

Аналитическое решение задачи трех тел методом аппроксимации потенциала

Ю.В. Трубников, А.М. Воронов

*Учреждение образования «Витебский государственный
университет им. П.М. Машиерова»*

В некоторой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей дифференциальные уравнения движения в задаче трех тел имеют [1] следующий вид:

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad i = 0, 1, 2, \quad (1)$$

где U – силовая функция системы (потенциал), определяемая равенством

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right),$$

$r_{ij} = \sqrt{x_i - x_j^2 + y_i - y_j^2 + z_i - z_j^2}$ $i, j = 0, 1, 2$ являются взаимными расстояниями между точками M_i и M_j , обладающими массами m_i и m_j , f – гравитационная постоянная.

Таким образом, если мы аппроксимируем силовую функцию выражением вида

$$U \approx b_{01} r_{01}^2 + b_{02} r_{02}^2 + b_{12} r_{12}^2 + const,$$

то частные производные в правой части уравнений (1) будут линейными функциями по переменным x_i, y_i, z_i $i = 0, 1, 2$. Для того, чтобы результат был не ухудшаемым, полиномы вида

$$P(r) = a_2 r^2 + a_0 \quad (2)$$

должны быть полиномами наилучшего приближения в некоторой метрике. Явный физический смысл в данной задаче имеет равномерное (чебышевское) приближение.

Нахождение коэффициентов экстремального полинома. Полином наилучшего приближения на подпространстве G пространства непрерывных функций $C_{[a-1-e, a+1+e]}$ назовем экстремальным полиномом.

Пусть подпространство G образовано базисными функциями:

$$g_0(r) = 1, \quad g_1(r) = r^2, \quad (3)$$

$$a-1-e \leq r \leq a+1+e \quad a > 0, 0 \leq e < 1. \quad (4)$$

Лемма 1. Если при выполнении условий (3)–(4) функция $f'(r)/r$ является строго возрастающей, то экстремальным полиномом вида (2) является полином, в котором

$$a_2 = \frac{f_3 - f_1}{4a^2 e}, \quad (5)$$

$$a_0 = f_1 - \frac{(1-e)^2}{4e} \cdot f_3 - f_1 - d_{\max}, \quad (6)$$

$$|f(r) - a_2 r^2 - a_0| \leq d_{\max} = \frac{r_{2*}^2 - a^2}{8a^2 e} \cdot f_3 - f_1 - \frac{1}{2} [f(r_{2*}) - f_1], \quad (7)$$

$$r_{2*} = F \left(\frac{f_3 - f_1}{2a^2 e} \right), \quad (8)$$

F – функция, обратная функции $f'(r)/r$, $f_1 = f[a-1-e]$, $f_3 = f[a+1+e]$.

Доказательство. Для нахождения коэффициентов экстремального полинома применим алгоритм, изложенный в монографии [2]. В соответствии с алгоритмом система уравнений для нахождения a_0, a_2, d_{\max} примет следующий вид:

$$\begin{cases} d + a_0 + a_2 r_1^2 = f r_1, \\ -d + a_0 + a_2 r_2^2 = f r_2, \\ d + a_0 + a_2 r_3^2 = f r_3, \quad a(1-e) \leq r_1 < r_2 \leq a(1+e). \end{cases}$$

Находим d :

$$d = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_3^2 - r_1^2)} \cdot f_3 - f_1 - \frac{1}{2} f_2 - f_1, \quad (9)$$

где $f_2 = f r_2$. Выясним знак частной производной $\partial d / \partial r_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial r_1} &= -f' r_1 \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_3^2 - r_1^2)} - \frac{r_1(r_3^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_1^2} \cdot f_3 - f_1 + \frac{f' r_1}{2} = \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_3^2 - r_1^2)} \right] \cdot f' r_1 - \frac{r_1(r_3^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_1^2} \cdot f_3 - f_1 = \frac{r_1(r_3^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_1^2} \left[\frac{f' r_1}{2r_1} - \frac{f_3 - f_1}{r_3^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned}$$

По теореме Коши при некотором $c \in r_1, r_3$ выполняется равенство:

$$\frac{f_3 - f_1}{r_3^2 - r_1^2} = \frac{f' c}{2c},$$

тогда

$$\frac{\partial d}{\partial r_1} = \frac{r_1(r_3^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_1^2} \left[\frac{f' r_1}{r_1} - \frac{f' c}{c} \right] < 0 \quad (10)$$

в силу предположения о строгом возрастании функции $f' r / r$. Неравенство (10) означает, что максимальное значение d достигается при $r_1 = a(1-e)$.

Аналогично

$$\frac{\partial d}{\partial r_3} = \frac{r_3(r_3^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_1^2} \left[\frac{f' r_3}{r_3} - \frac{f' c}{c} \right] > 0,$$

т.е. $r_3 = a(1+e)$.

Кроме того,

$$\frac{\partial d}{\partial r_2} = \frac{r_2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot f_3 - f_1 - \frac{1}{2} f' r_2.$$

Приравнивая последнее выражение к нулю, получаем уравнение:

$$\frac{2(f_3 - f_1)}{r_3^2 - r_1^2} = \frac{f' r_2}{r_2}. \quad (11)$$

Так как $r_1 = a(1-e)$, $r_3 = a(1+e)$, то уравнение (11) приводится к виду

$$\frac{f' r_2}{r_2} = \frac{f_3 - f_1}{2a^2 e}.$$

Обозначив обратную для функции $f' r / r$ через F , получаем (8).

Подставляя найденное значение r_2^* из (8) в равенство (9), получаем неравенство (7) и равенство (6).

Лемма доказана.

Запишем вид формул (5)–(6) в том случае, когда

$$f r = \frac{1}{r^p} \quad p > 0.$$

Так как

$$\frac{f' r}{r} = -\frac{p}{r^{p+2}},$$

то условие строгой монотонности функции $f' r / r$ выполняется.

Найдем в этом случае значение a_2 :

$$a_2 = \frac{f_3 - f_1}{4a^2 e} = \frac{\frac{1}{1+e^p} - \frac{1}{1-e^p}}{4a^{p+2} e} = \frac{1-e^p - 1+e^p}{4a^{p+2} e (1-e^{2p})}. \quad (12)$$

Далее, обозначив

$$1+e^p - 1-e^p = g,$$

получаем

$$\begin{aligned} d_{\max} &= -\frac{1}{8a^2 e} \left\{ \left[\frac{2a^{p+2} e p (1-e^{2p})}{g} \right]^{\frac{2}{p+2}} - a^2 (1-e^2) \right\} \cdot \frac{g}{a^p (1-e^{2p})} - \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{g}{2a^{p+2} e p (1-e^{2p})} \right]^{\frac{p}{p+2}} - \frac{1}{a^p (1-e^p)} \right\} = -\frac{1}{8a^p e} \left[\frac{2e p^{\frac{2}{p+2}} (1-e^2)^{\frac{2p}{p+2}}}{g^{\frac{2}{p+2}}} - 1-e^2 \right] \times \\ &\times \frac{g}{1-e^{2p}} - \frac{1}{2a^p} \cdot \frac{g^{\frac{p}{p+2}}}{2e p^{\frac{p}{p+2}} (1-e^2)^{\frac{p^2}{p+2}}} + \frac{1}{2a^p (1-e^p)} = -\frac{1}{8a^p e} \cdot \frac{2e p^{\frac{2}{p+2}} g^{\frac{p}{p+2}}}{1-e^{2p}} + \\ &+ \frac{1}{8a^p e} \cdot \frac{1-e^2 g}{1-e^{2p}} - \frac{1}{2a^p} \cdot \frac{g^{\frac{p}{p+2}}}{2e p^{\frac{p}{p+2}} (1-e^2)^{\frac{p^2}{p+2}}} + \frac{1}{2a^p (1-e^p)} = \\ &= \frac{1}{2a^p} \left[\frac{1-e^2 g}{4e (1-e^{2p})} + \frac{1}{1-e^p} - \frac{g^{\frac{p}{p+2}} (p+2)}{2 (1-e^2)^{\frac{p^2}{p+2}} 2e p^{\frac{p}{p+2}}} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Выражение для a_0 в этом случае будет иметь следующий вид:

$$a_0 = f_1 - \frac{f_3 - f_1}{4e} \cdot (1-e^2) - d_{\max} = \frac{1}{a^p (1-e^p)} + \frac{g (1-e^2)}{4a^p e (1-e^{2p})} - d_{\max}.$$

В частности, при $p=1$ из (12) получаем

$$a_2 = -\frac{2e}{4a^3 e (1-e^2)} = -\frac{1}{2a^3 (1-e^2)};$$

далее из (13)

$$d_{\max} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1-e^2 2e}{4e (1-e^2)} + \frac{1}{1-e} - \frac{3 \cdot 2e^{\frac{1}{3}}}{2 (1-e^2)^{\frac{1}{3}} 2e^{\frac{1}{3}}} \right] = \frac{1}{4a (1-e^2)^{1/3}} \left[\frac{3+e^2}{1-e^{2/3}} - 3 \right].$$

Подставляя найденное значение d_{\max} в выражение для a_0 , получим при $p=1$:

$$a_0 = \frac{1}{4a (1-e^2)} \left[\frac{3+e^2}{1-e^{2/3}} + 3 \right].$$

Лемма 2. Экстремальным полиномом для суммы функций

$$\frac{f m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{f m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{f m_1 m_2}{r_{12}}$$

является сумма полиномов:

$$P_{01} r_{01} = -\frac{f m_0 m_1}{2a_{01}^3 (1-e_{01}^2)} \cdot r_{01}^2 + c_{01}; \quad a_{01} (1-e_{01}) \leq r_{01} \leq a_{01} (1+e_{01});$$

$$P_{02} r_{02} = -\frac{f m_0 m_2}{2a_{02}^3 (1-e_{02}^2)} \cdot r_{02}^2 + c_{02}; \quad a_{02} (1-e_{02}) \leq r_{02} \leq a_{02} (1+e_{02});$$

$$P_{12} r_{12} = -\frac{f m_1 m_2}{2a_{12}^3 (1-e_{12}^2)} \cdot r_{12}^2 + c_{12}; \quad a_{12} (1-e_{12}) \leq r_{12} \leq a_{12} (1+e_{12}).$$

Доказательство проводится применением теоремы 1.5 монографии [2].

Построение линейных систем. Взяв частные производные по соответствующим переменным от суммы

$$P_{01} r_{01} + P_{02} r_{02} + P_{12} r_{12} ,$$

получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= 2fm_1b_{01} x_0 - x_1 + 2fm_2b_{02} x_0 - x_2 , \\ \ddot{x}_1 &= -2fm_0b_{01} x_0 - x_1 + 2fm_2b_{12} x_1 - x_2 , \\ \ddot{x}_2 &= -2fm_0b_{02} x_0 - x_2 - 2fm_1b_{12} x_1 - x_2 , \end{aligned}$$

где

$$b_{01} = -\frac{1}{2a_{01}^3 1 - e_{01}^2} , \quad b_{02} = -\frac{1}{2a_{02}^3 1 - e_{02}^2} , \quad b_{12} = -\frac{1}{2a_{12}^3 1 - e_{12}^2} .$$

Перейдем теперь к системе координат с тем же направлением осей, но с центром в точке M_0 , тогда

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \ddot{x}_0 &= 2f [m_0 + m_1 b_{01} + m_2 b_{12}] x_1 - x_0 + 2fm_2 b_{02} - b_{12} x_2 - x_0 , \\ \ddot{x}_2 - \ddot{x}_0 &= 2fm_1 b_{01} - b_{12} (x_1 - x_0) + 2f [m_0 + m_2 b_{02} + m_1 b_{12}] x_2 - x_0 . \end{aligned}$$

В этом случае естественно обозначить

$$x'_1 = x_1 - x_0 , \quad x'_2 = x_2 - x_0 ,$$

и для сокращения записи этот штрих опустить.

Таким образом, мы получили систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 , \\ \ddot{x}_2 = d_{21}x_1 + d_{22}x_2 ; \end{cases} \quad (14)$$

в которой $d_{11} = 2f [m_0 + m_1 b_{01} + m_2 b_{12}]$, $d_{12} = 2fm_2 b_{02} - b_{12}$, $d_{21} = 2fm_1 b_{01} - b_{12}$, $d_{22} = 2f [m_0 + m_2 b_{02} + m_1 b_{12}]$.

Лемма 3. Собственные значения λ_i $i = 1, 2$ матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

являются отрицательными и имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= f [m_0 + m_1 b_{01} + m_0 + m_2 b_{02} + m_1 + m_2 b_{12}] \pm \\ &\pm f [m_0^2 b_{01} - b_{02}^2 + m_1^2 b_{01} - b_{12}^2 + m_2^2 b_{12} - b_{02}^2 + 2m_0m_1 b_{01} - b_{02} b_{01} - b_{12} + \\ &+ 2m_0m_2 b_{02} - b_{01} b_{02} - b_{12} + 2m_1m_2 b_{12} - b_{01} b_{12} - b_{02}]^{1/2} . \end{aligned}$$

Доказательство. Характеристическое уравнение матрицы D имеет вид:

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{cc} 2f [m_0 + m_1 b_{01} + m_2 b_{12}] - \lambda & 2fm_2 b_{02} - b_{12} \\ 2fm_1 b_{01} - b_{21} & 2f [m_0 + m_2 b_{02} + m_1 b_{12}] - \lambda \end{array} \right| = \lambda^2 - \\ &- 2f [m_0 + m_1 b_{01} + m_2 b_{12}] + [m_0 + m_2 b_{02} + m_1 b_{12}] \lambda + 4f^2 [m_0 + m_1 b_{01} + m_2 b_{12}] \times \\ &\times [m_0 + m_2 b_{02} + m_1 b_{12}] - 4f^2 m_1 m_2 b_{01} - b_{12} b_{02} - b_{12} = \\ &= \lambda^2 - 2f [m_0 b_{01} + b_{02} + m_1 b_{01} + b_{02} + m_2 b_{02} + b_{12}] \lambda + \\ &+ 4f^2 m_0 + m_1 + m_2 m_0 b_{01} b_{02} + m_1 b_{01} b_{12} + m_2 b_{02} b_{12} = 0 . \end{aligned}$$

Прежде всего установим, что корни последнего уравнения действительные. Для этого покажем, что дискриминант δ полученной квадратичной (по λ) функции неотрицателен. Приведем дискриминант к более удобному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{4f^2} &= [m_0 b_{01} + b_{02} + m_1 b_{01} + b_{02} + m_2 b_{12} + b_{02}]^2 - 4 m_0 + m_1 + m_2 \times \\ &\times m_0 b_{01} b_{02} + m_1 b_{01} b_{12} + m_2 b_{02} b_{12} = m_0^2 b_{10}^2 + 2m_0^2 b_{10} b_{02} + m_0^2 b_{02}^2 + m_1^2 b_{01}^2 + 2m_1^2 b_{01} b_{12} + \\ &+ m_1^2 b_{12}^2 + m_2^2 b_{12}^2 + 2m_2^2 b_{12} b_{02} + m_2^2 b_{02}^2 + 2m_0 m_1 b_{01}^2 + 2m_0 m_1 b_{01} b_{12} + 2m_0 m_1 b_{01} b_{02} + \\ &+ 2m_0 m_1 b_{02} b_{12} + 2m_0 m_2 b_{01} b_{12} + 2m_0 m_2 b_{01} b_{02} + 2m_0 m_2 b_{02} b_{12} + 2m_0 m_2 b_{02}^2 + 2m_1 m_2 b_{01} b_{12} + \\ &+ 2m_1 m_2 b_{01} b_{02} + 2m_1 m_2 b_{02} b_{12} - 4m_0^2 b_{01} b_{02} - 4m_0 m_1 b_{01} b_{12} - 4m_0 m_2 b_{02} b_{12} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4m_0m_1b_{01}b_{02} - 4m_1^2b_{01}b_{12} - 4m_1m_2b_{02}b_{12} - 4m_0m_2b_{01}b_{02} - 4m_1m_2b_{01}b_{12} - 4m_2^2b_{02}b_{12} = \\
& = m_0^2 b_{01} - b_{02}^2 + m_1^2 b_{01} - b_{12}^2 + m_2^2 b_{12} - b_{02}^2 + 2m_0m_1 b_{01} - b_{02} b_{01} - b_{12} + \\
& + 2m_0m_2 b_{02} - b_{01} b_{02} - b_{12} + 2m_1m_2 b_{12} - b_{01} b_{12} - b_{02}.
\end{aligned}$$

Если обозначить $s_0 = b_{01} - b_{02}$, $s_1 = b_{01} - b_{12}$, то $b_{12} - b_{02} = s_0 - s_1$, то это выражение переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& m_0^2 s_0^2 + m_1^2 s_1^2 + m_2^2 s_0 - s_1^2 + 2m_0m_1 s_0 s_1 + 2m_0m_2 - s_0 s_1 - s_0 + 2m_1m_2 - s_1 s_0 - s_1 = \\
& = m_0^2 + m_2^2 + 2m_0m_2 s_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 s_1^2 + 2 m_0m_1 - m_2^2 - m_0m_2 - m_1m_2 s_0 s_1 = \\
& = m_0 + m_2^2 s_0^2 + m_1 + m_2^2 s_1^2 + 2 m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 s_0 s_1.
\end{aligned}$$

Данное выражение представляет собой квадратичную форму относительно переменных s_0, s_1 с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} m_0 + m_2^2 & m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 \\ m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 & m_1 + m_2^2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что матрица M является положительно определенной. Действительно, $\Delta_1 = m_0 + m_2^2 > 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta & = \begin{vmatrix} m_0 + m_2^2 & m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 \\ m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 & m_1 + m_2^2 \end{vmatrix} = m_0^2 + 2m_0m_2 + m_2^2 \times \\
& \times m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 - m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 = m_0^2 m_1^2 + 2m_0^2 m_1 m_2 + m_0^2 m_2^2 + \\
& + 2m_0 m_1^2 m_2 + 4m_0 m_1 m_2^2 + 2m_0 m_2^3 + m_1^2 m_2^2 + 2m_1 m_2^3 + m_2^4 - \\
& - m_0^2 m_1^2 + m_0^2 m_2^2 + m_1^2 m_2^2 + m_2^4 - 2 m_0^2 m_1 m_2 - m_0 m_1^2 m_2 - m_0 m_1 m_2^2 + m_0 m_1 m_2^2 + \\
& + m_0 m_2^3 + m_1 m_2^3 = 4m_0 m_1 m_2 m_0 + m_1 + m_2 > 0.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались критерием Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Отсюда, в частности, следует, что при $s_0 = b_{01} - b_{02} \neq 0$, $s_1 = b_{01} - b_{12} \neq 0$ дискриминант положителен и, значит, корни различны.

Отрицательность корней следует из теоремы Виета:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 & = 2f [m_0 b_{01} + b_{02} + m_1 b_{01} + b_{12} + m_2 b_{02} + b_{12}] < 0, \\
\lambda_1 \lambda_2 & = 4f^2 m_0 + m_1 + m_2 m_0 b_{01} b_{02} + m_1 b_{01} b_{12} + m_2 b_{02} b_{12} > 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Решение задачи Коши для системы (14) имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \cos \sqrt{-D} t \vec{r}(0) + \sqrt{-D}^{-1} \sin \sqrt{-D} t \dot{\vec{r}}(0), \quad (15)$$

где $\vec{r}(t)$ – вектор $x_1(t), x_2(t)$. Для того, чтобы получить координатную форму, найдем матричные функции $\sqrt{-D}^{-1}, \cos \sqrt{-D} t, \sin \sqrt{-D} t$.

Воспользуемся методом построения интерполяционного полинома [3].

Лемма 4. Матрицы $\sqrt{-D}$ и $\sqrt{-D}^{-1}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-D} & = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}, \\
\sqrt{-D}^{-1} & = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta_{11} & = \frac{\omega_1 \omega_2 - d_{11}}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \delta_{12} = -\frac{d_{12}}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \delta_{21} = -\frac{d_{21}}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \delta_{22} = \frac{\omega_1 \omega_2 - d_{22}}{\omega_1 + \omega_2}, \\
\omega_1 & = \sqrt{-\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{-\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для нахождения $\sqrt{-D}$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \omega_1^2 = \omega_1, \\ a_0 + a_1 \omega_2^2 = \omega_2. \end{cases}$$

Так как

$$a_0 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad a_1 = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2},$$

то

$$\sqrt{-D} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \begin{pmatrix} \omega_1 \omega_2 - d_{11} & -d_{12} \\ -d_{21} & \omega_1 \omega_2 - d_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$(\sqrt{-D})^{-1} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix}.$$

Аналогично для нахождения функций $\sin \sqrt{-Dt}$, $\cos \sqrt{-Dt}$ решаем относительно a_0 , a_1 систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \omega_1 = \sin \omega_1 t, \\ a_0 + a_1 \omega_2 = \sin \omega_2 t; \end{cases}$$

из которой

$$a_0 = \frac{\omega_2 \sin \omega_1 t - \omega_1 \sin \omega_2 t}{\omega_2 - \omega_1}, \quad a_1 = \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{-Dt} &= \frac{\omega_2 \sin \omega_1 t - \omega_1 \sin \omega_2 t}{\omega_2 - \omega_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\omega_2 - \omega_1} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \omega_2^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \omega_1^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_1^2 + d_{22} \end{pmatrix} \sin \omega_2 t, \end{aligned}$$

где $\delta = \omega_2^2 - \omega_1^2$.

Таким же образом получаем, что

$$\cos \sqrt{-Dt} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \omega_2^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix} \cos \omega_1 t - \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \omega_1^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_1^2 + d_{22} \end{pmatrix} \cos \omega_2 t.$$

Далее

$$\begin{aligned} \sqrt{-D}^{-1} \sin \sqrt{-Dt} &= \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix} \sin \omega_1 t - \\ &- \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_1^2 + d_{22} \end{pmatrix} \sin \omega_2 t = \\ &= \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \begin{pmatrix} \delta_{22} \omega_2^2 + d_{11} - \delta_{12} d_{21} & \delta_{22} d_{12} - \delta_{12} \omega_2^2 + d_{22} \\ -\delta_{21} \omega_2^2 + d_{11} + \delta_{11} d_{21} & -\delta_{21} d_{12} + \delta_{11} \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix} \sin \omega_1 t - \\ &- \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \begin{pmatrix} \delta_{22} \omega_1^2 + d_{11} - \delta_{12} d_{21} & \delta_{22} d_{12} - \delta_{12} \omega_1^2 + d_{22} \\ -\delta_{21} \omega_1^2 + d_{11} + \delta_{11} d_{21} & -\delta_{21} d_{12} + \delta_{11} \omega_1^2 + d_{22} \end{pmatrix} \sin \omega_2 t. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Решение задачи Коши для системы уравнений (14) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \left[\delta_{22} \omega_2^2 + d_{11} - \delta_{12} d_{21} \right] \dot{x}_1 0 + \left[\delta_{22} d_{12} - \delta_{12} \omega_2^2 + d_{22} \right] \dot{x}_2 0 \sin \omega_1 t - \\ &- \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \left[\delta_{22} \omega_1^2 + d_{11} - \delta_{12} d_{21} \right] \dot{x}_1 0 + \left[\delta_{22} d_{12} - \delta_{12} \omega_1^2 + d_{22} \right] \dot{x}_2 0 \sin \omega_2 t + \\ &+ \frac{1}{\delta} \left[\omega_2^2 + d_{11} \quad x_1 0 + d_{12} x_2 0 \right] \cos \omega_1 t - \frac{1}{\delta} \left[\omega_1^2 + d_{11} \quad x_1 0 + d_{12} x_2 0 \right] \cos \omega_2 t; \\ x_2(t) &= \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \left[-\delta_{21} \omega_2^2 + d_{11} + \delta_{11} d_{21} \right] \dot{x}_1 0 + \left[-\delta_{21} d_{12} + \delta_{11} \omega_2^2 + d_{22} \right] \dot{x}_2 0 \sin \omega_1 t - \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\delta \omega_1 \omega_2} \left[-\delta_{21} \omega_1^2 + d_{11} + \delta_{11} d_{21} \right] \dot{x}_1 \ 0 + \left[-\delta_{21} d_{12} + \delta_{11} \omega_1^2 + d_{22} \right] \dot{x}_2 \ 0 \sin \omega_2 t +$$

$$+ \frac{1}{\delta} \left[d_{21} x_1 \ 0 + \omega_2^2 + d_{22} x_2 \ 0 \right] \cos \omega_1 t - \frac{1}{\delta} \left[d_{21} x_1 \ 0 + \omega_1^2 + d_{22} x_2 \ 0 \right] \cos \omega_2 t.$$

Доказательство. Подставляя найденные значения $\sqrt{-D}^{-1} \sin \sqrt{-Dt}$, $\cos \sqrt{-Dt}$ в равенство (15), получаем требуемый результат.

Аналогично получаются равенства для координат y_1, y_2, z_1, z_2 .

Ограниченная задача трех тел. Рассмотрим случай ограниченной задачи трех тел.

Лемма 5. В случае ограниченной задачи трех тел, т.е. при $m_2 = 0$, справедливы следующие равенства:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2fm_1 b_{01} - b_{12} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{-D} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ -\gamma \omega_2 - \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{-D}^{-1} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ \gamma \omega_2 - \omega_1 & \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 \\ \gamma \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) & \frac{1}{\omega_2} \end{pmatrix},$$

$$\sin \sqrt{-Dt} = \begin{pmatrix} \sin \omega_1 t & 0 \\ -\gamma \sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t & \sin \omega_2 t \end{pmatrix},$$

$$\cos \sqrt{-Dt} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & 0 \\ -\gamma \cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_1 = 2f m_0 + m_1 b_{01}, \quad \lambda_2 = 2f m_0 b_{02} + m_1 b_{12},$$

$$b_{ij} = - \frac{1}{2a_{ij}^3 (1 - e_{ij}^2)} < 0 \quad i, j = 0, 1, 2, \quad i \neq j,$$

$$\omega_j = \sqrt{-\lambda_j} \quad j = 1, 2, \quad \gamma = \frac{2fm_1 b_{01} - b_{12}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{1}{1 + \frac{m_0 b_{01} - b_{02}}{m_1 b_{01} - b_{12}}}.$$

Доказательство проводится подстановкой элементов матрицы D в соответствующие выражения.

Теорема 2. Решение системы дифференциальных уравнений (14) в случае ограниченной задачи трех тел имеет следующий вид:

$$x_1 \ t = x_1 \ 0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_1 \ 0}{\omega_1} \sin \omega_1 t;$$

$$x_2 \ t = \gamma x_1 \ 0 \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} x_1 \ 0 \sin \omega_1 t +$$

$$+ [x_2 \ 0 - \gamma x_1 \ 0] \cos \omega_2 t + \frac{1}{\omega_2} [\dot{x}_2 \ 0 - \gamma \dot{x}_1 \ 0] \sin \omega_2 t =$$

$$= \gamma x_1 \ t + [x_2 \ 0 - \gamma x_1 \ 0] \cos \omega_2 t + \frac{1}{\omega_2} [\dot{x}_2 \ 0 - \gamma \dot{x}_1 \ 0] \sin \omega_2 t. \quad (16)$$

Доказательство вытекает из теоремы 1. Аналогичные формулы имеют место и для координат y_1, y_2, z_1, z_2 .

Точки либрации. В небесной механике точкой либрации называется векторная функция $\vec{r}_2 \ t = x_2 \ t, y_2 \ t, z_2 \ t$, связанная с векторной функцией $\vec{r}_1 \ t = x_1 \ t, y_1 \ t, z_1 \ t$ равенством:

$$\vec{r}_2 \ t = \gamma \vec{r}_1 \ t. \quad (17)$$

Если в равенстве (16) начальные условия таковы, что выражения в квадратных скобках равны нулю, то выполняется равенство (17).

Заключение. В настоящей статье проведена аппроксимация потенциала общей задачи трех тел квадратичными полиномами наилучшего чебышевского приближения. Такой способ приближения позволяет построить линейную модель гравитационного взаимодействия трех тел как в абсолютных, так и в относительных координатах. В свою очередь линейная модель

позволяет решить (что и делается в статье) задачу Коши в явном аналитическом виде. Найдены кинематические характеристики движущихся тел, при которых возникает тип движения, называемый в небесной механике точкой либрации и соответствующий некоторым реальным движениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дубошин, Г.Н.** Небесная механика. Основные задачи и методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1975. – С. 735.
2. **Трубников, Ю.В.** Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М.: Asstro Press, 2002. – С. 100.
3. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – С. 29–32.

S U M M A R Y

In this article we make the approximation capacity of the general three-body problem by quadratic polynomials, the best Chebyshev approximation. This method of approach allows us to construct a linear model of the gravitational interaction of three bodies both in absolute and in relative coordinates. In turn, the linear model can be solved (which is done in the article) the Cauchy problem in explicit analytical form.

Поступила в редакцию 12.03.2010