УДК 512.542

# О теории фиттинговых функторов конечных групп

**Е.А. Витько**

*Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Будем проводить все исследования в некотором непустом классе конечных групп $\mathfrak{U}$, замкнутом относительно операций S, Q, $N_0$.

Одни из первых результатов, относящиеся к теории функторов, были получены Барнесом, Кегелем [2] и Зудброком [3]. В указанных работах изучались понятия силовского функтора и функтора Гашюца. Понятие фиттингова функтора в общем случае было введено Бедлеманом, Брюстером и Хауком в работе [4], в которой впервые фиттинговы функторы использовались для построения классов Фиттинга. В частности, была определена конструкция класса $L_\pi f$ всех тех групп, в которых $f$-подгруппа имеет π´-индекс, и доказано, что класс $L_\pi f$ является классом Фиттинга для любого фиттингова функтора $f$. Галледжи [5] в терминах класса $L_\pi f$ описаны радикалы групп для классов Фиттинга, заданных посредством фиттинговых функторов. Вместе с тем функторный подход и его приложения к описанию радикалов ограничивались лишь случаем, когда универсум $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп. В связи с этим актуальна задача расширения указанных результатов на случай классов частично разрешимых или произвольных конечных групп. Реализации такой задачи и посвящена настоящая работа.

**Предварительные сведения.** Вначале мы приведем определения некоторых известных ранее понятий и утверждения, которые мы будем использовать.

Напомним что, классом Фиттинга называется класс $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы $G$ называется ее $\mathfrak{F}$-радикалом, если она является максимальной из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы $G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-инъектором, если для каждой субнормальной подгруппы $K$ группы $G$ пересечение $H \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в $K$.

Если π($G$) – множество всех простых делителей порядка группы $G$, то множество π($\mathfrak{F}$) определяется как объединение всех таких π($G$), что $G \in \mathfrak{F}$.

**Лемма 1.1** [6]. *Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в π-разрешимой группе $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

---

***Адрес для корреспонденции:*** г. Витебск, ул. 2-я Заречная, д. 2, кор. 1, кв. 59, e-mail: alenkavit@tut.by – Витько Е.А.

Подгруппа $H$ называется холловой π-подгруппой, если порядок $| H |$ есть π-число, а индекс $| G : H |$ есть π´-число.

**Лемма 1.2** [7]. *Пусть G – π-разрешимая группа, тогда холловы π-подгруппы в группе G существуют, и любые две холловы π-подгруппы группы G сопряжены между собой.*

Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех π-разрешимых групп, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – множество простых чисел, $G_{\pi}$ – холлова π-подгруппа группы $G$, тогда ввиду лемм 1.1 и 1.2 непосредственной проверкой можно установить, что следующие классы групп являются классами Фиттинга.

1) для произвольного множества простых чисел π классы

$$K_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : G_{\pi} \in \mathrm{F}),$$

$$R_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : G_{\pi} \subseteq G_{\mathrm{F}});$$

2) в случае, когда $\pi = \pi \ \mathrm{F}$ , классы групп

$$L_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : |G : V| \text{ – π´-число для всех } V \in \mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}(G));$$

$$L'_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : G_{\pi} \trianglelefteq V \text{ для некоторого } V \in \mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}(G)).$$

**Лемма 1.3** [6].. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, V – $\mathfrak{F}$-инъектор π-разрешимой $\pi = \pi(\mathrm{F})$ группы G. Если $V \le A \le G$, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы A.*

**Функторный метод построения классов Фиттинга.** Пусть *f(G)* – некоторая система подгрупп группы *G*. Если $\beta : G \to \beta \ G$ – изоморфизм, то через $\beta \ f(G)$ обозначим множество $\beta \ X \ | X \in f \ G$ всех образов в $\beta \ G$ подгрупп из *f(G)*. Если *N* – подгруппа группы *G*, то через $f(G) \bigcap N$ обозначим множество $X \bigcap N \mid X \in f(G)$ .

Следуя [4], введем

**Определение 2.1.** а) *Пусть $G \in \mathrm{U}$, отображение f, которое каждой группе G ставит в соответствие некоторое множество ее подгрупп f(G), называется фиттинговым функтором, когда выполняются следующие условия:*

*(1) если $\beta : G \to \beta \ G$ – изоморфизм, то $\beta \ f(G) = f \ \beta \ G$ ;*

*(2) если $N \trianglelefteq G$, то $f \ G \ \bigcap N = f \ N$ .*

б) *Фиттингов функтор называется сопряженным, если для каждой группы G, множество f(G) есть класс сопряженных подгрупп.*

**Примеры.** 1) Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, $\mathrm{Rad}_{\mathrm{F}} \ G = G_{\mathrm{F}}$ , тогда $\mathrm{Rad}_{\mathrm{F}}$ является сопряженным фиттинговым функтором. Если $\mathrm{F} = \mathrm{S}_{\pi}$, то фиттингов функтор $\mathrm{Rad}_{\mathrm{F}}$ будем обозначать через $\mathrm{Rad}_{\pi}$.

2) Пусть $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$. Если $\mathrm{Hall}_{\pi}(G) = \{G_{\pi} : G_{\pi}$ – холлова π-подгруппа группы $G\}$, то ввиду леммы 1.1 $\mathrm{Hall}_{\pi}$ является сопряженным фиттинговым функтором.

3) Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, $\pi = \pi \ \mathrm{F}$ и класс $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$. Если

$$\mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}(G) = \{X : X \text{ – } \mathfrak{F}\text{-инъектор группы } G\},$$

то вследствие леммы 1.2 $\mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}$ является сопряженным фиттинговым функтором.

**Лемма 2.2.** *Пусть f и g – фиттинговы функторы, положим*

$$f \circ g \ (G) = \{X : X \in f(Y) \text{ для некоторой подгруппы } Y \in g(G)\},$$

*тогда*

*1) $f \circ g$ – фиттингов функтор;*

*2) если $f$ и $g$ – сопряженные фиттинговы функторы, то $f \circ g$ – сопряженный фиттингов функтор.*

**Определение 2.3.** *Пусть $f$ – фиттингов функтор,* π *– множество простых чисел, тогда*

$$L_\pi(f) = (G \in \mathfrak{U} : | G : X | \text{ – } \pi'\text{-число для всех } X \in f(G)).$$

Если $\pi = \mathbf{P}$ – множество всех простых чисел, то класс $L_\pi(f)$ будем обозначать через $L(f)$.

**Теорема 2.4.** *Для любого множества простых чисел* π *и любого фиттингова функтора f класс $L_\pi(f)$ является классом Фиттинга.*

Данная теорема позволяет выделять семейства классов Фиттинга при конкретных значениях функтора *f*.

**Примеры.** Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^\pi$, класс $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – множество простых чисел.

1. Пусть сопряженный фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_\mathfrak{F} \circ \mathrm{Hall}_\pi$, тогда класс $L_\pi(f)$ совпадает с классом $K_\pi(\mathfrak{F})$ всех групп, в которых холлова π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой.

2. Если фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_\mathfrak{F}$, то $L_\pi(f) = R_\pi(\mathfrak{F})$ – класс групп, в которых холлова π-подгруппа содержится в $\mathfrak{F}$-радикале группы.

3. В случае, когда фиттингов функтор $f = \mathrm{Inj}_\mathfrak{F}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, тогда класс $L_\pi(f)$ совпадает с классом $L_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех тех групп, в которых $\mathfrak{F}$-инъектор имеет $p$ў-индекс.

4. Если сопряженный фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_\mathfrak{F}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то класс $L_\pi(f) = L'_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех тех групп, в которых холлова π-подгруппа является нормальной подгруппой некоторого $\mathfrak{F}$-инъектора.

Опишем свойства класса $L_\pi(f)$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется π-насыщенным, если выполняется равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π´-групп.

**Теорема 2.5.** *Пусть f – фиттингов функтор,* π *– множество простых чисел, тогда*

*1) класс $L_\pi(f)$ является* π*-насыщенным классом Фиттинга;*

*2) справедливо равенство $L_\pi(f) = \bigcap_{p \in \pi} L_p(f)$.*

Следующая теорема описывает в терминах произведения классов Фиттинга класс $L_\pi(f)$ для случая, когда $f = \mathrm{Rad}_\mathfrak{F}$.

**Теорема 2.6.** *Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^\pi$, тогда для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любого множества простых чисел* π *класс $L_\pi(\mathrm{Rad}_\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi_{\pi'}$.*

Теоремы 2.7 и 2.8 описывают фиттинговы функторы $\mathrm{Rad}_\mathfrak{F}$ и $\mathrm{Inj}_\mathfrak{F}$.

**Теорема 2.7.** *Если f – фиттингов функтор такой, что $|f(G)| = 1$ для любой группы $G \in \mathfrak{U}$, то $f = \mathrm{Rad}_{L(f)}$. Обратно, если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то $\mathfrak{F} = L(\mathrm{Rad}_\mathfrak{F})$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, тогда с учетом леммы 1.3 в классе $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$ справедлива

**Теорема 2.8.** *Пусть f – сопряженный фиттингов функтор такой, что выполняется следующее условие:*

*(*) Если* $G \in \mathrm{U}$, $X \in f(G)$, $X \le U \le G$, *то* $X \in f(U)$.

*Тогда* $f = \mathrm{Inj}_{L\ \mathrm{F}}$. *Обратно, если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, то условие (*) выполняется для* $f = \mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}$ *и класс* $\mathrm{F} = L\ \ \mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}$ .

**Радикалы и функторы.** Следующая теорема представляет собой описание радикалов классов Фиттинга, определяемых посредством фиттинговых функторов.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$, *f – фиттингов функтор такой, что для любой группы G выполняется равенство* $|X_{\pi}| = |Y_{\pi}|$ *всякий раз, когда* $X_{\pi}, Y_{\pi} \in \mathrm{Hall}_{\pi} \circ f\ (G)$. *Пусть* $X \in f(G)$ *и* $X_{\pi}, G_{\pi}$ *– холловы π-подгруппы групп X и G такие, что* $X_{\pi} \le G_{\pi}$. *Тогда если* $C = \mathrm{Core}_{G_{\pi}}\ \ X_{\pi}$ *, то*

*1)* $G_{\pi} \bigcap G_{L_{\pi}(f)} = C$;

*2) если* $K \big/ \big\langle C^G \big\rangle = \mathrm{O}_{\pi'}\ \ G \big/ \big\langle C^G \big\rangle$ *, то* $K = G_{L_{\pi}(f)}$.

**Следствие 3.2.** *Пусть группа G, фиттингов функтор f, холловы π-подгруппы* $X_{\pi}, G_{\pi}$ *удовлетворяют условиям теоремы 3.1, тогда следующие свойства эквивалентны:*

*1)* $X_{\pi}$ *– холлова π-подгруппа некоторой нормальной подгруппы группы G;*

*2)* $X_{\pi}$ *– нормальная подгруппа группы* $G_{\pi}$;

*3)* $X_{\pi} \le G_{L_{\pi}(f)}$;

*4)* $X_{\pi}$ *– холлова π-подгруппа группы* $G_{L_{\pi}(f)}$.

При конкретных значениях фиттингова функтора для классов $K_{\pi}(\mathrm{F})$, $L_{\pi}(\mathrm{F})$ и $L'_{\pi}(\mathrm{F})$ получим

**Следствие 3.3.** *Пусть* $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$, *пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга,* π *– множество простых чисел, G*$_{\pi}$ *– холлова π-подгруппа группы G.*

*1) Если* $C = \ G_{\pi}\ \ _{\mathrm{F}}$, *то* $G_{\pi} \bigcap G_{K_{\pi}(\mathrm{F})} = \ G_{\pi}\ \ _{\mathrm{F}}$ *и* $G_{K_{\pi}(\mathrm{F})} \big/ \big\langle C^G \big\rangle = \mathrm{O}_{\pi'}\ \ G \big/ \big\langle C^G \big\rangle$ .

*2) Если* $\pi = \pi\ \ \mathrm{F}$ , *V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G и* $C = \mathrm{Core}_{G_{\pi}}\ \ V_{\pi}$ *, то*

*2.1)* $G_{\pi} \bigcap G_{L_{\pi}(\mathrm{F})} = C$ *и* $G_{L_{\pi}(\mathrm{F})} \big/ \big\langle C^G \big\rangle = \mathrm{O}_{\pi'}\ \ G \big/ \big\langle C^G \big\rangle$ ;

*2.2)* $G_{\pi} \bigcap G_{L'_{\pi}(\mathrm{F})} = C$ *и* $G_{L'_{\pi}(\mathrm{F})} \big/ \big\langle C^G \big\rangle = \mathrm{O}_{\pi'}\ \ G \big/ \big\langle C^G \big\rangle$ .

## *Л И Т Е Р А Т У Р А*


1. ***Doerk, K.*** Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. ***Barnes, D.W.*** Gaschütz functors on finite soluble groups/ D.W. Barnes, O.H. Kegel // Math. Z. – 1966. – Vol. 94. – Z. 134–142.
3. ***Sudbrock, W.*** Sylowfunktionen in endlichen Gruppen / O.H. Kegel // Rend. Sem. math. Univ. Padova – 1966. – Vol. 36. – Z. 158–184.
4. ***Beidleman, J.C.*** Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Vol. 182. – Z. 359–384.
5. ***Gallego, M.P.*** The radical of the Fitting class by a Fitting functor and a set of primes / M.P. Gallego // Arch. Math. (Basel) – 1987. – Vol. 48. – P. 36–39.
6. ***Шеметков, Л.А.*** О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

7. ***Чунихин, С.А.*** Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.

S U M M A R Y

*The radicals of a finite π-soluble group with respect to the Fitting classes* $K_\pi(\mathrm{F})$, $L_\pi(\mathrm{F})$ *и* $L'_\pi(\mathrm{F})$ *is described.*

*Поступила в редакцию 16.03.2010*