + \frac{1430}{13841287201} a_1^{12} a_2 + \frac{194}{1977326743} a_1^{10} a_2^2 - \frac{12}{282475249} a_1^{10} a_4 - \\
& - \frac{148}{282475249} a_1^8 a_2^3 - \frac{5}{5764801} a_1^8 a_2 a_4 + \frac{3}{823543} a_1^8 a_6 - \frac{100}{40353607} a_1^6 a_2^4 + \frac{10}{823543} a_1^6 a_2^2 a_4 - \\
& - \frac{31}{823543} a_1^6 a_2 a_6 + \frac{9}{117649} a_1^6 a_8 + \frac{32}{5764801} a_1^4 a_2^5 - \frac{25}{823543} a_1^4 a_2^3 a_4 + \frac{17}{117649} a_1^4 a_2^2 a_6 - \frac{12}{16807} a_1^4 a_2 a_8 + \\
& + \frac{6}{2401} a_1^4 a_{10} + \frac{5}{117649} a_1^2 a_2^4 a_4 - \frac{6}{16807} a_1^2 a_2^3 a_6 + \frac{6}{2401} a_1^2 a_2^2 a_8 - \frac{3}{823543} a_1^2 a_2^6 - \frac{5}{343} a_1^2 a_2 a_{10} + \frac{3}{49} a_1^2 a_{12} + \\
& + \frac{6}{823543} a_2^7 - \frac{1}{16807} a_2^5 a_4 + \frac{1}{2401} a_2^4 a_6 - \frac{1}{343} a_2^3 a_8 + \frac{1}{49} a_2^2 a_{10} - \frac{1}{7} a_2 a_{12} + a_{14} + \left(- \frac{845}{13841287201} a_1^{12} + \right. \\
& \left. - \frac{844}{1977326743} a_1^{10} a_2 + \frac{348}{282475249} a_1^8 a_2^2 + \frac{5}{5764801} a_1^8 a_4 + \frac{326}{40353607} a_1^6 a_2^3 - \frac{20}{823543} a_1^6 a_2 a_4 + \right. \\
& \left. + \frac{31}{823543} a_1^6 a_6 - \frac{115}{5764801} a_1^4 a_2^4 + \frac{75}{823543} a_1^4 a_2^2 a_4 - \frac{34}{117649} a_1^4 a_2 a_6 + \frac{12}{16807} a_1^4 a_8 - \frac{20}{117649} a_1^2 a_2^3 a_4 + \right. \\
& \left. + \frac{18}{16807} a_1^2 a_2^2 a_6 - \frac{12}{2401} a_1^2 a_2 a_8 + \frac{15}{823543} a_1^2 a_2^5 + \frac{5}{343} a_1^2 a_{10} - \frac{5}{117649} a_2^6 + \frac{5}{16807} a_2^4 a_4 - \frac{4}{2401} a_2^3 a_6 + \right. \\
& \left. + \frac{3}{343} a_2^2 a_8 - \frac{2}{49} a_2 a_{10} + \frac{1}{7} a_{12} \right) b_1 + \left(\frac{650}{1977326743} a_1^{10} - \frac{36}{40353607} a_1^8 a_2 - \frac{54}{5764801} a_1^6 a_2^2 + \frac{10}{823543} a_1^6 a_4 + \right. \\
& \left. + \frac{20}{823543} a_1^4 a_2^3 - \frac{75}{823543} a_1^4 a_2 a_4 + \frac{17}{117649} a_1^4 a_6 - \frac{30}{823543} a_1^2 a_2^4 + \frac{30}{117649} a_1^2 a_2^2 a_4 - \frac{18}{16807} a_1^2 a_2 a_6 + \right. \\
& \left. + \frac{6}{2401} a_1^2 a_8 + \frac{12}{117649} a_2^5 - \frac{10}{16807} a_2^3 a_4 + \frac{6}{2401} a_2^2 a_6 - \frac{3}{343} a_2 a_8 + \frac{1}{49} a_{10} \right) b_1^2 + \left(\frac{52}{282475249} a_1^8 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{178}{40353607} a_1^6 a_2 - \frac{50}{5764801} a_1^4 a_2^2 + \frac{25}{823543} a_1^4 a_4 + \frac{30}{823543} a_1^2 a_2^3 - \frac{20}{117649} a_1^2 a_2 a_4 + \frac{6}{16807} a_1^2 a_6 - \\
& - \frac{15}{117649} a_2^4 + \frac{10}{16807} a_2^2 a_4 - \frac{4}{2401} a_2 a_6 + \frac{1}{343} a_8 \Big) b_1^3 + \left(- \frac{26}{40353607} a_1^6 - \frac{20}{5764801} a_1^4 a_2 - \frac{15}{823543} a_1^2 a_2^2 + \right. \\
& \left. + \frac{5}{117649} a_1^2 a_4 + \frac{10}{117649} a_2^3 - \frac{5}{16807} a_2 a_4 + \frac{1}{2401} a_6 \right) b_1^4 + \left(\frac{13}{5764801} a_1^4 + \frac{3}{823543} a_1^2 a_2 - \frac{3}{117649} a_2^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{16807} a_4 + \frac{1}{823543} b_1^7; \text{ параметр } b_1 \text{ остается свободным.}
\end{aligned}$$

На практике удобно выбирать $b_1 = 0$.

Заключение. Таким образом, в работе получены необходимые и достаточные условия представления произвольного полинома четырнадцатой степени комплексного аргумента в виде композиции полиномов второй и седьмой степеней. Также получены формулы прямого перехода от коэффициентов исходного полинома к коэффициентам полиномов, составляющих композицию.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф25М-063, рег. № 20251037), а также в рамках ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция – 2025» (рег. № 20210494).

1. Kozen, D. Polynomial Decomposition Algorithms / D. Kozen, S. Landau // Journal of Symbolic Computation. – 1989. – Vol. 7, № 5. – P. 445–456.
2. Перминова, М. Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М. Ю. Перминова, В. В. Кручинин, Д. В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.
3. Чернявский, М. М. Аналитические условия представимости полинома восьмой степени в виде композиции полиномов меньших степеней / М. М. Чернявский, Н. С. Грицкевич. – Текст : электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: <https://ter.vsu.by/handle/123456789/34660> (дата обращения: 20.12.2025). – Электрон. версия ст. из: XVI Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 21 окт. 2022 г. : в 2 т. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2022. – Т. 1. – С. 48–51.
4. Чернявский, М. М. Условия декомпозиции полинома двенадцатой степени на полиномы четвертой и третьей степеней / М. М. Чернявский, Д. А. Китаров. – Текст : электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: <https://ter.vsu.by/handle/123456789/44696> (дата обращения: 20.12.2025). – Электрон. версия ст. из: XVIII Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 25 окт. 2024 г. : в 2 т. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2024. – Т. 1. – С. 60–62.
5. Трубников, Ю. В. О представимости полинома двенадцатой степени в виде композиции трех полиномов меньших степеней / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский. – Текст : электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: <https://ter.vsu.by/handle/123456789/46195> (дата обращения: 20.12.2025). – Электрон. версия ст. из: Наука – образованию, производству, экономике : материалы 77-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 28 февр. 2025 г. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2025. – С. 49–51.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. В качестве производной выступает дробная производная Адамара [2] порядка $0 < \alpha < 1$. Аналитическое решение такой задачи для значений $\alpha > 0$ в пространстве суммируемых функций построено в [6]. Цель данного исследования – понять структуру полученного решения для малых значений порядка α .

Материал и методы. Материалом исследования служат операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, являющиеся модификациями классических операций дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля [1].