Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
Лабораторный практикум

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2025

УДК 517.97(076.5)
ББК 22.161.8я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 08.09.2025.

Авторы: доцент кафедры прикладного и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин;** доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Ж.В. Иванова**

Рецензент:
доцент кафедры математики и компьютерной безопасности
УО «ПГУ имени Евфросинии Полоцкой»,
кандидат физико-математических наук, доцент *А.П. Мателенок*

Сурин, Т.Л.

С90 Вариационное исчисление. Лабораторный практикум : методические рекомендации / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. — Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2025. — 53 с.

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы магистрантов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Математика и компьютерные науки». Содержит основные сведения по теоретическому материалу, разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, задания для лабораторных работ.

УДК 517.97(076.5)
ББК 22.161.8я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

Предлагаемое издание предназначено для проведения лабораторных работ и организации самостоятельной работы магистрантов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Математика и компьютерные науки».

Основное назначение лабораторного практикума — помочь магистрантам в освоении курса «Вариационное исчисление».

Методические рекомендации включают материалы для 13 лабораторных работ, соответствующих количеству часов, предусмотренных программой по данной дисциплине. Каждый параграф начинается с основных определений, теорем, формул и других кратких теоретических сведений, необходимых для выполнения заданий. Затем следуют методические рекомендации по выполнению работы и разбор типичных примеров, иллюстрирующих практическое применение теоретических знаний. В конце каждого раздела приведены задания для лабораторных работ.

Материал, приведенный в издании, соответствует учебной программе по курсу «Вариационное исчисление» для специальности второй ступени обучения «Математика и компьютерные науки», а также может быть использован при изучении курса «Методы оптимизации» на специальности бакалавриата «Прикладная математика».

Лабораторная работа № 1
Функциональные пространства

1.1. Основные теоретические сведения

Функциональные пространства. *Линейным нормированным пространством* называется линейное пространство, каждому элементу которого ставится в соответствие действительное число $\|x\|$ (*норма x*), для которого выполняются три аксиомы нормы:

1) $\|x\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (где λ – постоянное число);

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Будем рассматривать множество функций $y = f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, как элементы некоторого пространства, которое будем называть *функциональным*.

Приведем примеры нормированных функциональных пространств.

1. Пространство $C[a, b]$ – множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Нормой элемента y пространства $C[a, b]$ называется наибольшее значение модуля функции $y = y(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е. $\|y\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |y(x)|$.

2. Пространство $C^1[a, b]$ – множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, где $\|y\| = \max(\max\limits_{a \leq x \leq b} |y|, \max\limits_{a \leq x \leq b} |y'|)$.

3. Пространство $C^k[a, b]$ – множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, имеющих на этом отрезке непрерывные производные до k-го порядка включительно, где $\|y\| = \max\limits_{0 \leq n \leq k} \max\limits_{a \leq x \leq b} |y^{(n)}|$.

Каждым двум элементам y_1 и y_2 функционального пространства $C^k[a, b]$ поставим в соответствие число

$$\rho_k(y_1, y_2) = \max_{0 \leq n \leq k} \max_{a \leq x \leq b} |y_1^{(n)} - y_2^{(n)}| = \|y_1 - y_2\|,$$

которое называется *расстоянием* между функциями y_1 и y_2 в данном пространстве.

Например, расстояние между элементами пространства $C[a, b]$ находится по формуле

$$\rho_0(y_1, y_2) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1 - y_2|;$$

расстояние между элементами пространства $C^1[a, b]$ находится по формуле

$$\rho_1(y_1,y_2)=\max(\max_{a\le x\le b}|y_1-y_2|,\ \max_{a\le x\le b}|y_1'-y_2'|).$$

Близость кривых. Говорят, что кривые y_1 и y_2 *близки в пространстве* C $[a,\ b]$, если для всех $x \in [a,\ b]$ выполняется неравенство $\rho_0(y_1,y_2) < \varepsilon$, где ε - достаточно малое действительное число. Такую близость называют *близостью нулевого порядка.*

Кривые y_1 и y_2 близки в пространстве $C^1[a,\ b]$ (*близость первого порядка*), если для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $\rho_1(y_1,y_2) < \varepsilon$, где ε - достаточно малое действительное число.

Аналогично определяется близость k-го порядка: $\rho_k(y_1,y_2) < \varepsilon$.

Если кривые y_1 и y_2 близки в смысле близости k-го порядка, то они близки и в смысле близости $k-1$-го порядка. Обратное, вообще говоря, не верно.

1.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти норму функции $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$ в пространстве C [0, 2].

Решение. По определению, $\|y\| = \max_{0\le x\le 1}|x^3+x^2-5x+3|$. Очевидно, что критические точки функции $y = |f(x)|$, отличные, может быть, от нулей данной функции, совпадают с критическими точками функции $y = f(x)$. Следовательно, функция $y = |x^3+x^2-5x+3|$ на отрезке [0, 2] достигает своего наибольшего значения или в критических точках функции $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, принадлежащих данному отрезку, или на концах отрезка.

Найдем критические точки функции $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

$y' = 3x^2 + 2x - 5$, $y' = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{5}{3} \notin [0, 2]$.

Найдем значения функции $y = |x^3+x^2-5x+3|$ в точке x_1 и на концах отрезка [0, 2]. $y(0)=3$, $y(1)=0$, $y(2)=5$

Следовательно, $\|y\| = 5$.

***Пример* 2.** Найти расстояние между кривыми $y_1 = 2x$ и $y_2 = x^3$ в пространствах *а*) C [0;1], *б*) C^1 [0;1].

Решение. *а*) Найдем расстояние между кривыми в пространстве C [0, 1]. По определению, $\rho_0 = \max_{0\le x\le 1}|x^3-2x|$.

Найдем максимум функции $y = |x^3 - 2x|$ на отрезке [0, 1]. Так как при $x \in [0, 1]$ $x^3 - 2x \le 0$, то $y = |x^3 - 2x| = 2x - x^3$.

$y' = 2 - 3x^2$, $y' = 0$ при $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Так как $x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\notin[0;1]$, то эту точку рассматривать не будем.

$y(0)=0$, $y\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{4}{3}}$, $y(1)=1$.

Сравнивая найденные значения, видим, что $\rho=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

б) Найдем расстояние между кривыми в пространстве $C^1[0,1]$. По определению $\rho_1=\max\{\max\limits_{0\le x\le1}|y_1-y_2|;\ \max\limits_{0\le x\le1}|y_1'-y_2'|\}$.

$\max\limits_{0\le x\le1}|y_1-y_2|=\max\limits_{0\le x\le1}|x^3-2x|$ найден в части *а*).

Найдем $\max\limits_{0\le x\le1}|y_1'-y_2'|$. $y_1'-y_2'=2-3x^2=\varphi(x)$, $\varphi'(x)=-6x$, $\varphi'(x)=0$ при $x=0$, $|\varphi'(0)|=2$, $|\varphi'(1)|=1$.

Значит, $\max\limits_{0\le x\le1}|y_1'-y_2'|=2$. $\rho=\max\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{4}{3}},\ 2\right)=2$.

***Пример* 3.** Доказать, что функции $y_1=\dfrac{\sin^2 n^2x}{n}$ и $y_2=0$ при достаточно больших значениях n близки в смысле близости нулевого порядка, но не близки в смысле близости первого порядка на отрезке $[0,\pi]$.

Решение. Так как в пространстве $C[0,\pi]$:

$$\|y_1-y_2\|=\max_{0\le x\le\pi}|y_1-y_2|=\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{\sin^2 n^2x}{n}-0\right|=\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{\sin^2 n^2x}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

и при больших значениях n величина $\dfrac{1}{n}$ мала, то, эти функции близки в смысле близости нулевого порядка.

Рассмотрим пространство $C^1[0,\pi]$.

$$y_1'=\left(\frac{\sin^2 n^2x}{n}\right)'=\frac{1}{n}\cdot 2\sin n^2x\cdot\cos n^2x\cdot n^2=n\sin 2n^2x,$$

$$\max_{0\le x\le\pi}|y_1'-y_2'|=\max_{0\le x\le\pi}|n\sin 2n^2x-0|=\max_{0\le x\le\pi}|n\sin 2n^2x|=n,$$

$$\|y_1-y_2\|=\max_{0\le x\le\pi}(\max_{0\le x\le\pi}|y_1-y_2|,\max_{0\le x\le\pi}|y_1'-y_2'|)=\max_{0\le x\le\pi}\left(\frac{1}{n},n\right)=n.$$

Таким образом, в смысле близости первого порядка функции y_1 и y_2 не близки.

1.3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Найти расстояние между кривыми $y(x)$ и $y_1(x)$ на указанных отрезках в пространстве $C[a, b]$:

1) $y(x) = xe^{-x}$, $y_1(x) \equiv 0$ на $[0, 2]$;

2) $y(x) = \sin 2x$, $y_1(x) = \sin x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $y(x) = x^2 + 3x$, $y_1(x) = x - 1$ на $[-1, 3]$;

4) $y(x) = 2 - x^2$, $y_1(x) = x^2 + 3$ на $[-3, 1]$;

5) $y(x) = x$, $y_1(x) = \ln(x)$ на $[e^{-1}, e]$;

6) $y(x) = x^3$, $y_1(x) \equiv x$ на $[0, 1]$;

7) $y(x) = \cos 2x$, $y_1(x) = \cos x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

8) $y(x) = x^2 + 3x$, $y_1(x) = x - 1$ на $[-2;4]$.

Задание 2. Найти расстояние между кривыми на указанных отрезках в пространстве $C^1[a, b]$:

1) $y(x) = x^2 - 2x$, $y_1(x) = 2x^2$ на $[0, 2]$;

2) $y(x) = x^3$, $y_1(x) = 3x^2 + 2$ на $[0, 2]$;

3) $y(x) = \ln x$, $y_1(x) = x$ на $[e^{-1}, e]$;

4) $y(x) = x^3$, $y_1(x) \equiv x$ на $[0, 1]$;

5) $y(x) = x^2 + 3x$, $y_1(x) = x - 1$ на $[-2;4]$.

Найти расстояние между кривыми на указанных отрезках в пространстве $C^2[a, b]$:

6) $y(x) = x^3 + 2x$, $y_1(x) = x^2$ на $[-1, 2]$;

7) $y(x) = x$, $y_1(x) = -\cos x$ на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;

8) $y(x) = x^2$, $y_1(x) = x$ на $[0, 1]$.

Задание 3. Установить порядок близости кривых $y(x)$ и $y_1(x)$, где n достаточно велико и $y_1(x) \equiv 0$:

1) $y(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2 + 5}$, $x \in [0; 2\pi]$;

2) $y(x) = \dfrac{\sin 3x}{n + 2}$, $x \in [0; \pi]$;

3) $y(x) = \sin \dfrac{x}{n^2 + 1}$, $x \in [0; 1]$;

4) $y(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n^3}$, $x \in [0; 2\pi]$;

5) $y(x)=\dfrac{\sin nx}{n+2}$, $x\in[0;\pi]$; 6) $y(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$, $x\in[0;1]$;

7) $y(x)=\dfrac{\sin x}{n^2+5}$, $x\in[0;2\pi]$; 8) $y(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, $x\in[0;\pi]$.

Задание 4. Найти число N, начиная с которого в пространстве $C[a, b]$ выполняется $\|y-y_1\|\le 0{,}01$, где $y_1(x)\equiv 0$, или доказать, что такого числа не существует.

1) $y(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2+5}$, $[0;2\pi]$; 2) $y(x)=\dfrac{\sin 3x}{n+2}$, $x\in[0;\pi]$;

3) $y(x)=\sin\dfrac{x}{n^2+1}$, $x\in[0;1]$; 4) $y(x)=\dfrac{\sin n^2 x}{n^3}$, $x\in[0;2\pi]$;

5) $y(x)=\dfrac{\sin nx}{n+2}$, $x\in[0;\pi]$; 6) $y(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$, $x\in[0;1]$;

7) $y(x)=\dfrac{\sin x}{n^2+5}$, $x\in[0;2\pi]$; 8) $y(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, $x\in[0;\pi]$.

Лабораторная работа № 2
Понятие функционала

2.1. Основные теоретические сведения

Понятие функционала. Пусть дан некоторый класс H функций $y(x)$. Если каждой функции $y(x)\in H$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число, то *говорят, что на множестве H определен функционал* $F = F[y]$.

Приведем примеры функционалов.

1. Пусть $H = C[a, b]$ и пусть $F[y] = y(x_0)$, где $x_0 \in [a, b]$. Данный функционал каждой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y(x)$ ставит в соответствие значение этой функции в точке x_0.

2. $H = C^1[0, 2]$, $F[y]=y'(x_0)$, где $x_0 \in [0, 2]$. Данный функционал каждой функции $y(x)$, имеющей непрерывную на отрезке $[0, 2]$ производную, ставит в соответствие значение производной функции в точке $x_0\in[0, 2]$. При $x_0 = 1$, $y = e^x$ получим $F[e^x] = (e^x)'_{x_0=1}=e$.

3. Пусть $H = C^1[0, 1]$, т.е. множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций. Рассмотрим функционал $F[y]=\int\limits_0^1(2y+y')dx$, который каждой функции $y(x)$, имеющей непрерывную на отрезке $[0, 1]$ производную, ставит в соответствие определенный интеграл $\int\limits_0^1(2y+y')dx$.

Непрерывность функционала. Линейный функционал. Функционал $F\,[y]$, определенный в пространстве $C^k[a,\, b]$, называется *непрерывным в смысле близости k-го порядка* на функции $y = y_0\,(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, существует число $\delta > 0$ такое, что для всех допустимых функций $y\,(x)$, удовлетворяющих условию $\rho_k\,(y_0\,(x),\, y\,(x)) < \delta$, выполняется неравенство $|F\,[y] - F\,[y_0]| < \varepsilon$.

Можно дать второе определение непрерывности функционала.

Представим функцию $y\,(x)$, определенную в пространстве $C^k[a,\, b]$, в виде $y\,(x) = y_0(x) + \alpha\eta\,(x)$, где α – параметр, $\eta\,(x)$ – некоторая функция класса $C^k[a,\, b]$. Тогда функционал $F\,[y]$, определенный в пространстве $C^k[a,\, b]$, будет *непрерывным в смысле близости k-го порядка* на функции $y = y_0\,(x)$, если выполняется равенство

$$\lim_{\alpha\to 0} F(y_0 + \alpha\eta) = F(y_0). \qquad (2.1)$$

Функционал $L[y]$ называется *линейным*, если он удовлетворяет условиям:

1) $L\,[cy] = c\cdot L[y]$, где c − произвольная постоянная,

2) $L\,[y_1 + y_2] = L\,[y_1] + L\,[y_2]$.

2.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *а*) Найти значение функционала $F[y] = x + xy^2 - y'$, где $y\,(x) \in C^1[0,\, 2]$ на функции $y = e^{2x}$.

б) Найти значение функционала $\int_0^1 (2y + y')dx$, где $y\,(x) \in C^1[0,\, 2]$ на функции $y = x^2$.

Решение. *а*) Так как $y' = 2e^{2x}$, то значение функционала на функции $y = e^{2x}$ равно $F[e^{2x}] = x + xe^{4x} - 2e^{2x}$.

б) При $y = x^2$, получим

$$F[x^2] = \int_0^1 (2x^2 + 2x)dx = \left(2\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

***Пример* 2.** Доказать, что функционал $F[y] = \int_0^1 (2x^2y + y')dx$ является линейным.

Решение. Проверяем условия линейности функционала:

1) $F[cy] = \int_0^1 (2x^2 \cdot cy + cy')dx = c\int_0^1 (2x^2y + y')dx = cF[y]$;

2) $F[y_1 + y_2] = \int_0^1 (2x^2 \cdot (y_1 + y_2) + (y_1' + y_2'))dx =$

$= \int_0^1 (2x^2y_1 + y_1')dx + \int_0^1 (2x^2y_2 + y_2')dx = F[y_1] + F[y_2]$.

Условия линейности выполняются, следовательно, функционал является линейным.

***Пример* 3.** Показать, что функционал $F[y]=\int_0^1 (y'-3y)dx$ непрерывен в пространстве $C^1[0, 1]$ на функции $y_0 = x + 2$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нужно показать, что найдется число $\delta > 0$ такое, что для любой функции $y(x)$ из пространства $C^1[0, 1]$ будет выполняться неравенство

$$|F[y] - F[y_0]| = |F[y] - F[x + 2]| < \varepsilon,$$

как только $|y - y_0| = |y - (x + 2)| < \delta$ и $|y' - y_0'| = |y' - 1| < \delta$.

$$F[x + 2] = \int_0^1 ((x+2)'-3(x+2))dx = \int_0^1 (1-3(x+2))dx = \int_0^1 (-3x-5))dx.$$

Поэтому

$$|F[y]-F[x+2]| = |\int_0^1 (y'-3y+3x+5)dx| = |\int_0^1 (y'-3y-1+3(x+2)dx| =$$

$$= |\int_0^1 (y'-1)dx - 3\int_0^1 (y-(x+2))dx| \le \int_0^1 |y'-1|dx + 3\int_0^1 |y-(x+2)|dx.$$

Возьмем $\delta < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Тогда, по свойству определенных интегралов от ограниченных функций, для всех $y(x) \in C^1[0, 1]$ и удовлетворяющих условиям $|y(x)-(x+2)| < \dfrac{\varepsilon}{5}$, $|y'(x)-1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$, будет иметь место неравенство

$$|F[y(x)]-F[x+2]| \le \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5} < \varepsilon.$$

Это и означает, что функционал непрерывен на функции $y = x + 2$ в пространстве $C^1[0, 1]$.

***Замечание* 1.** Доказать непрерывность функционала $F[y]=\int_0^1 (y'-3y)dx$ можно также используя формулу (2.1). Так как

$$F[y+\alpha\eta] = \int_0^1 ((y+\alpha\eta)'-3(y+\alpha\eta))dx = \int_0^1 ((y'-3y)+(\alpha\eta'-\alpha\eta))dx,$$

где $\eta(x)$ – непрерывная вместе со своей производной на отрезке [0, 1] функция, то, по свойству определенных интегралов, зависящих от параметра

$$\lim_{\alpha\to 0} F(y_0+\alpha\eta) = \lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 ((y_0'-3y_0)+(\alpha\eta'-\alpha\eta))dx =$$

$$= \int_0^1 \lim_{\alpha\to 0} ((y_0'-3y_0)+(\alpha\eta'-\alpha\eta))dx = \int_0^1 (y_0'-3y_0)dx = F[y_0].$$

Следовательно, функционал непрерывен на функции $y = x + 2$ в пространстве $C^1[0, 1]$.

***Замечание* 2.** Данный функционал не является непрерывным в пространстве C $[0, 1]$ на функции $y_0 = x + 2$, так как непрерывность данного функционала в смысле близости нулевого порядка не требует близости производных функций $y(x)$ и $y_0(x)$. Следовательно, неравенство $|y' - y_0'| = |y' - 1| < \delta$ может не выполняться.

2.3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Вычислить значение функционала $F[y]$ на соответствующих кривых:

1) $F[y(x)] = y(1)$, где $y(x) \in C[0, 2]$ на кривых: *а*) $y(x) = x$; *б*) $y(x) = e^x$;

2) $F[y(x)] = y(0)$, где $y(x) \in C[-1, 2]$ на кривых: *а*) $y(x) = x^2$; б) $y(x) = e^{2x}$;

3) $F[y(x)] = y'(1)$, где $y(x) \in C^1[0, 2]$ на кривых: *а*) $y(x) = x^3$; *б*) $y(x) = e^{-x}$;

4) $F[y(x)] = y'(2)$, где $y(x) \in C[1, 2]$ на кривых: *а*) $y(x) = 2x - 3$; *б*) $y(x) = 4e^x + 2$;

5) $F[y(x)] = y(0)$, где $y(x) \in C[-\pi, \pi]$ на кривых: *а*) $y(x) = \cos x$; *б*) $y(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$;

6) $F[y(x)] = y'(\frac{\pi}{2})$, где $y(x) \in C^1[0, \pi]$ на кривых: *а*) $y(x) = \cos^2 x$; *б*) $y(x) = \operatorname{ctg} x - \sin 2x$;

7) $F[y(x)] = y(1)$, где $y(x) \in C[\frac{1}{2}, 2]$ на кривых: *а*) $y(x) = 4x - 3$; *б*) $y(x) = \ln x + x^2$;

8) $F[y(x)] = y'(1)$, где $y(x) \in C[0, 2]$ на кривых: *а*) $y(x) = xe^{3x}$; *б*) $y(x) = 5x^2 - 4x + 2$.

Задание 2. Вычислить значение функционала $F[y]$ на соответствующих кривых:

1) $F[y] = \int_0^1 x(2 + y')dx$ на кривых: *а*) $y(x) = 5x^2 - 4x + 2$; *б*) $y(x) = e^{3x}$;

2) $F[y] = \int_0^1 x^2(y - 3y')dx$ на кривых: *а*) $y(x) = x$; *б*) $y(x) = e^x$;

3) $F[y]=\int_0^{\frac{1}{2}} xy'\,dx$ на кривых: *а*) $y(x)=x^2$; *б*) $y(x)=\arcsin x$;

4) $F[y]=\int_0^1 (xy-5y')dx$ на кривых: *а*) $y(x)=\dfrac{1}{1+x}$; *б*) $y(x)=e^{-x}$;

5) $F[y]=\int_0^1 (x+y')dx$ на кривых: *а*) $y(x)=2x-3$; *б*) $y(x)=\operatorname{arctg} x$;

6) $F[y]=\int_0^{\pi} (y-xy')dx$ на кривых: *а*) $y(x)=x^2-1$; *б*) $y(x)=\sin x$;

7) $F[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-y')dx$ на кривых: *а*) $y(x)=\cos^2 x$; *б*) $y(x)=2x+1$;

8) $F[y]=\int_1^2 x(y-y'^2)dx$ на кривых: *а*) $y(x)=4x-3$; б) $y(x)=\ln x$.

Задание 3. Проверить на линейность следующие функционалы:

1) $F[y(x)]=y'(1)$, где $y(x)\in C^1[0,2]$;

2) $F[y(x)]=y(1)$, где $y(x)\in C[1/2,2]$;

3) $F[y]=\int_0^1 x(1-y')dx$; 4) $F[y]=\int_0^1 x(y-y')dx$;

5) $F[y]=\int_0^1 x(2y-xy')dx$; 6) $F[y]=\int_0^1 (x^2y+e^xy')dx$;

7) $F[y]=\int_0^1 (x+y-y')dx$; 8) $F[y]=\int_0^1 (y^2-y')dx$.

Задание 4. Определить, непрерывны ли следующие функционалы в пространстве $C^1[a,b]$ на прямой $y\equiv 0$:

1) $F[y]=\int_0^2 y'^2dx$; 2) $F[y]=\int_0^1 (xy+y')dx$;

3) $F[y]=\int_0^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx$; 4) $F[y]=\int_{-1}^1 (2+y'^2)dx$;

5) $F[y]=\int_0^1 x(1-y')dx$; 6) $F[y]=\int_0^{\pi} y(x)(1+2y')dx$.

Определить, непрерывен ли функционал $F[y]$ в пространстве $C^1[0,1]$ на функции $y_0(x)$:

7) $F[y]=\int_0^1 (y+2y')dx$; $y_0(x)=x$;

8) $F[y]=\int_0^1 (xy+2y')dx$; $y_0(x)=x+2$.

Лабораторная работа № 3
Вариация функционала. Экстремум функционала

3.1. Основные теоретические сведения

Вариация функционала. *Вариацией* или *приращением* δy *аргумента* $y(x)$ функционала $F[y]$ называется разность функций $y(x)$ и $y_0(x)$ принадлежащих заданному классу функций H: $\delta y = y(x) - y_0(x)$.

Приращением функционала $F[y]$, соответствующим приращению δy аргумента называется разность

$$\Delta F = F[y_0 + \delta y] - F[y_0].$$

Если приращение функционала $F[y]$ можно представить в виде

$$\Delta F = L[y, \delta y] + \beta[y, \delta y]\cdot\|\delta y\|,$$

где $L[y, \delta y]$ – линейный относительно δy функционал, $\beta[y, \delta y] \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, то $L[y, \delta y]$ называется *вариацией функционала* и обозначается δF. В этом случае функционал называется *дифференцируемым* в точке $y(x)$.

Рассмотрим функционал $F[y + \alpha\cdot\delta y]$, где $y(x)$ и $\delta y(x)$ – фиксированы, α – изменяющийся параметр. *Вариацию функционала* $F[y]$ можно определить также как производную функционала $F[y + \alpha\cdot\delta y]$ по параметру α:

$$L[y, \delta y] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial F[y + \alpha\delta y]}{\delta\alpha}. \quad (3.1)$$

Если существует вариация функционала, как главная линейная часть его приращения, то существует и вариация как значение производной по параметру α при $\alpha = 0$ и эти вариации совпадают.

Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума. Говорят, что функционал $F[y]$, определенный в пространстве $C^k[a, b]$, достигает *максимума* на кривой $y = y_0(x)$, если на всех допустимых кривых, близких к $y_0(x)$, выполняется неравенство $F[y_0] \ge F[y]$ или $\Delta F[y_0] = F[y] - F[y_0] \le 0$.

Если $\Delta F[y_0] \le 0$ и $\Delta F[y_0] = 0$ только при $F[y] = F[y_0]$, то *максимум называется строгим.*

Аналогично определяется *минимум* (*строгий минимум*) функционала на кривой $y = y_0(x)$. В этом случае $\Delta F[y_0] \ge 0$ на всех кривых, близких к $y_0(x)$.

Максимум (минимум) функционала называется *экстремумом* функционала.

Если функционал $F[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума (минимума) по отношению к допустимым кривым близким к $y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка, то экстремум называется _сильным_.

Если функционал $F[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума (минимума) по отношению к допустимым кривым близким к $y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, то экстремум называется _слабым_.

Сильный экстремум в то же время является слабым, но не наоборот.

Теорема. *Если дифференцируемый функционал* $F[y]$ *достигает экстремума на кривой* $y = y_0(x)$, *где* $y_0(x)$ *– внутренняя точка области определения функционала, то при* $y = y_0(x)$ вариация $\delta F[y_0] = 0$.

3.2. Примеры решения задач

Пример **1.** Найти вариацию функционала $F[y] = \int_0^1 y^2 dx$, определенного в классе функций $C^1[0, 1]$.

Решение. Найдем приращение функционала

$$\Delta F[y] = F[y + \delta y] - F[y] = \int_0^1 (y + \delta y)^2 dx - \int_0^1 y^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (y^2 + 2y\delta y + (\delta y)^2 - y^2)dx = \int_0^1 (2y\delta y + (\delta y)^2)dx = \int_0^1 2y\delta y\, dx + \int_0^1 (\delta y)^2 dx.$$

В нашем случае линейной относительно δy частью приращения будет функционал $L[y, \delta y] = \int_0^1 2y\delta y\, dx$, так как для него выполняются все условия линейности функционала:

1) $L[y, c\delta y] = \int_0^1 2y \cdot c\delta y\, dx = c \cdot \int_0^1 2y\delta y\, dx = c \cdot L[y, \delta y]$,

2) $L[y, \delta y_1 + \delta y_2] = \int_0^1 2y \cdot [\delta y_1 + \delta y_2]dx = \int_0^1 2y\delta y_1\, dx + \int_0^1 2y\delta y_2\, dx =$
$= L[y, \delta y_1] + L[y, \delta y_2]$.

Оценим интеграл $\int_0^1 (\delta y)^2 dx$:

$$\int_0^1 (\delta y)^2 dx \le \max_{0 \le x \le 1} (\delta y)^2 = \max_{0 \le x \le 1} |\delta y|^2 = \|\delta y\|^2 = \|\delta y\| \cdot \|\delta y\|.$$

В этом случае $\beta[y, \delta y] = \|\delta y\| \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$.

Следовательно, вариацией $\delta F[y]$ функционала является линейный функционал $L[y, \delta y] = \int_0^1 2y\delta y\, dx$ и, согласно определению, функционал $F[y] = \int_0^1 y^2 dx$ является дифференцируемым в каждой точке $y(x) \in C^1[0, 1]$.

Замечание. Вариацию функционала $F[y]=\int_0^1 y^2dx$ можно так же найти по формуле (3.1):

$$F\,[y+\alpha\cdot\delta y]=\int_0^1 (y^2+\alpha\cdot\delta y)^2dx=\int_0^1 (y^2+2\alpha y\cdot\delta y+\alpha^2(\delta y)^2)dx\,.$$

$$\delta F[y]=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial F[y+\alpha\delta y]}{\delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial}{\delta\alpha}\int_0^1 (y^2+2\alpha y\cdot\delta y+\alpha^2(\delta y)^2)dx=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 (2y\cdot\delta y+2\alpha(\delta y)^2)dx=\int_0^1 2y\delta y\,dx.$$

***Пример* 2.** Доказать, что функционал $F[y]=\int_0^\pi y^2\,(1-y'^2)\,dx$, определенный на множестве H функций $y=y\,(x)$ пространства $C^1[0,\pi]$, удовлетворяющих начальным условиям $y\,(0)=0$, $y\,(\pi)=0$, достигает на кривой $y=0$ слабого экстремума, но не достигает сильного.

Решение. Докажем, что на кривой $y = 0$ функционал достигает слабого минимума.

$F[0]=\int_0^\pi 0\,dx=0$. Оценим $\Delta\,F[0]=F[y]-F[0]=\int_0^\pi y^2\,(1-y'^2)\,dx$.

Рассмотрим множество функций, принадлежащих H, расположенных в ε-окрестности первого порядка функции $y = 0$, где ε - любое число меньшее единицы. Тогда $|y'|<1$ и подынтегральная функция $y^2\,(1-y'^2)\ge 0$. По свойству определенного интеграла, $\Delta\,F[0]=\int_0^\pi y^2\,(1-y'^2)\,dx\ge 0$. Следовательно, функционал достигает слабого минимума на кривой $y = 0$.

Докажем, что на кривой $y = 0$ функционал не достигает сильного эксремума. Рассмотрим кривую $y\,(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$. При достаточно больших n данная кривая близка к кривой $y = 0$ в смысле близости нулевого порядка, так как в пространстве $C\,[0,\pi]$:

$$\|y\,(x)-y_0\,(x)\|=\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\,nx\,\|=\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\,nx\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

На кривых $y\,(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$ и $y = 0$

$$\Delta\,F[0]=F[y]-F[0]=\int_0^\pi\frac{1}{n}\sin^2 nx(1-n\cos^2 nx)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi(\frac{1}{n}\sin^2 nx-\sin^2 nx\cdot\cos^2 nx)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi \frac{1}{n}\sin^2 nxdx-\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2 2nx\,dx\ =\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, при больших n для кривой $y(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$ $\Delta F[0]<0$. В то же время, по доказанному выше, для всех кривых, близких к $y=0$ в смысле близости первого порядка (значит и в смысле близости нулевого порядка) $\Delta F[0]\geq 0$. Следовательно на кривой y = 0 сильный экстремум не достигается.

3.3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Проверить следующие функционалы на дифференцируемость и найти первую вариацию двумя способами: *а*) по определению; *б*) с помощью формулы (3.1):

1) $F[y]=\int_0^1 (x+y'^2)dx$;
2) $F[y]=\int_0^1 (3x+2y')dx$;
3) $F[y]=\int_0^1 (x^2+2y^2)\,dx$;
4) $F[y]=\int_0^1 (xy-y'^2)dx$;
5) $F[y]=\int_0^2 y'^2dx$;
6) $F[y]=\int_{-1}^1 (2+y'^2)dx$;
7) $F[y]=\int_0^2 \sqrt{1+y'^2}dx$;
8) $F[y]=\int_0^1 (x^2y+e^xy')dx$.

Задание 2. Пользуясь определением, доказать, что на кривой $y = y(x)$ функционал $F[y]$достигает глобального минимума:

1) $F[y]=\int_0^1 y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$, где $y(x) = x$;.

2) $F[y]=\int_0^1 (2x+y'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$, где $y(x) = x$;.

3) $F[y]=\int_0^1 (x^2+y'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$ где $y(x) = x$;

4) $F[y]=\int_0^1 y''^2dx,\ \ y(0)=y'(0)=y(1)=0,\ \ y'(1)=1$, где $y(x) = x^3–x^2$.

Пользуясь определением, доказать, что на кривой $y=y(x)$ функционал

5) $F[y]=\int_0^\pi y^2(3-y'^2)dx,\ y(0)=y(\pi)=0$ имеет слабый минимум на кривой $y(x)\equiv 0$, а сильного минимума на этой кривой нет;

6) $F[y]=\int_0^\pi y^2(1-y')^2dx,\ y(0)=y(\pi)=0$ имеет сильный минимум на кривой $y(x)\equiv 0$;

7) $F[y]=\int_0^{\pi} y^2(1-2y'^2)dx,\ y(0)=y(\pi)=0$ имеет слабый минимум на кривой $y(x)\equiv 0$, а сильного минимума на этой кривой нет;

8) $F[y]=\int_0^{\pi} y^2(1+y')^2 dx,\ y(0)=y(\pi)=0$ имеет сильный минимум на кривой $y(x)\equiv 0$.

Лабораторная работа № 4
Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

4.1. Основные теоретические сведения

Пусть функция $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно на множестве $a \le x \le b$, $-\infty < y,\ y' < +\infty$.

Рассмотрим задачу: среди всех функций $y(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{4.1}$$

найти ту функцию, на которой достигается слабый экстремум функционала

$$F[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')dx. \tag{4.2}$$

Такая задача *<u>называется простейшей задачей вариационного исчисления</u>*. Основой для решения простейшей задачи вариационного исчисления является следующая теорема.

Теорема. *Если на функции* $y_0(x) \in C^1[a, b]$, *удовлетворяющей условиям* (4.1), *достигается экстремум функционала* (4.2), *то эта функция является решением уравнения*

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) называется *<u>уравнением Эйлера.</u>* Семейство интегральных кривых $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера называют *<u>экстремалями функционала</u>* (4.2).

Уравнение Эйлера в развёрнутой форме имеет вид:

$$f'_y - f''_{xy'} - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'' = 0. \tag{4.4}$$

4.2. Примеры решения задач

Пример. Найти экстремали функционала

$$F[y]=\int_0^1 24xy+yy'+4y'^2)dx$$

при условиях $y\,(0) = 0$, $y\,(1) = 4$.

Решение. $f\,(x,y,y')=24xy+yy'+4y'^2$.

Найдем частные производные функции $f\,(x,y,y')$:

$$f'_y=24x+y',\quad f'_{y'}=y+8y',\quad f'_{xy'}=0,\quad f''_{yy'}=1,\quad f''_{y'y'}=8.$$

Уравнение Эйлера: $24x+y'-y'-8y''=0$, т.е. $y''=3x$.
Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$y'=\frac{3x^2}{2}+C_1,\ y=\frac{x^3}{2}+C_1x+C_2.$$

Из граничных условий находим:

$$\begin{cases}C_2=0\\ \frac{1}{2}+C_1+C_2=4\end{cases},\qquad \begin{cases}C_2=0\\ C_1=\frac{7}{2}\end{cases}.$$

Таким образом, $y=\frac{x^3}{2}+\frac{7}{2}x$ – искомая экстремаль.

4.3. Задания для лабораторной работы

Найти экстремали функционалов, при заданных граничных условиях.

Задание 1.

1) $\mathrm{F}(y)=\int_0^1\left(x^2+3y+y'^3\right)dx$; $y(0)=0,\ y(1)=2$;

2) $\mathrm{F}(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-4y^2-2\sin 2x\cdot y+y'^2\right)dx$; $y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{2})=3$;

3) $\mathrm{F}(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-9y^2+\cos 2x\cdot y+y'^2\right)dx$; $y(0)=1,\ y(\frac{\pi}{2})=2$;

4) $\mathrm{F}(y)=\int_0^1\left(9y^2+2x\cdot y+y'^2\right)dx$; $y(0)=y(1)=0$;

5) $F(y)=\int_0^{\pi}\left(4y\cos x+y'^2-y^2\right)dx$; $y(0)=y(\pi)=0$;

6) $F(y)=\int_0^{\ln 2}e^{2x}(y'^2+3y^2)dx$; $y(0)=0$, $y(\ln 2)=\frac{15}{8}$;

7) $F(y)=\int\limits_{-1}^{1}(2xy-y'^2)dx$; $y(-1)=-1,\ y(1)=1$;

8) $F(y)=\int\limits_{-1}^{0}(2xy-y'^2)dx$; $y(-1)=0,\ y(0)=2$.

Задание 2.

1) $\mathrm{F}(y)=\int\limits_{0}^{e}\left(2y-x^2y'^2\right)dx$; $y(1)=e,\ y(e)=0$;

2) $F(y)=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2+yy'+12xy\right)dx$; $y(0)=y(1)=0$;

3) $F(y)=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2+xy\right)dx$; $y(0)=y(1)=0$;

4) $F(y)=\int\limits_{0}^{1}\left(e^xy+y'^2\right)dx$; $y(0)=0,\ y(1)=1$;

5) $F(y)=\int\limits_{0}^{1}(y'^2+xy)^2dx$; $y(0)=y(1)=0$;

6) $F(y)=\int\limits_{-1}^{0}(12xy-y'^2)dx$; $y(-1)=1,\ y(0)=0$;

7) $F(y)=\int\limits_{1}^{e}(yy'+xy'^2)dx$; $y(1)=0,\ y(e)=1$;

8) $\mathrm{F}(y)=\int\limits_{0}^{2}\left(x\cdot y'^3-3yy'^2\right)dx$; $y(0)=4$; $y(2)=6$.

Задание 3.

1) $\mathrm{F}(y)=\int\limits_{0}^{1}\left(4y^2-2\sin x\cdot y+y'^2\right)dx$; $y(0)=0,\ y(1)=2$;

2) $\mathrm{F}(y)=\int\limits_{0}^{1}\left(\sin 3x+4y+y'^4\right)dx$; $y(0)=y(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $F(y)=\int\limits_{0}^{b}\left(y'^2+9y^2-3x\right)dx$; $y(0)=y(b)=0$;

4) $\mathrm{F}(y)=\int\limits_{0}^{1}\left(\ln 3x+6y-y'^3\right)dx$; $y(0)=1,\ y(1)=3$;

5) $F(y)=\int\limits_{1}^{2}\left(xy'^4-2yy'^3\right)dx$; $y(1)=0,\ y(2)=1$;

6) $F(y)=\int\limits_{0}^{1}e^{2x}(y'^2-y^2-y)dx$; $y(0)=0,\ y(1)=e^{-1}$;

7) $\mathrm{F}(y)=\int\limits_{0}^{1}\left(4y^2+x^2e^x\cdot y+y'^2\right)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=2$;

8) $\mathrm{F}(y)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(9y^2+2yy'-y'^2\right)dx$; $y(0)=1$; $y(\dfrac{\pi}{6})=0$.

Лабораторная работа № 5
Частные случаи уравнения Эйлера

5.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения Эйлера.

1) Пусть подынтегральная функция $f(x, y, y')$ функционала $F[y]$ не зависит от y': $f = f(x, y)$. В этом случае $f'_{y'} = 0$. Тогда уравнение Эйлера имеет вид $f'_y(x, y) = 0$. Оно является не дифференциальным, а алгебраическим. Поэтому данная задача имеет решение только в исключительных случаях.

2) Функция $f(x, y, y')$ линейно зависит от y':

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y) \cdot y'.$$

Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$, которое, как и в предыдущем случае, не является дифференциальным. Кривая, заданная уравнением $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$, вообще говоря, не удовлетворяет начальным условиям и задача, как правило, не имеет решения.

Если в некоторой области D $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, то выражение

$$f(x, y, y') = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

является полным дифференциалом и функционал не зависит от пути интегрирования. Значение функционала одно и то же на всех допустимых кривых, вариационная задача теряет смысл.

3) Функция $f(x, y, y')$ зависит только от y': $f = f(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид $f''_{y'y'} \cdot y'' = 0$. Отсюда $y'' = 0$ или $f''_{y'y'} = 0$. Решением уравнения $y'' = 0$ является семейство прямых $y = C_1 x + C_2$. Если уравнение $f''_{y'y'} = 0$ имеет один или несколько действительных корней $y' = k_i$, то решения $y = k_i x + C$ – это частный случай семейства прямых $y = C_1 x + C_2$. Следовательно, в этом случае экстремалями являются прямые $y = C_1 x + C_2$.

4) Функция $f(x, y, y')$ зависит от x и y': $f = f(x, y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx} f'_{y'} = 0$. Следовательно, имеет первый интеграл $f'_{y'}(x, y') = C_1$. Это уравнение первого порядка не зависящее от y. Решить это уравнение можно или с помощью подстановки, или выразив y', а затем проинтегрировав.

5) Функция $f(x, y, y')$ зависит от y и y': $f = f(y, y')$. Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx}(f - f'_{y'} \cdot y') = 0$. Данное уравнение имеет первый интеграл $f - f'_{y'} \cdot y' = C_1$.

5.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти экстремали функционала

$$F[y] = \int_0^1 (y^2 - 5ye^{2x})dx, \;\; y(0) = 0, y(1) = e.$$

Решение. Подынтегральная функция $f(x, y, y')$ функционала $F[y]$ не зависит от y': $f = f(x, y)$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$f'_y(x, y) = 0.$$

Получаем $2y - 5e^{2x} = 0$, т.е. $y = \frac{5}{2}e^{2x}$. Эта функция не может быть экстремалью, так как для нее не выполняются граничные условия $y(0) = \frac{5}{2} \neq 0, \;\; y(1) = \frac{5}{2}e^2 \neq e$.

***Пример* 2.** Найти экстремали функционала

$$F(y) = \int_0^1 \left(y' - 2y'^2\right)dx; \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 2.$$

Решение. Подынтегральная функция $f(x, y, y')$ зависит только от y': $f = f(y')$. Уравнение Эйлера имеет вид $f''_{y'y'} \cdot y'' = 0$. Отсюда $y'' = 0$ или $f''_{y'y'} = 0$. Решением уравнения $y'' = 0$ является семейство прямых линий $y = C_1 x + C_2$. Экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, есть прямая $y = 2x$.

***Пример* 3.** Найти экстремали функционала

$$F(y) = \int_0^1 \left(x^2 y' - 2xy'^2\right)dx.$$

Решение. Подынтегральная функция $f(x, y, y')$ зависит от x и y': $f = f(x, y')$. Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx} f'_{y'} = 0$.

Следовательно, уравнение имеет первый интеграл $x^2 - 4xy' = C_1$. Найдем y':

$$y' = \frac{x^2 - C_1}{4x} = \frac{x}{4} - \frac{C_1}{4x}.$$

Проинтегрировав, получим $y = \frac{x^2}{8} - \frac{C_1}{4}\ln|x| + C_2$.

***Пример* 4.** Найти экстремали функционала $F(y) = \int\limits_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x, y, y')$ зависит от y и y': $f = f(y, y')$. Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx}(f - f'_{y'} \cdot y') = 0$. Это уравнение имеет первый интеграл $f - f'_{y'} \cdot y' = C_1$. В нашем случае получаем $y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$. Преобразовав это уравнение, имеем $y = C_1\sqrt{1+y'^2}$. Экстремалями являются линии $y = ch\frac{x+C_2}{C_1}$.

5.3. Задания для лабораторной работы

Найти экстремали функционалов.

Задание 1.

1) $F(y) = \int\limits_0^3 \left(x^2 + (y-2)^2\right)ydx$; *а)* $y(0) = 2$, $y(3) = 2$; *б)* $y(0) = 1$, $y(3) = 2$;

2) $F(y) = \int\limits_1^2 (2x - y)ydx$; $y(1) = 1$, $y(2) = 3$;

3) $F(y) = \int\limits_0^2 \sin\left(y^2 - 2x^2 y\right)dx$, *а)* $y(0) = 0$; $y(2) = 8$; *б)* $y(0) = 0$; $y(2) = 4$;

4) $F(y) = \int\limits_0^2 \cos(y^2 - 4\sqrt{x}y)dx$, *а)* $y(0) = 0$; $y(2) = 2\sqrt{2}$; *б)* $y(0) = 0$; $y(2) = 4$;

5) $F(y) = \int\limits_0^2 e^{y^2 - 2x^3 y}dx$, *а)* $y(0) = 0$, $y(2) = 8$; б) $y(0) = 1$, $y(2) = 8$;

6) $F(y) = \int\limits_0^2 e^{y^2 - \sqrt{x}y}dx$, *а)* $y(0) = 2$, $y(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *б)* $y(0) = 0$, $y(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

7) $F(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{y^2 - y\sin x}dx$, *а)* $y(0) = 0$; $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$; *б)* $y(0) = \frac{\pi}{2}$; $y(\frac{\pi}{2}) = 4$;

8) $F(y) = \int\limits_1^e \ln(y^3 - 3x^2 y + 2)dx$, $y(1) = -1$; $y(e) = B$.

Задание 2.

1) $F(y)=\int\limits_0^1\left(y^2+x^2y'\right)dx$; $y\,(0) = 0$; $y\,(1) = B$;

2) $F(y)=\int\limits_0^1\left(2y^3+3x^2y'\right)dx$; $y(0) = 0$; $y(1) = B$;

3) $F(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2y^2-\sin x\cdot y'\right)dx$; $y(0) = -\frac{1}{4}$; $y(\frac{\pi}{2}) = B$;

4) $F(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y^2-\cos x\cdot y'\right)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=B$;

5) $F(y)=\int\limits_0^2\left(4y^2x+3x^4\cdot y'\right)dx$; $y(0)=0$; $y(2)=B$;

6) $F(y)=\int\limits_0^2\left(y^3x+x^3y\cdot y'\right)dx$; $y(0)=0$; $y(2)=B$;

7) $F(y)=\int\limits_0^2\left(y+x\cdot y'\right)dx$; $y(0)=0$; $y(2)=B$;

8) $F(y)=\int\limits_0^1\left(y^2x^3+(x^3y^2+y^2)\cdot y'\right)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=B$.

Задание 3.

1) $F(y)=\int\limits_0^1 y'^2dx$; $y(0)=0$, $y(1)=1$;

2) $F(y)=\int\limits_{-1}^1(y'^3+y'^2)dx$; $y(-1)=-1$, $y(1)=3$;

3) $F(y)=\int\limits_0^1\left(y'+y'^2\right)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=3$;

4) $F(y)=\int\limits_0^1\left(\sqrt{1+y'^2}\right)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=3$;

5) $F(y)=\int\limits_0^2\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y'}}\right)dx$; $y(0)=-2$, $y(2)=1$;

6) $F(y)=\int\limits_0^1\left(\sqrt{1+3y'^2}\right)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=3$;

7) $F(y)=\int\limits_0^1\left(\sqrt{1+y'+y'^2}\right)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=5$;

8) $F(y)=\int\limits_0^1\left(2-3y'+4y'^2\right)dx$; $y(0)=-3$, $y(1)=3$.

Задание 4.

1) $\mathrm{F}(y)=\int_0^e \left(2y-x^2y'^2\right)dx$; $y(1)=e$, $y(e)=0$;

2) $F(y)=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx$; $y(1)=1$, $y(2)=4$;

3) $F(y)=\int_1^2 xy'^2dx$; $y(1)=1$, $y(2)=2$;

4) $F(y)=\int_0^1 (y'+3x^2)^2dx$; $y(0)=y(1)=0$;

5) $F(y)=\int_0^1 \left(x+y'^2\right)dx$; $y(0)=1$; $y(1)=2$;

6) $F(y)=\int_0^1 \left(xy'+y'^2\right)dx$; $y(0)=2$; $y(1)=4$;

7) $F(y)=\int_1^2 x^n y'^2dx$, $n\in N$, $n\neq 1$; $y(1)=\frac{1}{1-n}$, $y(2)=\frac{2^{1-n}}{1-n}$;

8) $F(y)=\int_{-1}^1 \left(xy'+y'^2\right)dx$; $y(-1)=1$, $y(1)=0$.

Задание 5.

1) $F(y)=\int_0^b \sqrt{(y+k)(1+y'^2)}dx$; $y(0)=0$, $y(b)=k$;

2) $F(y)=\int_0^1 \sqrt{y(1+y'^2)}dx$; $y(0)=y(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $F(y)=\int_0^1 \left(y'^2-yy'^3\right)dx$; $y(0)=y(1)=0$;

4) $F(y)=\int_0^1 (y^2+y'^2)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=e$;

5) $F(y)=\int_0^{\pi/2} (2y+y^2-y'^2)dx$; $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

6) $F(y)=\int_0^1 \left(y'^2+4y^2\right)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=e^2$;

7) $F(y)=\int_0^1 (y-y'^2)dx$; $y(0)=y(1)=0$;

8) $F(y)=\int_0^{2\pi} (y'^2-y^2)dx$; $y(0)=1$, $y(2\pi)=1$.

Лабораторная работа № 6
Функционалы, зависящие от производных высших порядков

6.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим функционал:

$$F[y]=\int_a^b f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})dx\,, \qquad (6.1)$$

где функция $f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})$ имеет непрерывные производные до (n +2)-го порядка по всем аргументам, а $y\,(x)\in C^n[a,b]$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид:

$$y(a)=y_0,\ \ y'(a)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(a)=y_0^{(n-1)},$$
$$y(b)=y_1,\ \ y'(b)=y'_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(b)=y_1^{(n-1)}.$$

Для того, чтобы функционал (6.1) достигал на функции $y(x)\in C^n[a,b]$ локального экстремума необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера — Пуассона

$$f_y{}' -\frac{d}{dx}(f_{y'})+\frac{d^2}{dx^2}(f_{y''})-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(f_{y^{(n)}})=0\,. \qquad (6.2)$$

6.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти экстремали функционала $F[y]=\int_0^1(120x^2y-y''^2)dx$, удовлетворяющие граничным условиям

$$y(0)=y'(0)=0,\quad y(1)=\frac{1}{6},\quad y'(1)=2\,.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера — Пуассона: $y^{IV}=60x^2$. Интегрируем обе части:

$$y'''=20x^3+\overline{C_1}\,,\qquad y''=5x^4+\overline{C_1}x+\overline{C_2}\,,$$
$$y'=x^5+\frac{\overline{C_1}}{2}x^2+\overline{C_2}x+C_3,$$
$$y=\frac{x^6}{6}+\frac{\overline{C_1}}{6}x^3+\frac{\overline{C_2}}{2}x^2+C_3x+C_4\,.$$

Обозначим: $C_1=\dfrac{\overline{C_1}}{6}$, $C_2=\dfrac{\overline{C_2}}{2}$.

Общее решение уравнения Эйлера — Пуассона:

$$y=\frac{1}{6}x^6+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4\,.$$

С помощью граничных условий получаем систему уравнений для определения постоянных $C_1, \ldots, C_4$:

$$\begin{cases} C_4 = 0, \\ C_3 = 0, \\ \dfrac{1}{6} + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \dfrac{1}{6}, \\ 1 + 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 2, \end{cases}$$

из которой находим $C_1 = 1,\ C_2 = -1,\ C_3 = 0,\ C_4 = 0$.

Экстремум функционала может достигаться на кривой $y = \dfrac{1}{6}x^6 + x^3 - x^2$.

6.3. Задания для лабораторной работы

Найти экстремали функционалов, зависящих от производных высших порядков.

Задание 1.

1) $F(y) = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = -\operatorname{sh} 1$;

2) $F\,(y) = \int_{-1}^0 (240y - y'''^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = -4.5$, $y'(0) = 0$, $y''(-1) = 16$, $y''(0) = 0$;

3) $F\,(y) = \int_a^b (y + y'')dx$, $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, $y'(a) = y'_0$, $y'(b) = y'_1$;

4) $F\,(y) = \int_a^b (y'^2 + yy'')dx$, $y(a) = A_1$, $y(b) = B_1$, $y'(a) = A_2$, $y'(b) = B_2$;

5) $F(y) = \int_0^1 (y'^2 + y''^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \operatorname{sh} 1$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = \operatorname{ch} 1$.

6) $F[y] = \int_0^1 (2y + y''^2)dx$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 4$;

7) $F[y] = \int_0^1 y''^2 dx$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$;

8) $F[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y'^2)dx$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Задание 2.

1) $F[y] = \int_0^1 (48y - y''^2)dx$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y(1) = 1, y'(1) = 4$;

2) $F[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 + y^2 - 2yx^2)dx$, $y(0) = 0,$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4},$ $y'(0) = 0,$ $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi + 1;$

3) $F[y]=\int_0^b (y''^2+y'^2)dx$, $y(0)=0, y(b)=0, y'(0)=0, y'(b)=0$;

4) $F[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2-y^2+x^2)dx$, $y(0)=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'(0)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

5) $F[y]=\int_0^1 (4y^2+5y'^2+y''^2)dx$, $y(0)=y'(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=2$;

6) $F[y]=\int_0^1 (360x^2y-y''^2)dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y(1)=0$, $y'(1)=2{,}5$;

7) $F[y]=\int_0^1 (48y-y''^2)dx$, $y(0)=y'(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=4$;

8) $F[y]=\int_0^1 e^{-x}y''^2dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y(1)=e$, $y'(1)=2e$.

Задание 3.

1) $F[y]=\int_0^1 (y'''^2-y''^2)dx$, $y(0)=y''(0)=0$, $y(1)=y''(1)=\operatorname{sh}1$, $y'(0)=1$, $y'(1)=\operatorname{sh}1$;

2) $F[y]=\int_0^1 y'''^2dx$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=4$, $y''(1)=12$;

3) $F[y]=\int_0^\pi (y'''^2-y'^2)dx$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$, $y(\pi)=y''(\pi)=\operatorname{sh}\pi$, $y'(\pi)=\operatorname{sh}\pi+1$;

4) $F[y]=\int_0^1 (720x^2y-y''^2)dx$, $y(0)=0, y'(0)=1, y(1)=0$, $y'(1)=1$;

5) $F[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4y^2-5y'^2+y''^2)dx$, $y(0)=3$, $y'(0)=4$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4$;

6) $F[y]=\int_{-1}^0 (240y-y'''^2)dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y(-1)=1$, $y'(-1)=-\frac{9}{2}$, $y''(-1)=16$;

7) $F[y]=\int_0^1 (1+x^2+2y'''^2)dx$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y(1)=2$, $y'(1)=6$, $y''(1)=22$;

8) $F[y]=\int_0^1 (240xy+y'''^2)dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$, $y''(0)=2$, $y(1)=\frac{85}{42}$, $y'(1)=\frac{13}{6}$, $y''(1)=5$.

Лабораторная работа № 7
Функционалы, зависящие от нескольких функций

7.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим функционал вида

$$F[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] =$$

$$= \int_a^b f(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))dx, \qquad (7.1)$$

где функция f имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам и $y_k(x) \in C^1[a,b], (k = \overline{1,n})$.

Граничные условия имеют вид $y_k(a) = y_k^0$, $y_k(b) = y_k^1$, $(k = \overline{1,n})$.

Если набор функций $y_1(x), \ldots, y_n(x) \in C^1[a,b]$ доставляет экстремум функционалу (7.1), то эти функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Эйлера

$$f_{y_k} - \frac{d}{dx}(f'_{y'_k}) = 0, (k = \overline{1,n}). \qquad (7.2)$$

7.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C^1[a,b]$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$F[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2 + 2xy_1)dx$$

при граничных условиях $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\frac{\pi}{2}) = y_2(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Решение. Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} y_1'' + y_2 - x = 0, \\ y_2'' + y_1 = 0. \end{cases}$$

Находим из второго уравнения $y_1 = -y_2''$ и подставляем в первое уравнение. Имеем $y_2^{IV} - y_2 = x$.

Общее решение этого уравнения

$$y_1 = -y_2'' = -C_1e^x - C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x,$$

$$y_2 = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x.$$

Из граничных условий получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ -C_1 - C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 - \dfrac{\pi}{2} = 1, \\ -C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = 1. \end{cases}$$

Найдем неизвестные постоянные

$$C_1 = -\frac{\pi}{8sh\frac{\pi}{2}}, \quad C_2 = \frac{\pi}{8sh\frac{\pi}{2}}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Решение системы уравнений Эйлера имеет вид

$$y_1 = \frac{\pi}{4sh\frac{\pi}{2}} shx + (1 + \frac{\pi}{4}) \sin x,$$

$$y_2 = -\frac{\pi}{4sh\frac{\pi}{2}} shx + (1 + \frac{\pi}{4}) \sin x - x.$$

7.3. Задания для лабораторной работы

Найти экстремали функционалов, зависящих от нескольких функций.

Задание 1.

1) $F(y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2z - 4y^2 + y'^2 + y''^2 - z'^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$, $z(0) = 0$, $z(\frac{\pi}{4}) = 1$;

2) $F(y,z) = \int_{-1}^{1} (2xy - y'^2 + \frac{z'^3}{3}) dx$, $y(-1) = 2$, $y(1) = 0$, $z(-1) = -1$, $z(1) = 1$;

3) $F[y,z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 - 2yz) dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $z(0) = 0$, $z(\frac{\pi}{2}) = 1$;

4) $F[y_1, y_2] = \int_{-1}^{1} (2x + \frac{1}{3} y_2'^3 - y_1'^2) dx,$ $y_1(1) = 0$, $y_1(-1) = 2$, $y_2(1) = 1$, $y_2(-1) = -1$;

5) $F[y,z]=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(y'^2-2xyz')dx$, $y(\frac{1}{2})=6$, $y(1)=3$, $z(\frac{1}{2})=15$, $z(1)=1$;

6) $F(y,z)=\int\limits_{0}^{1}(y'^2+z'^2-2yz)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\frac{e-e^{-1}}{2}$, $z(0)=0$, $z(1)=-\frac{e-e^{-1}}{2}$;

7) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{0}^{1}(y_1'y_2'+y_1y_2)dx$, $y_1(0)=0$, $y_1(1)=e$, $y_2(0)=0$, $y_2(1)=e^{-1}$;

8) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{1}^{3}(xy_1'^2+y_2'^2+xy_1y_2)dx$, $y_1(1)=1$, $y_1(3)=1+\ln 3$, $y_2(1)=0$, $y_2(3)=0$.

Задание 2.

1) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y_1'^2+y_2'^2-2y_1y_2)dx$, $y_2(0)=0$, $y_1(\frac{\pi}{2})=1$, $y_2(\frac{\pi}{2})=1$, $y_1(0)=0$;

2) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{-1}^{1}(2xy_2-y_1'^2+\frac{y_2'^3}{3})dx$, $y_1(1)=0$, $y_1(-1)=2$, $y_2(1)=1$, $y_2(-1)=-1$;

3) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{0}^{\pi}(2y_1y_2-2y_1^2+y_1'^2-y_2'^2)dx$, $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=1$, $y_2(0)=0$, $y_2(\pi)=1$;

4) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2y_2-4y_1^2+y_1'^2-y_2'^2)dx$, $y_2(0)=0$, $y_1(0)=0$, $y_1(\frac{\pi}{4})=1$, $y_2(\frac{\pi}{4})=1$;

5) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{1}^{2}(y_1'+y_2+y_2'^2)dx$, $y_1(1)=1$, $y_1(2)=2$, $y_2(1)=0$, $y_2(2)=1$;

6) $F[y_1,y_2]=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y_1'y_2'-y_1y_2)dx$, $y_1(0)=0$, $y_1(\frac{\pi}{2})=1$, $y_2(0)=0$, $y_2(\frac{\pi}{2})=-1$;

7) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^1 (y_1'y_2'+6xy_1+12x^2y_2)dx$, $y_1(0)=0$, $y_1(1)=2$, $y_2(0)=0$, $y_2(1)=3$;

8) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2+2y_1)dx$, $y_1(0)=1$, $y_1(1)=\dfrac{3}{2}$, $y_2(0)=1$, $y_2(1)=1$.

Задание 3.

1) $F[y_1,y_2,y_3]=\int\limits_2^4 \sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2+y_3'^2}\,dx$, $y_1(2)=1$, $y_1(4)=3$, $y_2(2)=2$, $y_2(4)=4$, $y_3(2) = 5$, $y_3(4) = 9$;

2) $F[y_1, y_2]=\int\limits_0^3 \sqrt[3]{1+y_1'^2+y_2'^2}\,dx$, $y_1(0)=1$, $y_1(3)=7$, $y_2(0)=-2$, $y_2(3)=1$;

3) $F[y, z]=\int\limits_0^1 (y'^2+z'^2+2y)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=\dfrac{3}{2}$, $z(0)=0$, $z(1)=1$;

4) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2+4y_1^{\,2})dx$, $y_1(0)=0$, $y_1(1)=1$, $y_2(0)=0$, $y_2(1)=0$;

5) $F[y_1,y_2,y_3]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2+y_3'^2)dx$, $y_1(0)=0$, $y_2(0)=0$, $y_3(0)=0$, $y_1(\dfrac{\pi}{2})=1$, $y_3(\dfrac{\pi}{2})=-1$, $y_2(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}$;

6) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2+y_3'^2+2y_1y_2+2y_2y_3)dx$, $y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=0$, $y_1(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}$, $y_3(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{\pi}{2}$;

7) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^{\pi} (y_1'^2-y_2'^2+2y_1'y_2'+2y_1\cos x+2y_2')dx$, $y_1(0)=-1$, $y_1(\pi)=\pi+1$, $y_2(0)=0$, $y_2(\pi)=0$;

8) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^{\pi} (y_1'^2+y_2'^2-2y_1y_2+x^2)dx$, $y_1(0)=1$, $y_1(\pi)=-1$, $y_2(0)=1$, $y_2(\pi)=-1$.

Лабораторная работа № 8
Поле экстремалей

8.I. Основные теоретические сведения

Семейство кривых $y = y\,(x, C)$ образует *собственное поле* в заданной области D плоскости Oxy, если через каждую точку (x, y) этой области проходит одна и только одна кривая семейства $y = y\,(x, C)$ (рис.1).

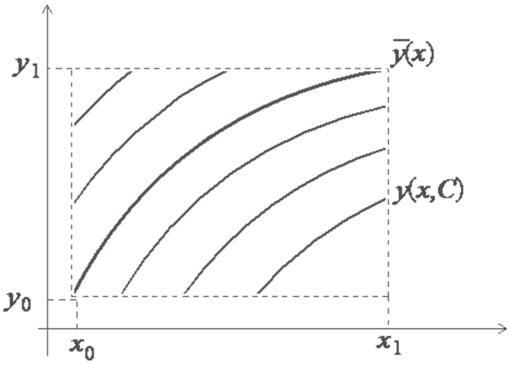

Рис. 1

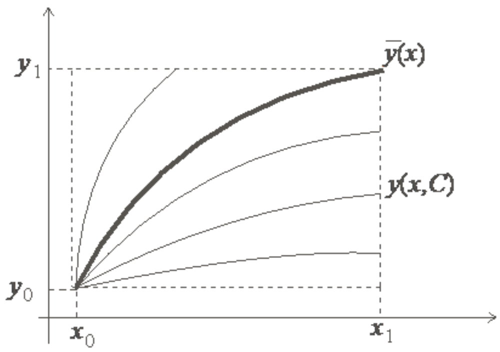

Рис. 2

Угловой коэффициент $p\,(x, y)$ касательной к кривой семейства $y = y\,(x, C)$, проходящей через точку (x, y) называют *наклоном поля* в точке (x, y).

Если все кривые семейства $y = y\,(x, C)$ проходят через некоторую точку (x_0, y_0), то они образуют *пучок кривых*, а точка (x_0, y_0) является *центром пучка кривых*.

Семейство кривых $y = y\,(x, C)$ образует *центральное поле* в области D плоскости Oxy, если кривые покрывают всю область и нигде не пересекаются, кроме центра пучка, который лежит на границе области D (рис.2).

В случае, если поле образуют решения уравнения Эйлера, то говорят о *поле экстремалей* (собственном или центральном).

Выбрав какую-то точку в области D, мы однозначно задаём экстремаль, проходящую через эту точку.

Пусть кривая $y = \bar{y}(x)$ является экстремалью функционала

$$F[y] = \int_{x_0}^{x_1} f\,(x, y, y')dx\,,$$

проходящей через точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Говорят, что экстремаль $y = \bar{y}\,(x)$ *включена в поле экстремалей* (собственное или центральное), если найдется семейство экстремалей $y = y\,(x, C)$, образующих поле, содержащее при некотором значении $C = C_0$

экстремаль $y = \bar{y}(x)$, причём эта экстремаль не лежит на границе области *D*.

Условие Якоби возможности включения экстремали в поле экстремалей. Пусть имеем простейшую вариационную задачу. Для того, чтобы дугу экстремали *AB* можно было включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(x_0, y_0)$, достаточно, чтобы существовало решение $u = u(x)$ уравнения Якоби

$$(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{yy'})u - \frac{d}{dx}(f''_{y'y'} \cdot u') = 0, \tag{8.1}$$

удовлетворяющее условию $u(x_0) = 0$, которое не обращается в нуль ни в одной точке полуинтервала $x_0 < x \le x_1$.

Замечание. Условие Якоби является и необходимым для достижения экстремума функционала $F[y]$.

Усиленное условие Лежандра. Достаточным условием для включения экстремали в поле экстремалей является выполнение неравенства $f''_{y'y'} > 0$ при всех $x \in [x_0, x_1]$.

8.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Образуют ли поле следующие семейства кривых в указанных областях:

1) $y = C\ln x$, $(x-3)^2 + (y-1)^2 \le 1$;

2) $y = (x+C)^2$, $x^2 + y^2 \le 1$;

3) $y = C(x-1)$, $x \ge 1$.

Решение.

1) Внутри круга $(x-3)^2 + (y-1)^2 \le 1$ семейство кривых $y = C\ln x$ образует собственное поле (рис. 3).

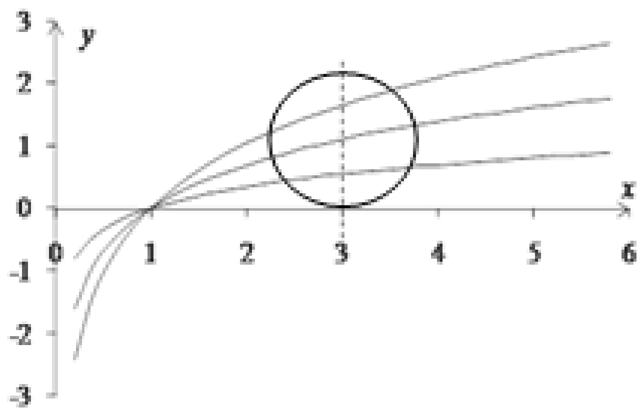

Рис. 3

2) Семейство парабол внутри круга $x^2 + y^2 \le 1$ собственного поля не образует, так как различные кривые пересекаются внутри круга и не покрывают всю область (рис. 4).

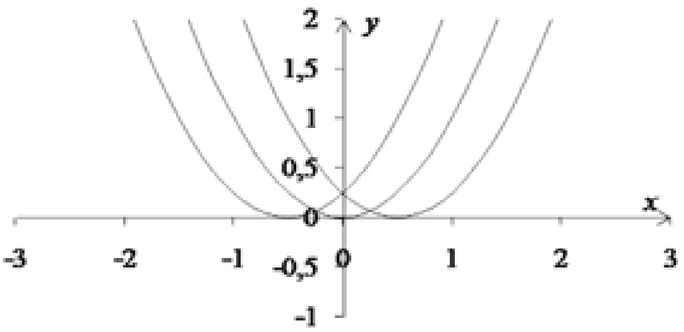

Рис. 4

3) Семейство прямых $y = C(x - 1)$ образует центральное поле в области $x > 1$.

***Пример* 2.** Образуют ли поле экстремали функционала $F[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx$?

Решение. Экстремалями функционала являются прямые $y = C_1 x + C_2$. Семейство экстремалей $y = C_2$ образует собственное поле, а семейство экстремалей $y = C_1 x$ образует центральное поле с центром в начале координат.

***Пример* 3.** Выполнимо ли условие Якоби для экстремали функционала $F[y] = \int\limits_0^a (y'^2 - 4y^2 + e^{-x^2}) dx$, $(a \ne (n + \frac{1}{2})\pi, a > 0)$, проходящей через точки $A(0,0)$ и $B(a,0)$?

Решение. Уравнение Якоби имеет вид: $u'' + 4u = 0$. Его общее решение $u(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Из условия $u(0) = 0$ находим, что $C_1 = 0$, так что $u(x) = C_2 \sin 2x$.

Если $a < \frac{\pi}{2}$, то функция $u(x) \ne 0$ при $0 < x \le a$ и условия Якоби выполнены. Если же $a \ge \frac{\pi}{2}$, то решение уравнения Якоби обращается в нуль в точке $x = \frac{\pi}{2}$ и условия Якоби не выполнены.

8.3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Образует ли поле (собственное или центральное) следующие семейства кривых в указанных областях. Сделать чертеж.

1) $y = C\cdot\cos x$; *а*) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$; *б*) $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$; *в*) $-\pi \le x \le \pi$;

2) $y = Cx + 1$; *а*) $x^2 + y^2 < 1$; *б*) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$; *в*) $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$;

3) $(x-C)^2 + y^2 = C^2$; *а*) $-1 < x < 1$; *б*) $0 \le x \le 1$; *в*) $0 < x \le 1$;

4) $y=C(x^2-2x)$; *а*) $0 \le x < 1$; *б*) $-1 \le x \le 3$; *в*) $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$;

5) $y=C\cdot\sin(x-\frac{\pi}{4})$; *а*) $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$; *б*) $\frac{\pi}{3} \le x \le \pi$; *в*) $\frac{\pi}{8} \le x \le 2\pi$;

6) $x^2 + Cy^2 = 4$; *а*) $x^2 + y^2 \le 2$; *б*) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$; *в*) область, лежащая внутри треугольника ABC, где A (2, 0), B (0, 2), C (0, 1);

7) $y = C(x^2 - x)$, *а*) $0 < x \le \frac{1}{2}$, *б*) $-1 \le x \le 2$, *в*) $\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}$;

8) $x^2 + (y-C)^2 = C^2$; *а*) $0 \le y < 1$; *б*) $-1 \le y \le 1$; *в*) $0 < y \le 1$.

Задание 2. Среди непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций найти экстремаль функционала, удовлетворяющую граничным условиям. Определить, включена ли найденная экстремаль в поле экстремалей (центральное или собственное): *а*) непосредственно; *б*) с помощью условия Якоби.

1) $\mathrm{F}[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + 2e^x y\right)dx$; $y(0) = 1$, $y(1) = e$;

2) $\mathrm{F}[y] = \int_0^1 y'^2 e^y dx$; $y(0) = 0$, $y(1) = \ln 4$;

3) $\mathrm{F}[y] = \int_0^a \left(-y'^2 + y^2\right)dx$; $y(0) = y(a) = 0, a > 0, a \ne k\pi$;

4) $\mathrm{F}[y] = \int_0^2 \left(y'^2 + x^2\right)dx$; $y(0) = 1$, $y(2) = 3$;

5) $F[y] = \int_0^1 (y + 2xy' + y'^2)dx$, $y(0) = -\frac{1}{4}$, $y(1) = 1$;

6) $\mathrm{F}[y] = \int_{-1}^1 \left(y'^2 + 12xy + x^2\right)dx$; $y(-1) = -2$, $y(1) = 0$;

7) $\mathrm{F}[y] = \int_0^a \left(y'^2 - 3x + 9y^2\right)dx$; $y(0) = y(a) = 0$;

8) $\mathrm{F}(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + 1\right)dx$; $y(0) = y(1) = 0$.

Лабораторная работа № 9
Достаточные условия экстремума функционала

9.1. Основные теоретические сведения

Достаточные условия Вейерштрасса.

Требуется найти экстремаль, на которой достигает экстремума функционал

$$F[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx, \tag{9.1}$$

где

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{9.2}$$

Функцией Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ называется функция, определяемая равенством

$$E(x, y, p, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p) f'_p(x, y, p), \tag{9.3}$$

где $p = p(x, y)$ – наклон поля экстремалей рассматриваемой вариационной задачи.

Достаточные условия слабого экстремума. Кривая C доставляет слабый экстремум функционалу (9.1) при граничных условиях (9.2), если:

а) кривая C является экстремалью функционала, удовлетворяющей граничным условиям (9.2);

б) экстремаль C может быть включена в поле экстремалей (выполнено условие Якоби или усиленное условие Лежандра);

в) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках (x, y) близких к экстремали C и для близких к $p(x, y)$ значений y'.

Функционал $F[y]$ будет иметь максимум на C, если $E \le 0$, и минимум, если $E \ge 0$.

Достаточные условия сильного экстремума. Кривая C доставляет сильный экстремум функционалу (9.1), если:

а) кривая C является экстремалью функционала, удовлетворяющей граничным условиям (9.2);

б) экстремаль C может быть включена в поле экстремалей (выполнено условие Якоби или усиленное условие Лежандра);

в) Функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках (x, y), близких к экстремали C и для произвольных значений y'.

При $E \le 0$ будет максимум, а при $E \ge 0$ минимум.

Достаточные условия Лежандра для функционала $F[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$**.**

Пусть экстремаль *C* включена в поле экстремалей.

Если на экстремали *C* имеем $f_{y'y'} > 0$, то на кривой достигается слабый минимум, если $f_{y'y'} < 0$ на экстремали *C*, то на ней достигается слабый максимум.

В том случае, когда $f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ в точках (x, y), близких к экстремали *C* при произвольных значениях y', то имеем сильный минимум; если $f_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$, то имеем сильный максимум.

Эти условия называются *усиленными условиями Лежандра*.

9.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Исследовать на экстремум функционал*

$$F[y] = \int\limits_0^1 (y'^3 + y')dx, \quad y(0) = 0, \ y(1) = 2.$$

Решение. Так как $f = f(y')$, то экстремалями являются прямые линии $y = C_1 x + C_2$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y = 2x$. Очевидно, что данная экстремаль может быть включена в центральное поле экстремалей $y = Cx$ с центром в точке $O(0, 0)$.

Составим функцию Вейерштрасса:

$$E(x, y, p, y') = y'^3 + y' - p^3 - p - (y' - p)(3p^2 + 1) = (y' - p)^2 (y' + 2p).$$

Первый множитель функции Вейерштрасса всегда неотрицателен, а второй положителен при y' близких к $p = 2$, где $p = 2$ угловой коэффициент экстремали $y = 2x$. Условия существования слабого минимума выполнены. Если же взять $y' < -4$, то $y' + 2p < 0$ и функция Вейерштрасса не сохраняет свой знак. Значит, сильного минимума нет.

***Пример* 2.** *Исследовать на экстремум функционал*

$$F[y] = \int\limits_0^1 (3x^2 + 2y + \frac{1}{2} y'^2)\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид $y'' = 2$. Экстремалями является параболы $y = x^2 + C_1 x + C_2$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y = x^2 - x$.

Составляем уравнение Якоби: $u''=0$. $u=C_1x+C_2$ – общее решение уравнения Якоби. Из условия $u(0)=0$ получаем, что $C_2=0$. Функция $u=C_1x$ при $C_1\neq 0$ нигде, кроме точки $x=0$, в нуль не обращается. Это означает, что условие Якоби выполнено и экстремаль можно включить в центральное поле экстремалей, а именно в поле $y=x^2+Cx$ с центром в точке $O(0;0)$.

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x,y,p,y')=\frac{1}{2}(y'-p)^2$$

Для произвольного y' будет $E\geq 0$, следовательно, функционал достигает сильного минимума.

9.3. Задания для лабораторной работы

Исследовать на экстремум следующие функционалы: *а*) пользуясь функцией Вейерштрасса; *б*) пользуясь условием Лежандра:

1) $\mathrm{F}[y]=\int_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx$; $y(0)=1,\ y(1)=2$.

2) $\mathrm{F}[y]=\int_0^1\left(y'^2e^y\right)dx$; $y(0)=0,\ y(1)=\ln 4$;

3) $\mathrm{F}[y]=\int_1^2\left(\frac{x^3}{y'^2}\right)dx$; $y(0)=1,\ y(1)=1,\ y(2)=4$;

4) $\mathrm{F}[y]=\int_0^a\frac{dx}{y'}$; $y(0)=0$, $y(a)=c, a>0,\ c>0$;

5) $F[y]=\int_0^2(y'^3+3)dx,\ y(0)=0,\ y(2)=1;$

6) $\mathrm{F}[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2-y'^2)dx$; $y(0)=1$, $y(\frac{\pi}{2})=1$;

7) $\mathrm{F}[y]=\int_{-1}^2(1+x^2y')y'dx$; $y(-1)=1,\ y(2)=4$;

8) $\mathrm{F}[y]=\int_{-1}^1(y'^2+y'^3)dx$; $y(-1)=-1,\ y(1)=3$.

Лабораторная работа № 10
Экстремали с угловыми точками

10.1. Основные теоретические сведения

Пусть функция $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные по всем переменным до второго порядка включительно на множестве $a \le x \le b$, $-\infty < y, y' < +\infty$. Стоит задача среди всех функций $y(x) \in C[a, b]$ и удовлетворяющим граничным условиям

$$y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{10,1}$$

найти ту функцию, на которой достигается слабый экстремум функционала

$$F[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')dx. \tag{10,2}$$

Предположим, что множество допустимых функций $y(x)$ представляет из себя множество непрерывных функций, имеющих на $[a, b]$ непрерывную производную всюду, за исключением конечного числа точек, в которых производная терпит разрыв первого рода, т.е $y(x)$ – кусочно-гладкие функции. Если допустимая функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу (10.2), то выполняются следующие условия:

1) на промежутках, где производная $y'(x)$ непрерывна, данная функция удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$f_y' - \frac{d}{dx} f_{y'}' = 0;$$

2) в угловых точках $x_1, \ldots, x_k$ выполняются условия Вейерштрасса – Эрдмана:

$$f'_{y'}\big|_{x = x_i - 0} = f'_{y'}\big|_{x = x_i + 0},\ (i = \overline{1, k}),$$

$$(f - y'f'_{y'})\big|_{x = x_i - 0} = (f - y'f'_{y'})\big|_{x = x_i + 0},\ (i = \overline{1, k}).$$

Замечание. Изломы экстремали возможны лишь в случае, если $f''_{y'y'} = 0$.

10.2. Примеры решения задач

Пример. Найти экстремали с угловой точкой для функционала

$$F[y] = \int_0^2 y'^2 (y' - 1)^2 dx,\ y(0) = 0,\ y(2) = 1\ .$$

Решение. Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x, y, y') = y'^2(y'-1)^2$. Проверим, могут ли быть экстремали с угловыми точками. Найдем производные функции $f(x, y, y')$:

$$f'_{y'} = 2\,y'\,(y'-1)^2 + 2y'^2(y'-1) = 2y'(y'-1)(2y'-1) = 4y'^3 - 6y'^2 + 2y',$$
$$f''_{y'y'} = 12y'^2 - 12y' + 2 \ .$$

$f''_{y'y'}$ может обращаться в нуль и поэтому возможно наличие изломов экстремали. Так как подынтегральная функция зависит только от y',то экстремалями являются прямые $y = C_1x + C_2$. Положим

$$y = \begin{cases} C_1x + C_2, \text{ при } 0 \le x \le x_1; \\ C_3x + C_4, \text{ при } x_1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(x_1 – возможная точка излома экстремали). Из граничных условий находим $C_2 = 0$, $C_4 = 1 - 2C_3$.

Экстремали имеют вид

$$y = \begin{cases} C_1x \text{ , при } 0 \le x \le x_1; \\ C_3(x-2)+1, \text{ при } x_1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Выпишем условия Вейерштрасса — Эрдмана:

$$f'_{y'} = 2y'\,(y'-1)(2y'-1) \ , \qquad f - y'f'_{y'} = y'^2(y'-1)(1-3y') \ .$$

$$\begin{cases} 2y'\,(y'-1)(2y'-1)_{|x=x_1-0} = 2y'\,(y'-1)(2y'-1)_{|x=x_1+0} \\ y'^2(y'-1)(1-3y')_{|x=x_1-0} = y'^2(y'-1)(1-3y')_{|x=x_1+0} \end{cases}.$$

Отсюда следуют варианты:

а) $y'(x_1 - 0) = y'(x_1 + 0)$;
б) $y'(x_1 - 0) = 0$, $y'(x_1 + 0) = 1$;
в) $y'(x_1 - 0) = 1$, $y'(x_1 + 0) = 0$.

В случае *а*) имеем гладкие экстремали $y = C_1 x + C_2$. Из граничных условий $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{1}{2}$, т.е. $y = \frac{1}{2}x$ – гладкая экстремаль.

б) $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $y = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ x-1, \text{ при } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Из условия непрерывности следует, что $x_1 - 1 = 0$, $x_1 = 1$.

в) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $y = \begin{cases} x, \text{ при } 0 \le x \le x_1; \\ 1, \text{ при } x_1 \le x \le 2. \end{cases}$

Из условия непрерывности $x_1 = 1$, следовательно, $y = \begin{cases} x, \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ 1, \text{ при } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Таким образом, в поставленной задаче имеются 3 экстремали: одна гладкая и две негладкие.

10.3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Найти экстремали с угловой точкой для функционала:

1) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (1 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = 2, \; y(2) = 5;$

2) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (9 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = 0, \; y(2) = 5;$

3) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (3 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = 0, \; y(2) = 4;$

4) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (2 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = 3, \; y(2) = 1;$

5) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (12 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = 2, \; y(2) = 0;$

6) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (16 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = 1, \; y(2) = 3;$

7) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (7 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = -1, \; y(2) = 2;$

8) $F[y] = \int_0^2 y'^2 (8 - y')^2 \, dx, \quad y(0) = -2, \; y(2) = 2.$

Задание 2. Найти экстремали с угловой точкой для функционала:

1) $F[y] = \int_0^2 (y'^4 - 6y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \; y(2) = 0;$

2) $F[y] = \int_0^4 (y' - 1)^2 \; (y' + 1)^2 dx, \quad y(0) = 0, \; y(4) = 2;$

3) $F[y] = \int_{-1}^1 y^2 \; (1 - y'^2) dx, \quad y(-1) = 0, \; y(1) = 1;$

4) $F[y] = \int_0^3 (y'^2 - 1)^2 dx, \quad y(0) = y(3) = 0;$

5) $F[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2yy' + y^2) dx, \quad y(0) = 0, \; y(1) = 1;$

6) $F[y] = \int_0^2 (y'^4 - 8y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \; y(2) = 4;$

7) $F[y] = \int_0^2 (y'^4 - 10y'^2) dx, \quad y(0) = 2, \; y(2) = 0;$

8) $F[y] = \int_0^2 (y'^4 - 12y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \; y(2) = 2.$

Лабораторная работа № 11
Задачи с подвижными границами

11.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим функционал

$$F[y]=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx, \tag{11.1}$$

определенный на гладких кривых $y=y(x)$, концы которых $A\,(x_0, y_0)$ и $B\,(x_1, y_1)$ лежат на линиях

$$y=\varphi(x) \text{ и } y=\psi(x), \tag{11.2}$$

так что $y_0=\varphi(x_0)$ и $y_1=\psi(x_1)$. Требуется найти экстремум функционала (11.1).

Если кривая $y=y(x)$ доставляет экстремум функционалу (11.1) при выполнении условий (11.2), то

1) функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера;

2) выполняются условия трансверсальности

$$(f+(\varphi'-y')f'_{y'})_{x=x_0}=0,$$
$$(f+(\psi'-y')f'_{y'})_{x=x_1}=0. \tag{11.3}$$

Итак, для решения задачи с подвижными границами нужно:

1) написать и решить соответствующее уравнение Эйлера. В результате получим семейство экстремалей $y=y(x, C_1, C_2)$, зависящее от двух параметров C_1 и C_2.

2) из условий трансверсальности (11.3) и условий

$$\begin{cases} y(x_0,C_1,C_2)=\varphi(x_0), \\ y(x_1,C_1,C_2)=\psi(x_1) \end{cases} \tag{11.4}$$

определить постоянные C_1 и C_2 и абсциссы x_0 и x_1 точек A и B;

3) вычислить экстремум функционала.

Замечание 1. Если одна из граничных точек, например, $A\,(x_0, y_0)$ закреплена, а вторая перемещается вдоль кривой $y=\psi(x)$, так что $y_1=\psi(x_1)$, то постоянные C_1 и C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y(x_1,C_1,C_2)=\psi(x_1) \end{cases}$$

Замечание 2. Если одна из граничных точек может перемещаться только по вертикальной прямой $x=x_1$, то условие трансверсальности для этой точки принимает вид $\left.f'_{y'}\right|_{x=x_1}=0$.

Замечание 2. Если одна из граничных точек может перемещаться только по горизонтальной прямой $y=y_1$, то условие трансверсальности для этой точки принимает вид $(f-y'f'_{y'})_{x=x_1}=0$.

11.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти расстояние между параболой $y = 4x^2$ и прямой $y = 2x - 10$.

Решение. Задача сводится к нахождению экстремума функционала $F[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой $y = 4x^2$, а правый – по прямой $y = 2x - 10$.

Так как $f(x, y, y') = f(y')$, то общее решение уравнения Эйлера имеет вид $y = C_1x + C_2$.

Условия трансверсальности (11.3):

$$\begin{cases} \left.\left(\sqrt{1+y'^2} + \dfrac{(8x-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\right|_{x=x_0} = 0, \\ \left.\left(\sqrt{1+y'^2} + \dfrac{(2-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\right|_{x=x_1} = 0. \end{cases}$$

Упростив эти уравнения, получим $\begin{cases} (1+8xy')\big|_{x=x_0} = 0, \\ (1+2y')\big|_{x=x_1} = 0. \end{cases}$

Условия (11.4) имеют вид $\begin{cases} C_1x_0 + C_2 = 4x_0^2, \\ C_1x_1 + C_2 = 2x_1 - 10. \end{cases}$

Так как $y' = C_1$, то получим

$$\begin{cases} 1 + 8x_0C_1 = 0, \\ 1 + 2C_1 = 0. \\ C_1x_0 + C_2 = 4x_0^2, \\ C_1x_1 + C_2 = 2x_1 - 10. \end{cases}$$

Решением данной системы будут числа $C_1 = -\dfrac{1}{2}$, $C_2 = \dfrac{3}{8}$, $x_0 = \dfrac{1}{4}$, $x_1 = 3\dfrac{8}{25}$.

Значит, экстремалью функционала $F[y]$ является прямая $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}$, а расстояние между данными линиями равно $l = \int_{\frac{1}{4}}^{3\frac{8}{25}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}^2}\,dx = \dfrac{307\sqrt{5}}{200}$.

11.3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Найти допустимые экстремали функционала $F[y]$, если левая граничная точка (x_0, y_0) закреплена так, что $y(0) = 0$, а правая (x_1, y_1) перемещается по линии $y_1 = \psi(x_1)$:

1) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$, если $y_1 = x_1 - 3$;

2) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} y'^2 dx$, если $y_1 = x_1 + 1 = 0$;

3) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} (-2y + y'^2) dx$, если $y_1 = -2$;

4) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$, , если $x_1 - y_1 = 1$;

5) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$, , если $(x_1 - 9)^2 + y_1^2 = 9$;

6) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} y'^2 dx$, если $y_1^2 - x_1^2 = 1$;

7) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$, если $y_1 = x_1 - 5$;

8) $F[y] = \int\limits_0^{1} (y'^2 - y + 1) dx$, если $x_1 = 1$.

Задание 2. Найти допустимые экстремали в следующих задачах:

1) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} y'^3 dx$, $y(0) = 0$, $y(x_1) = 1 - x_1$;

2) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} (xy' + y'^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(x_1) = 1$;

3) $F[y] = \int\limits_0^{1} (y'^2 + y) dx$, $y(1) = 0$, $x_0 = 0$;

4) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} (2xy + yy' + y'^2) dx$, $y(0) = 0$; $y(x_1) = 3$;

5) $F[y] = \int\limits_0^{x_1} y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $(x_1 - 1) y^2(x_1) + 2 = 0$;

6) $F[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx$, $y(0) = 0$, если другая граничная точка может скользить по прямой $x = \frac{\pi}{4}$;

7) $F[y]=\int\limits_1^e(2y-x^2y'^2)dx$, $y(1)=e$, $x_1=e$;

8) $F[y]=\int\limits_0^{x_1}(yy'+y'^2+1)dx$, $y(0)=1$, $y(x_1)=-3$.

Задание 3. Найти кратчайшее расстояние

1) от точки A (1, 0) до эллипса $4x^2+9y^2=36$;

2) между окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$;

3) от точки $A(-1,5)$ до параболы $x=y^2$;

4) от точки $A(-1,3)$ до прямой $y=1-3x$;

5) между прямой $y=x$ и параболой $y=x^2$;

6) от точки A (1, 1) до эллипса $4x^2+9y^2=36$;

7) от точки $A(-1,5)$ до параболы $y=x^2$;

8) между окружностью $x^2+y^2=4$ и прямой $x+y=6$.

Лабораторная работа № 12
Условный экстремум функционала

12.1. Основные теоретические сведения

Пусть

$$G=\{\bar y(x)\,|\,\bar y=(y_1,\dots,y_n),\quad y_i(x)\in C^1[a,b],\ i=\overline{1,n},$$
$$\bar y(a)=(y_1^0,\dots,y_n^0),\quad \bar y(b)=(y_1^1,\dots,y_n^1)\}.$$

Рассмотрим на множестве G функционал

$$F[y]=\int\limits_a^b f(x,y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n')dx. \tag{12.1}$$

Будем считать, что функция f в заданной области изменения своих переменных дифференцируема по каждой переменной нужное число раз. Стоит задача найти экстремум функционала (12.1) при условиях

$$f_i(x,y_1,\dots,y_n)=0,\ i=\overline{1,m},\quad m<n. \tag{12.2}$$

Данная задача называется _задачей на условный экстремум с конечными связями_. В механике они называются _голономными_.

Предполагается, что уравнения (12.2) независимы, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}\dfrac{df_1}{dx_1} & \dots & \dfrac{df_1}{dx_n}\\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ \dfrac{df_m}{dx_1} & \dots & \dfrac{df_m}{dx_n}\end{bmatrix}=m,$$

а также связи (12.2) согласованы с граничными условиями. Последнее означает, что граничные точки должны удовлетворять уравнениям (12.2) при $x = a$ и $x = b$.

Известно, что если $\bar{y}(x) \in G$ удовлетворяет уравнениям связи (12.2) и дает экстремум функционалу (12.1), то существуют функции $\lambda_i(x),\ i = \overline{1, m}$, такие что вектор-функция $\bar{y}(x)$ является экстремалью функционала

$$\Phi[y] = \int_a^b (f + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) f_i) dx = \int_a^b L(x, \bar{y}, \bar{y}') dx. \qquad (12.3)$$

Функции $\lambda_i(x)$ называют <u>*множителями Лагранжа*</u>, а функцию $L(x, \bar{y}, \bar{y}') = f(x, \bar{y}, \bar{y}') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) f_i(x, \bar{y})$ – <u>*функцией Лагранжа*</u>.

Для того чтобы определить экстремум функционала (12.1) при условиях (12.2) нужно:

1) записать систему уравнений Эйлера для функционала (12.3)

$$L'_{y_i} - \frac{d}{dx} L'_{y'_i} = 0, \quad (i = \overline{1, n});$$

2) дополнить эту систему уравнениями связи (12.2);

3) из полученной совокупности уравнений найти $y_i(x)$ и $\lambda_i(x)$;

4) далее из граничных условий найти произвольные постоянные.

Замечание. Рассмотренный метод нахождения условного экстремума функционала (1) справедлив и в случае дифференциальных связей

$$f_i(y_1(x), ..., y_n(x), y'_1(x), ..., y'_n(x)) = 0 \quad (i = \overline{1, m}), \ m < n.$$

В механике такие связи называют <u>*неголономными*</u>.

12.2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти экстремаль функционала

$$F[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2) dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1. \qquad y_1(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad y_2(\frac{\pi}{2}) = -1$$

и уравнению связи $y_1 - y_2 - 2\cos x = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$L = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \lambda(x)(y_1 - y_2 - 2\cos x).$$

Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$L'_{y_1} = 2y_1 + \lambda(x), \quad L'_{y'_1} = -2y'_1, \quad L'_{y_2} = 2y_2 - \lambda(x), \quad L'_{y'_1} = -2y'_2,$$

то

$$\begin{cases} 2y_1 + \lambda(x) + 2y_1'' = 0, \\ 2y_2 - \lambda(x) + 2y_2'' = 0, \\ y_1 - y_2 - 2\cos x = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы. Складывая первые два уравнения системы, получаем

$$2(y_1'' + y_2'') + 2(y_1 + y_2) = 0.$$

Вводя обозначение $y_1 + y_2 = z(x)$, имеем $z'' + z = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$.

$z(t) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, т.е. $y_1 + y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Из уравнения связи получаем $y_1 - y_2 = 2\cos x$. Складывая два последних уравнения, имеем

$$2y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2\cos x, \text{ или } y_1 = \frac{C_1}{2}\cos x + \frac{C_2}{2}\sin x + \cos x.$$

Тогда

$$y_2 = y_1 - 2\cos x = \tfrac{C_1}{2}\cos x + \tfrac{C_2}{2}\sin x - \cos x,$$

$$\lambda(x) = 2y_2 + 2y_2'' = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2\cos x +$$
$$+ (-C_1 \cos x - C_2 \sin x + 2\cos x) = 0.$$

Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$$\begin{cases} y_1(0) = \dfrac{C_1}{2} + 1 = 1, \\ y_1(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{C_2}{2} = 1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0,\ C_2 = 2$, $y_1 = \sin x + \cos x$, $y_2 = \sin x - \cos x$.

12.3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Найти экстремали функционала $F[y_1, y_2]$, удовлетворяющие указанным ниже граничным условиям и уравнениям связи.

1) $F[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 (y_1'^2 + 2y_1 y_2 + y_2'^2)dx$, $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1(1) = e$, $y_2(1) = \dfrac{1}{e}$, условие связи: $y_1 - y_2 - e^x + e^{-x} = 0$;

2) $F[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2)}\, dx$, $y_1(0) = y_2(1) = 1$, $y_1(1) = 2$, $y_2(0) = 1$, условие связи: $2y_1 - y_2 - 3x = 0$;

3) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^1 \sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}\,dx$, $y_1(0)=y_2(1)=-1$, $y_1(1)=0$, $y_2(0)=1$, условие связи: $x+y_1+y_2=0$;

4) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2)\,dx$, $y_1(0)=y_1(1)=-1$, $y_2(0)=0$, $y_2(1)=1$, условие связи: $y_1+y_2-2x^2+x+1=0$;

5) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2+1)\,dx$, $y_1(0)=y_2(0)=y_2(1)=0$, $y_1(1)=2$, условие связи: $y_1+y_2-2x^2=0$;

6) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2+x^2)\,dx$, $y_1(0)=y_2(1)=2$, $y_1(1)=y_2(0)=1$, условие связи: $y_1-2y_2+3x=0$;

7) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2+y_2'^2-y_1^2-y_2^2-\cos x)\,dx$, $y_1(0)=y_2(0)=y_1(\frac{\pi}{2})=1$, $y_2(\frac{\pi}{2})=-1$, условие связи: $y_1-y_2-2\sin x=0$;

8) $F[y_1,y_2]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1'^2+y_2'^2-y_1^2-y_2^2)\,dx$, $y_1(0)=y_2(0)=y_1(\frac{\pi}{2})=1$, $y_2(\frac{\pi}{2})=-1$, условие связи: $y_1-y_2-2\cos x=0$.

Задание 2.

1) найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, -1)$ и $B(0, -1, 1)$, лежащими на поверхности $x+y+z=0$;

2) найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, 1)$ и $B(0, 1, 1)$, лежащими на поверхности $x+y+z=2$;

3) найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, -1, 0)$ и $B(2, 1, -1)$, лежащими на поверхности $15x-7y+z=22$;

4) найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, -4)$ и $B(0, 1, -3)$, лежащими на поверхности $2x+3y-z=6$;

5) Найти кратчайшее расстояние между точками $A(2, 0, 1)$ и $B(0, 2, 1)$, лежащими на поверхности $x+y+2z=4$;

6) Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, 2)$ и $B(0, -1, 3)$, лежащими на поверхности $3x-2y+z=5$;

7) Найти кратчайшее расстояние между точками $A(2, 0, 1)$ и $B(0, -4, 3)$, лежащими на поверхности $2x+y+4z=8$;

8) Найти кратчайшее расстояние между точками $A\,(1, 0, -\frac{8}{3})$, $B\,(0, 3, -5)$, лежащими на поверхности $4x-y-3z=12$.

Лабораторная работа № 13
Изопериметрическая задача

13.1. Основные теоретические сведения

Пусть задан функционал

$$F[y_1,\ldots,y_n] = \int_a^b f(x, y_1,\ldots, y_n, y'_1,\ldots, y'_n)dx \qquad (13.1)$$

с граничными условиями

$$y_j(a) = y_j^0,\ \ y_j(b) = y_j^{(1)}\ \ (i=\overline{1,n}). \qquad (13.2)$$

Стоит задача найти экстремум функционала (13.1) с граничными условиями (13.2) при дополнительных условиях

$$\int_a^b f_i(x, y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_n)dx = C_i,\ (i=\overline{1,m}). \qquad (13.3)$$

Задача (13.1)–(13.3) называется *изопериметрической задачей*.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_n, \lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x, y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_n) +$$
$$+\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_n),$$

где множители Лагранжа $\lambda_i\ (i=\overline{1,m})$ являются произвольными действительными числами.

Известно, что если функции, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ доставляют экстремум функционалу (13.1) при условиях (13.2) и (13.3), то существуют числа $\lambda_i (i=\overline{1,m})$ (множители Лагранжа), при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$L'_{y_j} - \frac{d}{dx}(L'_{y'_j}) = 0,\ \ (j=\overline{1,n}).$$

Для нахождения произвольных постоянных и множителей Лагранжа пользуются граничными условиями (13.2) и условиями (13.3).

13.2. Примеры решения задач

Пример. Найти минимум функционала $F[y] = \int_0^\pi y'^2(x)dx$, при условиях $y(0)=1,\ y(\pi)=0,\ \int_a^\pi y\sin x dx = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Запишем функцию Лагранжа $L = y'^2 + \lambda y \sin x$.

Тогда $L'_y = \lambda \sin x$, $L'_{y'} = 2y'$. Уравнение Эйлера имеет вид $\lambda \sin x - 2y'' = 0$ или $y'' = \frac{\lambda}{2}\sin x$. Получаем, что $y' = -\frac{\lambda}{2}\cos x + C_1$, $y = -\frac{\lambda}{2}\sin x + C_1 x + C_2$.

Для определения множителя Лагранжа воспользуемся условием $\int_0^{\pi} y\sin x dx = \frac{\pi}{2}$. Имеем $\int_0^{\pi}(-\frac{\lambda}{2}\sin^2 x + C_1 x\sin x + C_2\sin x)dx = \frac{\pi}{2}$.

Вычислив интеграл, получаем $-\frac{\pi}{4}\lambda + C_1\pi + 2C_2 = \frac{\pi}{2}$.

Из граничных условий имеем

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1\pi + C_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_2 = -\frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

Тогда $-\frac{\pi}{4}\lambda - 1 + 2 = \frac{\pi}{2}$, $\quad \frac{\pi}{4}\lambda = 1 - \frac{\pi}{2}$, $\quad \lambda = \frac{2(2-\pi)}{\pi}$.

Итак, функционал может достигать экстремума на линии $y(x) = \frac{2-\pi}{\pi}\sin x - \frac{x}{\pi} + 1$.

13.3. Задания для лабораторной работы

Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала $F[y_1,...,y_n]$.

Задание 1.

1) $F[y] = \int_0^1 y'^2\, dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$, $\int_0^1 y(x)dx = 3$;

2) $F[y] = \int_0^{\pi} y\sin x dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$, $\int_0^{\pi} y'^2\, dx = \frac{3\pi}{2}$;

3) $F[y] = \int_0^1 y'^2\, dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 5$, $\int_0^1 xy\, dx = 1$;

4) $F[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin x dx = 1$;

5) $F[y] = \int_0^1 y'^2\, dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int_0^1 ydx = 1$, $\int_0^1 xydx = 0$;

6) $F[y_1, y_2] = \int_0^1 x(y_1 - y_2)dx$, $y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0$, $y_1(1) = 2$, $\int_0^1 y'_1\, y'_2\, dx = -\frac{4}{5}$;

7) $F[y_1, y_2] = \int_0^1 y_1' y_2'\, dx$, $y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 1$, $\int_0^1 xy_1 dx = 0$, $\int_0^1 xy_2 dx = 0$;

8) $F[y_1, y_2] = \int_0^1 y_1' y_2' dx$, $y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0$, $y_2(1) = 1$, $\int_0^1 y_1 dx = 1$, $\int_0^1 y_2 dx = 0$.

Задание 2.

1) $F[y] = \int_{-1}^{1} y\sqrt{1+y'^2}dx$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$, $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}dx = 5$;

2) $F[y] = \int_0^1 y'^2\, dx$, $y(0) = 2$, $y(1) = -14$, $\int_0^1 ydx = -\frac{3}{2}$, $\int_0^1 xy\, dx = -2$;

3) $F[y] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, $\int_0^{\pi} y\cos xdx = 1$;

4) $F[y] = \int_0^{\pi} y'^2\, dx$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = 0$, $\int_0^{\pi} y\cos xdx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\pi} y\sin xdx = \pi + 2$;

5) $F[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)dx$, $y(0) = z(0) = 0$, $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ при условии $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2 dx = 2$;

6) $F[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{4}$ при условии $\int_0^1 (y - y'^2)dx = 0$;

7) $F[y] = \int_0^1 (x^2 + y'^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ при условии $\int_0^1 y^2 dx = 2$;

8) $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$ при условии $\int_0^1 ydx = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карташев, А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. — Москва: Наука, 1980. — 287 с.
2. Краснов, М.Л. Вариационное исчисление / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. — Москва: Наука, 1973. — 191 с.
3. Толпегин, О.А. Математическое программирование. Вариационное исчисление: учебное пособие для вузов / О.А. Толпегин. — Москва: ЮРАЙТ, 2023. — 233 с.
4. Сурин, Т.Л. Основы вариационного исчисления: упражнения и задания / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. — Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. — 40 с.
5. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. — 5-е изд. — Москва: Едиториал УРСС, 2002. — 319 с.