УДК 512.542

О теории фиттинговых функторов конечных групп

Е.А. Витько
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Репозиторий ВГУ

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Будем проводить все исследования в некотором непустом классе конечных групп $\mathfrak{U}$, замкнутом относительно операций S, Q, N_0.

Одни из первых результатов, относящиеся к теории функторов, были получены Барнесом, Кегелем [2] и Зудброком [3]. В указанных работах изучались понятия силовского функтора и функтора Гашюца. Понятие фиттингова функтора в общем случае было введено Бедлеманом, Брюстером и Хауком в работе [4], в которой впервые фиттинговы функторы использовались для построения классов Фиттинга. В частности, была определена конструкция класса $L_\pi(f)$ всех тех групп, в которых *f*-подгруппа имеет π´-индекс, и доказано, что класс $L_\pi(f)$ является классом Фиттинга для любого фиттингова функтора *f*. Галледжи [5] в терминах класса $L_\pi(f)$ описаны радикалы групп для классов Фиттинга, заданных посредством фиттинговых функторов. Вместе с тем функторный подход и его приложения к описанию радикалов ограничивались лишь случаем, когда универсум $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп. В связи с этим актуальна задача расширения указанных результатов на случай классов частично разрешимых или произвольных конечных групп. Реализации такой задачи и посвящена настоящая работа.

Предварительные сведения. Вначале мы приведем определения некоторых известных ранее понятий и утверждения, которые мы будем использовать.

Напомним что, классом Фиттинга называется класс $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы *G* называется ее $\mathfrak{F}$-радикалом, если она является максимальной из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы *G*.

Адрес для корреспонденции: г. Витебск, ул. 2-я Заречная, д. 2, кор. 1, кв. 59, e-mail: alenkavit@tut.by – Витько Е.А.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором, если для каждой субнормальной подгруппы K группы G пересечение $H \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в K.

Если $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G, то множество $\pi(\mathfrak{F})$ определяется как объединение всех таких $\pi(G)$, что $G \in \mathrm{F}$.

Лемма 1.1 [6]. *Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в π-разрешимой группе $(\pi = \pi(\mathrm{F}))$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Подгруппа H называется холловой π-подгруппой, если порядок $|H|$ есть π-число, а индекс $|G : H|$ есть π′-число.

Лемма 1.2 [7]. *Пусть G – π-разрешимая группа, тогда холловы π-подгруппы в группе G существуют, и любые две холловы π-подгруппы группы G сопряжены между собой.*

Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех π-разрешимых групп, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – множество простых чисел, G_{π} – холлова π-подгруппа группы G, тогда ввиду лемм 1.1 и 1.2 непосредственной проверкой можно установить, что следующие классы групп являются классами Фиттинга.

1) для произвольного множества простых чисел π классы

$$K_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : G_{\pi} \in \mathrm{F}),$$

$$R_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : G_{\pi} \subseteq G_{\mathrm{F}});$$

2) в случае, когда $\pi = \pi(\mathrm{F})$, классы групп

$$L_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : |G : V| \text{ – } \pi'\text{-число для всех } V \in \mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}(G));$$

$$L'_{\pi}(\mathrm{F}) = (G \in \mathrm{S}^{\pi} : G_{\pi} \trianglelefteq V \text{ для некоторого } V \in \mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}(G)).$$

Лемма 1.3 [6].. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, V – $\mathfrak{F}$-инъектор π-разрешимой $(\pi = \pi(\mathrm{F}))$ группы G. Если $V \le A \le G$, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы A.*

Функторный метод построения классов Фиттинга. Пусть $f(G)$ – некоторая система подгрупп группы G. Если $\beta : G \to \beta(G)$ – изоморфизм, то через $\beta(f(G))$ обозначим множество $\{\beta(X) \mid X \in f(G)\}$ всех образов в $\beta(G)$ подгрупп из $f(G)$. Если N – подгруппа группы G, то через $f(G) \cap N$ обозначим множество $\{X \cap N \mid X \in f(G)\}$.

Следуя [4], введем

Определение 2.1. а) *Пусть $G \in \mathrm{U}$, отображение f, которое каждой группе G ставит в соответствие некоторое множество ее подгрупп $f(G)$, называется фиттинговым функтором, когда выполняются следующие условия:*

(1) если $\beta : G \to \beta(G)$ – изоморфизм, то $\beta(f(G)) = f(\beta(G))$;

(2) если $N \trianglelefteq G$, то $f(G) \cap N = f(N)$.

б) *Фиттингов функтор называется сопряженным, если для каждой группы G, множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп.*

Примеры. 1) Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, $\mathrm{Rad}_{\mathrm{F}}(G) = \{G_{\mathrm{F}}\}$, тогда $\mathrm{Rad}_{\mathrm{F}}$ является сопряженным фиттинговым функтором. Если $\mathrm{F} = \mathrm{S}_{\pi}$, то фиттингов функтор $\mathrm{Rad}_{\mathrm{F}}$ будем обозначать через Rad_{π}.

2) Пусть $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$. Если $\mathrm{Hall}_{\pi}(G) = \{G_{\pi} : G_{\pi}$ – холлова π-подгруппа группы $G\}$, то ввиду леммы 1.1 Hall_{π} является сопряженным фиттинговым функтором.

3) Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, $\pi = \pi(\mathrm{F})$ и класс $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$. Если

Репозиторий ВГУ

$$\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) = \{X : X \text{ – } \mathfrak{F}\text{-инъектор группы } G\},$$

то вследствие леммы 1.2 $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ является сопряженным фиттинговым функтором.

Лемма 2.2. *Пусть f и g – фиттинговы функторы, положим*

$$(f \circ g)(G) = \{X : X \in f(Y) \text{ для некоторой подгруппы } Y \in g(G)\},$$

тогда

1) $f \circ g$ – фиттингов функтор;

2) если f и g – сопряженные фиттинговы функторы, то $f \circ g$ – сопряженный фиттингов функтор.

Определение 2.3. *Пусть f – фиттингов функтор,* π *– множество простых чисел, тогда*

$$L_\pi(f) = (G \in \mathrm{U} : |G : X| \text{ – } \pi'\text{-число для всех } X \in f(G)).$$

Если $\pi = \mathbf{P}$ – множество всех простых чисел, то класс $L_\pi(f)$ будем обозначать через $L(f)$.

Теорема 2.4. *Для любого множества простых чисел* π *и любого фиттингова функтора f класс $L_\pi(f)$ является классом Фиттинга.*

Данная теорема позволяет выделять семейства классов Фиттинга при конкретных значениях функтора *f*.

Примеры. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^\pi$, класс $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – множество простых чисел.

1. Пусть сопряженный фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Hall}_\pi$, тогда класс $L_\pi(f)$ совпадает с классом $K_\pi(\mathfrak{F})$ всех групп, в которых холлова π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой.

2. Если фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$, то $L_\pi(f) = R_\pi(\mathfrak{F})$ – класс групп, в которых холлова π-подгруппа содержится в $\mathfrak{F}$-радикале группы.

3. В случае, когда фиттингов функтор $f = \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, тогда класс $L_\pi(f)$ совпадает с классом $L_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех тех групп, в которых $\mathfrak{F}$-инъектор имеет pў-индекс.

4. Если сопряженный фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то класс $L_\pi(f) = L'_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех тех групп, в которых холлова π-подгруппа является нормальной подгруппой некоторого $\mathfrak{F}$-инъектора.

Опишем свойства класса $L_\pi(f)$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется π-насыщенным, если выполняется равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π´-групп.

Теорема 2.5. *Пусть f – фиттингов функтор,* π *– множество простых чисел, тогда*

1) класс $L_\pi(f)$ является π*-насыщенным классом Фиттинга;*

2) справедливо равенство $L_\pi(f) = \bigcap_{p \in \pi} L_p(f)$.

Следующая теорема описывает в терминах произведения классов Фиттинга класс $L_\pi(f)$ для случая, когда $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$.

Теорема 2.6. *Пусть $\mathrm{U} = \mathrm{S}^\pi$, тогда для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любого множества простых чисел* π *класс $L_\pi(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{F}\mathrm{S}^\pi_{\pi'}$.*

Теоремы 2.7 и 2.8 описывают фиттинговы функторы $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$ и $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$.

Репозиторий ВГУ

Теорема 2.7. *Если f – фиттингов функтор такой, что* $|f(G)| = 1$ *для любой группы* $G \in \mathrm{U}$, *то* $f = \mathrm{Rad}_{L(f)}$. *Обратно, если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, то* $\mathrm{F} = L(\mathrm{Rad}_{\mathrm{F}})$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, тогда с учетом леммы 1.3 в классе $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi(\mathrm{F})}$ справедлива

Теорема 2.8. *Пусть f – сопряженный фиттингов функтор такой, что выполняется следующее условие:*

(*) Если $G \in \mathrm{U}$, $X \in f(G)$, $X \le U \le G$, *то* $X \in f(U)$.

Тогда $f = \mathrm{Inj}_{L(\mathrm{F})}$. *Обратно, если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, то условие (*) выполняется для* $f = \mathrm{Inj}_{\mathrm{F}}$ *и класс* $\mathrm{F} = L(\mathrm{Inj}_{\mathrm{F}})$.

Радикалы и функторы. Следующая теорема представляет собой описание радикалов классов Фиттинга, определяемых посредством фиттинговых функторов.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$, *f – фиттингов функтор такой, что для любой группы G выполняется равенство* $|X_\pi| = |Y_\pi|$ *всякий раз, когда* $X_\pi, Y_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(G)$. *Пусть* $X \in f(G)$ *и* X_π, G_π *– холловы π-подгруппы групп X и G такие, что* $X_\pi \le G_\pi$. *Тогда если* $C = \mathrm{Core}_{G_\pi}(X_\pi)$, *то*

1) $G_\pi \cap G_{L_\pi(f)} = C$;

2) если $K/\langle C^G \rangle = \mathrm{O}_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$, *то* $K = G_{L_\pi(f)}$.

Следствие 3.2. *Пусть группа G, фиттингов функтор f, холловы π-подгруппы* X_π, G_π *удовлетворяют условиям теоремы 3.1, тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) X_π *– холлова π-подгруппа некоторой нормальной подгруппы группы G;*

2) X_π *– нормальная подгруппа группы* G_π;

3) $X_\pi \le G_{L_\pi(f)}$;

4) X_π *– холлова π-подгруппа группы* $G_{L_\pi(f)}$.

При конкретных значениях фиттингова функтора для классов $K_\pi(\mathrm{F})$, $L_\pi(\mathrm{F})$ и $L'_\pi(\mathrm{F})$ получим

Следствие 3.3. *Пусть* $\mathrm{U} = \mathrm{S}^{\pi}$, *пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга,* π *– множество простых чисел,* G_π *– холлова π-подгруппа группы G.*

1) Если $C = (G_\pi)_{\mathrm{F}}$, *то* $G_\pi \cap G_{K_\pi(\mathrm{F})} = (G_\pi)_{\mathrm{F}}$ *и* $G_{K_\pi(\mathrm{F})}/\langle C^G \rangle = \mathrm{O}_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$.

2) Если $\pi = \pi(\mathrm{F})$, *V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G и* $C = \mathrm{Core}_{G_\pi}(V_\pi)$, *то*

2.1) $G_\pi \cap G_{L_\pi(\mathrm{F})} = C$ *и* $G_{L_\pi(\mathrm{F})}/\langle C^G \rangle = \mathrm{O}_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$;

2.2) $G_\pi \cap G_{L'_\pi(\mathrm{F})} = C$ *и* $G_{L'_\pi(\mathrm{F})}/\langle C^G \rangle = \mathrm{O}_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Doerk, K.*** Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. ***Barnes, D.W.*** Gaschütz functors on finite soluble groups/ D.W. Barnes, O.H. Kegel // Math. Z. – 1966. – Vol. 94. – Z. 134–142.

Репозиторий ВГУ

3. ***Sudbrock, W.*** Sylowfunktionen in endlichen Gruppen / O.H. Kegel // Rend. Sem. math. Univ. Padova – 1966. – Vol. 36. – Z. 158–184.
4. ***Beidleman, J.C.*** Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Vol. 182. – Z. 359–384.
5. ***Gallego, M.P.*** The radical of the Fitting class by a Fitting functor and a set of primes / M.P. Gallego // Arch. Math. (Basel) – 1987. – Vol. 48. – P. 36–39.
6. ***Шеметков, Л.А.*** О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
7. ***Чунихин, С.А.*** Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.

S U M M A R Y

The radicals of a finite π-soluble group with respect to the Fitting classes $K_\pi(\mathrm{F})$, $L_\pi(\mathrm{F})$ *и* $L'_\pi(\mathrm{F})$ *is described.*

Поступила в редакцию 16.03.2010

Репозиторий ВГУ