УДК 521.1

Аналитическое решение задачи трех тел методом аппроксимации потенциала

Ю.В. Трубников, А.М. Воронов
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В некоторой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей дифференциальные уравнения движения в задаче трех тел имеют [1] следующий вид:

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\ m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \qquad (i = 0,1,2), \tag{1}$$

Адрес для корреспонденции: 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, 12/23, кв. 16, e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.

где U – силовая функция системы (потенциал), определяемая равенством

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right),$$

$r_{ij} = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}$ $(i, j = 0,1,2)$ являются взаимными расстояниями между точками M_i и M_j, обладающими массами m_i и m_j, f – гравитационная постоянная.

Таким образом, если мы аппроксимируем силовую функцию выражением вида

$$U \approx b_{01} r_{01}^2 + b_{02} r_{02}^2 + b_{12} r_{12}^2 + const,$$

то частные производные в правой части уравнений (1) будут линейными функциями по переменным x_i, y_i, z_i $(i = 0,1,2)$. Для того, чтобы результат был не улучшаемым, полиномы вида

$$P(r) = a_2 r^2 + a_0 \tag{2}$$

должны быть полиномами наилучшего приближения в некоторой метрике. Явный физический смысл в данной задаче имеет равномерное (чебышевское) приближение.

Нахождение коэффициентов экстремального полинома. Полином наилучшего приближения на подпространстве G пространства непрерывных функций $C_{\left[a(1-e),\, a(1+e)\right]}$ назовем экстремальным полиномом.

Пусть подпространство G образовано базисными функциями:

$$g_0(r) = 1, \qquad g_1(r) = r^2, \tag{3}$$

$$a(1-e) \le r \le a(1+e) \quad (a>0,\ 0 \le e < 1). \tag{4}$$

Лемма 1. *Если при выполнении условий (3)–(4) функция $f'(r)/r$ является строго возрастающей, то экстремальным полиномом вида (2) является полином, в котором*

$$a_2 = \frac{f_3 - f_1}{4a^2 e}, \tag{5}$$

$$a_0 = f_1 - \frac{(1-e)^2}{4e} \cdot \left(f_3 - f_1\right) - d_{\max}, \tag{6}$$

$$\left| f(r) - a_2 r^2 - a_0 \right| \le d_{\max} = \frac{r_{2*}^2 - a^2(1-e)^2}{8a^2 e} \cdot \left(f_3 - f_1\right) - \frac{1}{2}\left[f(r_{2*}) - f_1\right], \tag{7}$$

$$r_{2*} = F\left(\frac{f_3 - f_1}{2a^2 e}\right), \tag{8}$$

F – функция, обратная функции $f'(r)/r$, $f_1 = f\left[a(1-e)\right]$, $f_3 = f\left[a(1+e)\right]$.

Доказательство. Для нахождения коэффициентов экстремального полинома применим алгоритм, изложенный в монографии [2]. В соответствии с алгоритмом система уравнений для нахождения a_0, a_2, $d_{\max}$ примет следующий вид:

$$\begin{cases} d + a_0 + a_2 r_1^2 = f(r_1), \\ -d + a_0 + a_2 r_2^2 = f(r_2), \\ d + a_0 + a_2 r_3^2 = f(r_3), \quad a(1-e) \le r_1 < r_2 \le a(1+e). \end{cases}$$

Находим d:

$$d=\frac{r_2^2-r_1^2}{2\left(r_3^2-r_1^2\right)}\cdot\left(f_3-f_1\right)-\frac{1}{2}\left(f_2-f_1\right), \tag{9}$$

где $f_2=f\left(r_2\right)$. Выясним знак частной производной $\partial d/\partial r_1$:

$$\frac{\partial d}{\partial r_1}=-f'\left(r_1\right)\cdot\frac{r_2^2-r_1^2}{2\left(r_3^2-r_1^2\right)}-\frac{r_1\left(r_3^2-r_2^2\right)}{\left(r_3^2-r_1^2\right)^2}\cdot\left(f_3-f_1\right)+\frac{f'\left(r_1\right)}{2}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}-\frac{r_2^2-r_1^2}{2\left(r_3^2-r_1^2\right)}\right]\cdot f'\left(r_1\right)-\frac{r_1\left(r_3^2-r_2^2\right)}{\left(r_3^2-r_1^2\right)}\cdot\left(f_3-f_1\right)=\frac{r_1\left(r_3^2-r_2^2\right)}{r_3^2-r_1^2}\left[\frac{f'\left(r_1\right)}{2r_1}-\frac{f_3-f_1}{r_3^2-r_1^2}\right].$$

По теореме Коши при некотором $c\in\left(r_1,\,r_3\right)$ выполняется равенство:

$$\frac{f_3-f_1}{r_3^2-r_1^2}=\frac{f'(c)}{2c},$$

тогда

$$\frac{\partial d}{\partial r_1}=\frac{r_1\left(r_3^2-r_2^2\right)}{r_3^2-r_1^2}\left[\frac{f'\left(r_1\right)}{r_1}-\frac{f'(c)}{c}\right]<0 \tag{10}$$

в силу предположения о строгом возрастании функции $f'(r)/r$. Неравенство (10) означает, что максимальное значение d достигается при $r_1=a(1-e)$.

Аналогично

$$\frac{\partial d}{\partial r_3}=\frac{r_3\left(r_3^2-r_2^2\right)}{r_3^2-r_1^2}\left[\frac{f'\left(r_3\right)}{r_3}-\frac{f'(c)}{c}\right]>0,$$

т.е. $r_3=a(1+e)$.

Кроме того,

$$\frac{\partial d}{\partial r_2}=\frac{r_2}{r_3^2-r_1^2}\cdot\left(f_3-f_1\right)-\frac{1}{2}\cdot f'\left(r_2\right).$$

Приравнивая последнее выражение к нулю, получаем уравнение:

$$\frac{2\left(f_3-f_1\right)}{r_3^2-r_1^2}=\frac{f'\left(r_2\right)}{r_2}. \tag{11}$$

Так как $r_1=a(1-e),\ r_3=a(1+e)$, то уравнение (11) приводится к виду

$$\frac{f'\left(r_2\right)}{r_2}=\frac{f_3-f_1}{2a^2e}.$$

Обозначив обратную для функции $f'(r)/r$ через F, получаем (8).

Подставляя найденное значение r_{2*} из (8) в равенство (9), получаем неравенство (7) и равенство (6).

Лемма доказана.

Запишем вид формул (5)–(6) в том случае, когда

$$f(r)=\frac{1}{r^p}\quad(p>0).$$

Так как

$$\frac{f'(r)}{r}=-\frac{p}{r^{p+2}},$$

то условие строгой монотонности функции $f'(r)/r$ выполняется.

Найдем в этом случае значение a_2 :

$$a_2 = \frac{f_3 - f_1}{4a^2 e} = \frac{\dfrac{1}{(1+e)^p} - \dfrac{1}{(1-e)^p}}{4a^{p+2}e} = \frac{(1-e)^p - (1+e)^p}{4a^{p+2}e\left(1-e^2\right)^p}. \qquad (12)$$

Далее, обозначив

$$(1+e)^p - (1-e)^p = g,$$

получаем

$$d_{\max} = -\frac{1}{8a^2e}\left\{\left[\frac{2a^{p+2}ep\left(1-e^2\right)^p}{g}\right]^{\frac{2}{p+2}} - a^2(1-e)^2\right\}\cdot\frac{g}{a^p\left(1-e^2\right)^p} -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{g}{2a^{p+2}ep\left(1-e^2\right)^p}\right]^{\frac{p}{p+2}} - \frac{1}{a^p(1-e)^p}\right\} = -\frac{1}{8a^pe}\left[\frac{(2ep)^{\frac{2}{p+2}}\left(1-e^2\right)^{\frac{2p}{p+2}}}{g^{\frac{2}{p+2}}} - (1-e)^2\right]\times$$

$$\times\frac{g}{\left(1-e^2\right)^p} - \frac{1}{2a^p}\cdot\frac{g^{\frac{p}{p+2}}}{(2ep)^{\frac{p}{p+2}}\left(1-e^2\right)^{\frac{p^2}{p+2}}} + \frac{1}{2a^p(1-e)^p} = -\frac{1}{8a^pe}\cdot\frac{(2ep)^{\frac{2}{p+2}}g^{\frac{p}{p+2}}}{\left(1-e^2\right)^{\frac{p^2}{p+2}}} +$$

$$+\frac{1}{8a^pe}\cdot\frac{(1-e)^2 g}{\left(1-e^2\right)^p} - \frac{1}{2a^p}\cdot\frac{g^{\frac{p}{p+2}}}{(2ep)^{\frac{p}{p+2}}\left(1-e^2\right)^{\frac{p^2}{p+2}}} + \frac{1}{2a^p(1-e)^p} =$$

$$= \frac{1}{2a^p}\left[\frac{(1-e)^2 g}{4e\left(1-e^2\right)^p} + \frac{1}{(1-e)^p} - \frac{g^{\frac{p}{p+2}}(p+2)}{2\left(1-e^2\right)^{\frac{p^2}{p+2}}(2ep)^{\frac{p}{p+2}}}\right]. \qquad (13)$$

Выражение для a_0 в этом случае будет иметь следующий вид:

$$a_0 = f_1 - \frac{f_3 - f_1}{4e}\cdot(1-e)^2 - d_{\max} = \frac{1}{a^p(1-e)^p} + \frac{g(1-e)^2}{4a^pe\left(1-e^2\right)^p} - d_{\max}.$$

В частности, при $p=1$ из (12) получаем

$$a_2 = -\frac{2e}{4a^3e\left(1-e^2\right)} = -\frac{1}{2a^3\left(1-e^2\right)};$$

далее из (13)

$$d_{\max} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(1-e)^2\, 2e}{4e\left(1-e^2\right)} + \frac{1}{1-e} - \frac{3(2e)^{\frac{1}{3}}}{2\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{3}}(2e)^{\frac{1}{3}}}\right] = \frac{1}{4a\left(1-e^2\right)^{1/3}}\left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{2/3}} - 3\right].$$

Подставляя найденное значение $d_{\max}$ в выражение для a_0, получим при $p=1$:

$$a_0 = \frac{1}{4a\left(1-e^2\right)}\left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{2/3}} + 3\right].$$

Лемма 2. *Экстремальным полиномом для суммы функций*

$$\frac{fm_0m_1}{r_{01}} + \frac{fm_0m_2}{r_{02}} + \frac{fm_1m_2}{r_{12}}$$

является сумма полиномов:

$$P_{01}\left(r_{01}\right) = -\frac{fm_0m_1}{2a_{01}^3\left(1-e_{01}^2\right)}\cdot r_{01}^2 + c_{01}; \quad a_{01}\left(1-e_{01}\right) \le r_{01} \le a_{01}\left(1+e_{01}\right);$$

$$P_{02}\left(r_{02}\right) = -\frac{fm_0m_2}{2a_{02}^3\left(1-e_{02}^2\right)}\cdot r_{02}^2 + c_{02}; \quad a_{02}\left(1-e_{02}\right) \le r_{02} \le a_{02}\left(1+e_{02}\right);$$

$$P_{12}\left(r_{12}\right) = -\frac{fm_1m_2}{2a_{12}^3\left(1-e_{12}^2\right)}\cdot r_{12}^2 + c_{12}; \quad a_{12}\left(1-e_{12}\right) \le r_{12} \le a_{12}\left(1+e_{12}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится применением теоремы 1.5 монографии [2].

Построение линейных систем. Взяв частные производные по соответствующим переменным от суммы

$$P_{01}\left(r_{01}\right) + P_{02}\left(r_{02}\right) + P_{12}\left(r_{12}\right),$$

получаем:

$$\ddot{x}_0 = 2fm_1b_{01}\left(x_0 - x_1\right) + 2fm_2b_{02}\left(x_0 - x_2\right),$$
$$\ddot{x}_1 = -2fm_0b_{01}\left(x_0 - x_1\right) + 2fm_2b_{12}\left(x_1 - x_2\right),$$
$$\ddot{x}_2 = -2fm_0b_{02}\left(x_0 - x_2\right) - 2fm_1b_{12}\left(x_1 - x_2\right),$$

где

$$b_{01} = -\frac{1}{2a_{01}^3\left(1-e_{01}^2\right)}, \quad b_{02} = -\frac{1}{2a_{02}^3\left(1-e_{02}^2\right)}, \quad b_{12} = -\frac{1}{2a_{12}^3\left(1-e_{12}^2\right)}.$$

Перейдем теперь к системе координат с тем же направлением осей, но с центром в точке M_0, тогда

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0 = 2f\left[\left(m_0 + m_1\right)b_{01} + m_2b_{12}\right]\left(x_1 - x_0\right) + 2fm_2\left(b_{02} - b_{12}\right)\left(x_2 - x_0\right),$$
$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_0 = 2fm_1\left(b_{01} - b_{12}\right)\left(x_1 - x_0\right) + 2f\left[\left(m_0 + m_2\right)b_{02} + m_1b_{12}\right]\left(x_2 - x_0\right).$$

В этом случае естественно обозначить

$$x_1' = x_1 - x_0, \quad x_2' = x_2 - x_0,$$

и для сокращения записи этот штрих опустить.

Таким образом, мы получили систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2, \\ \ddot{x}_2 = d_{21}x_1 + d_{22}x_2; \end{cases} \tag{14}$$

в которой $d_{11} = 2f\left[\left(m_0 + m_1\right)b_{01} + m_2b_{12}\right]$, $d_{12} = 2fm_2\left(b_{02} - b_{12}\right)$, $d_{21} = 2fm_1\left(b_{01} - b_{12}\right)$, $d_{22} = 2f\left[\left(m_0 + m_2\right)b_{02} + m_1b_{12}\right]$.

Лемма 3. *Собственные значения* λ_i $\left(i = 1, 2\right)$ *матрицы*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

являются отрицательными и имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = f\left[(m_0+m_1)b_{01} + (m_0+m_2)b_{02} + (m_1+m_2)b_{12}\right] \pm$$
$$\pm f\Big[m_0^2(b_{01}-b_{02})^2 + m_1^2(b_{01}-b_{12})^2 + m_2^2(b_{12}-b_{02})^2 + 2m_0m_1(b_{01}-b_{02})(b_{01}-b_{12}) +$$
$$+2m_0m_2(b_{02}-b_{01})(b_{02}-b_{12}) + 2m_1m_2(b_{12}-b_{01})(b_{12}-b_{02})\Big]^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическое уравнение матрицы D имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2f[(m_0+m_1)b_{01}+m_2b_{12}]-\lambda & 2fm_2(b_{02}-b_{12}) \\ 2fm_1(b_{01}-b_{21}) & 2f[(m_0+m_2)b_{02}+m_1b_{21}]-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 -$$
$$-2f\left\{[(m_0+m_1)b_{01}+m_2b_{12}]+[(m_0+m_2)b_{02}+m_1b_{21}]\right\}\lambda + 4f^2[(m_0+m_1)b_{01}+m_2b_{12}]\times$$
$$\times[(m_0+m_2)b_{02}+m_1b_{21}] - 4f^2m_1m_2(b_{01}-b_{12})(b_{02}-b_{12}) =$$
$$= \lambda^2 - 2f\left[m_0(b_{01}+b_{02}) + m_1(b_{01}+b_{02}) + m_2(b_{02}+b_{12})\right]\lambda +$$
$$+4f^2(m_0+m_1+m_2)(m_0b_{01}b_{02}+m_1b_{01}b_{12}+m_2b_{02}b_{12}) = 0.$$

Прежде всего установим, что корни последнего уравнения действительные. Для этого покажем, что дискриминант δ полученной квадратичной (по λ) функции неотрицателен. Приведем дискриминант к более удобному виду:

$$\frac{\delta}{4f^2} = \left[m_0(b_{01}+b_{02}) + m_1(b_{01}+b_{02}) + m_2(b_{12}+b_{02})\right]^2 - 4(m_0+m_1+m_2)\times$$
$$\times(m_0b_{01}b_{02}+m_1b_{01}b_{12}+m_2b_{02}b_{12}) = m_0^2b_{10}^2 + 2m_0^2b_{10}b_{02} + m_0^2b_{02}^2 + m_1^2b_{01}^2 + 2m_1^2b_{01}b_{12} +$$
$$+m_1^2b_{12}^2 + m_2^2b_{12}^2 + 2m_2^2b_{12}b_{02} + m_2^2b_{02}^2 + 2m_0m_1b_{01}^2 + 2m_0m_1b_{01}b_{12} + 2m_0m_1b_{01}b_{02} +$$
$$+2m_0m_1b_{02}b_{12} + 2m_0m_2b_{01}b_{12} + 2m_0m_2b_{01}b_{02} + 2m_0m_2b_{02}b_{12} + 2m_0m_2b_{02}^2 + 2m_1m_2b_{01}b_{12} +$$
$$+2m_1m_2b_{01}b_{02} + 2m_1m_2b_{12}^2 + 2m_1m_2b_{02}b_{12} - 4m_0^2b_{01}b_{02} - 4m_0m_1b_{01}b_{12} - 4m_0m_2b_{02}b_{12} -$$
$$-4m_0m_1b_{01}b_{02} - 4m_1^2b_{01}b_{12} - 4m_1m_2b_{02}b_{12} - 4m_0m_2b_{01}b_{02} - 4m_1m_2b_{01}b_{12} - 4m_2^2b_{02}b_{12} =$$
$$= m_0^2(b_{01}-b_{02})^2 + m_1^2(b_{01}-b_{12})^2 + m_2^2(b_{12}-b_{02})^2 + 2m_0m_1(b_{01}-b_{02})(b_{01}-b_{12}) +$$
$$+2m_0m_2(b_{02}-b_{01})(b_{02}-b_{12}) + 2m_1m_2(b_{12}-b_{01})(b_{12}-b_{02}).$$

Если обозначить $s_0 = b_{01} - b_{02}$, $s_1 = b_{01} - b_{12}$, то $b_{12} - b_{02} = s_0 - s_1$, то это выражение перепишется следующим образом:

$$m_0^2s_0^2 + m_1^2s_1^2 + m_2^2(s_0-s_1)^2 + 2m_0m_1s_0s_1 + 2m_0m_2(-s_0)(s_1-s_0) + 2m_1m_2(-s_1)(s_0-s_1) =$$
$$= (m_0^2+m_2^2+2m_0m_2)s_0^2 + (m_1^2+m_2^2+2m_1m_2)s_1^2 + 2(m_0m_1 - m_2^2 - m_0m_2 - m_1m_2)s_0s_1 =$$
$$= (m_0+m_2)^2 s_0^2 + (m_1+m_2)^2 s_1^2 + 2(m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2)s_0s_1.$$

Данное выражение представляет собой квадратичную форму относительно переменных s_0, s_1 с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} (m_0+m_2)^2 & m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 \\ m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 & (m_1+m_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что матрица M является положительно определенной. Действительно, $\Delta_1 = (m_0+m_2)^2 > 0$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m_0+m_2)^2 & m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 \\ m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 & (m_1+m_2)^2 \end{vmatrix} = (m_0^2 + 2m_0m_2 + m_2^2)\times$$

$$\times\left(m_1^2+2m_1m_2+m_2^2\right)-\left(m_0m_1-m_0m_2-m_1m_2-m_2^2\right)^2=m_0^2m_1^2+2m_0^2m_1m_2+m_0^2m_2^2+$$
$$+2m_0m_1^2m_2+4m_0m_1m_2^2+2m_0m_2^3+m_1^2m_2^2+2m_1m_2^3+m_2^4-$$
$$-\left(m_0^2m_1^2+m_0^2m_2^2+m_1^2m_2^2+m_2^4\right)-2\left(-m_0^2m_1m_2-m_0m_1^2m_2-m_0m_1m_2^2+m_0m_1m_2^2+\right.$$
$$\left.+m_0m_2^3+m_1m_2^3\right)=4m_0m_1m_2\left(m_0+m_1+m_2\right)>0.$$

Здесь мы воспользовались критерием Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Отсюда, в частности, следует, что при $s_0=b_{01}-b_{02}\neq 0,\ \ s_1=b_{01}-b_{12}\neq 0$ дискриминант положителен и, значит, корни различны.

Отрицательность корней следует из теоремы Виета:

$$\lambda_1+\lambda_2=2f\left[m_0\left(b_{01}+b_{02}\right)+m_1\left(b_{01}+b_{12}\right)+m_2\left(b_{02}+b_{12}\right)\right]<0,$$
$$\lambda_1\lambda_2=4f^2\left(m_0+m_1+m_2\right)\left(m_0b_{01}b_{02}+m_1b_{01}b_{12}+m_2b_{02}b_{12}\right)>0.$$

Лемма доказана.

Решение задачи Коши для системы (14) имеет вид:

$$\vec{r}\left(t\right)=\left(\cos\sqrt{-D}\,t\right)\vec{r}\left(0\right)+\left(\sqrt{-D}\right)^{-1}\left(\sin\sqrt{-D}t\right)\dot{\vec{r}}\left(0\right),\qquad(15)$$

где $\vec{r}\left(t\right)$– вектор $\left(x_1\left(t\right),\,x_2\left(t\right)\right)$. Для того, чтобы получить координатную форму, найдем матричные функции $\left(\sqrt{-D}\right)^{-1}$, $\cos\sqrt{-D}\,t$, $\sin\sqrt{-D}\,t$.

Воспользуемся методом построения интерполяционного полинома [3].

Лемма 4. *Матрицы* $\sqrt{-D}$ *и* $\left(\sqrt{-D}\right)^{-1}$ *имеют следующий вид:*

$$\sqrt{-D}=\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{pmatrix},$$
$$\left(\sqrt{-D}\right)^{-1}=\frac{1}{\omega_1\omega_2}\begin{pmatrix}\delta_{22} & -\delta_{12}\\ -\delta_{21} & \delta_{11}\end{pmatrix},$$

где

$$\delta_{11}=\frac{\omega_1\omega_2-d_{11}}{\omega_1+\omega_2},\quad \delta_{12}=-\frac{d_{12}}{\omega_1+\omega_2},\quad \delta_{21}=-\frac{d_{21}}{\omega_1+\omega_2},\quad \delta_{22}=\frac{\omega_1\omega_2-d_{22}}{\omega_1+\omega_2},$$
$$\omega_1=\sqrt{-\lambda_1},\quad \omega_2=\sqrt{-\lambda_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения $\sqrt{-D}$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases}a_0+a_1\omega_1^2=\omega_1,\\ a_0+a_1\omega_2^2=\omega_2.\end{cases}$$

Так как

$$a_0=\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2},\ a_1=\frac{1}{\omega_1+\omega_2},$$

то

$$\sqrt{-D}=\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\begin{pmatrix}\omega_1\omega_2-d_{11} & -d_{12}\\ -d_{21} & \omega_1\omega_2-d_{22}\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$(\sqrt{-D})^{-1}=\frac{1}{\omega_1\omega_2}\begin{pmatrix}\delta_{22} & -\delta_{12}\\ -\delta_{21} & \delta_{11}\end{pmatrix}.$$

Аналогично для нахождения функций $\sin\sqrt{-D}t$, $\cos\sqrt{-D}t$ решаем относительно a_0, a_1 систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1\omega_1 = \sin\omega_1 t, \\ a_0 + a_1\omega_2 = \sin\omega_2 t; \end{cases}$$

из которой

$$a_0 = \frac{\omega_2 \sin\omega_1 t - \omega_1 \sin\omega_2 t}{\omega_2 - \omega_1}, \quad a_1 = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Далее

$$\sin\sqrt{-D}t = \frac{\omega_2 \sin\omega_1 t - \omega_1 \sin\omega_2 t}{\omega_2 - \omega_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\omega_2 - \omega_1}\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \omega_2^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix}\sin\omega_1 t - \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \omega_1^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_1^2 + d_{22} \end{pmatrix}\sin\omega_2 t,$$

где $\delta = \omega_2^2 - \omega_1^2$.

Таким же образом получаем, что

$$\cos\sqrt{-D}t = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \omega_2^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix}\cos\omega_1 t - \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \omega_1^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix}\cos\omega_2 t.$$

Далее

$$\left(\sqrt{-D}\right)^{-1}\sin\sqrt{-D}t = \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_2^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_2^2 + d_{22} \end{pmatrix}\sin\omega_1 t -$$

$$- \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1^2 + d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & \omega_1^2 + d_{22} \end{pmatrix}\sin\omega_2 t =$$

$$= \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\begin{pmatrix} \delta_{22}\left(\omega_2^2 + d_{11}\right) - \delta_{12}d_{21} & \delta_{22}d_{12} - \delta_{12}\left(\omega_2^2 + d_{22}\right) \\ -\delta_{21}\left(\omega_2^2 + d_{11}\right) + \delta_{11}d_{21} & -\delta_{21}d_{12} + \delta_{11}\left(\omega_2^2 + d_{22}\right) \end{pmatrix}\sin\omega_1 t -$$

$$- \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\begin{pmatrix} \delta_{22}\left(\omega_1^2 + d_{11}\right) - \delta_{12}d_{21} & \delta_{22}d_{12} - \delta_{12}\left(\omega_1^2 + d_{22}\right) \\ -\delta_{21}\left(\omega_1^2 + d_{11}\right) + \delta_{11}d_{21} & -\delta_{21}d_{12} + \delta_{11}\left(\omega_1^2 + d_{22}\right) \end{pmatrix}\sin\omega_2 t.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Решение задачи Коши для системы уравнений (14) имеет следующий вид:*

$$x_1(t) = \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\left\{\left[\delta_{22}\left(\omega_2^2 + d_{11}\right) - \delta_{12}d_{21}\right]\dot{x}_1(0) + \left[\delta_{22}d_{12} - \delta_{12}\left(\omega_2^2 + d_{22}\right)\right]\dot{x}_2(0)\right\}\sin\omega_1 t -$$

$$- \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\left\{\left[\delta_{22}\left(\omega_1^2 + d_{11}\right) - \delta_{12}d_{21}\right]\dot{x}_1(0) + \left[\delta_{22}d_{12} - \delta_{12}\left(\omega_1^2 + d_{22}\right)\right]\dot{x}_2(0)\right\}\sin\omega_2 t +$$

$$+ \frac{1}{\delta}\left[\left(\omega_2^2 + d_{11}\right)x_1(0) + d_{12}x_2(0)\right]\cos\omega_1 t - \frac{1}{\delta}\left[\left(\omega_1^2 + d_{11}\right)x_1(0) + d_{12}x_2(0)\right]\cos\omega_2 t;$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\left\{\left[-\delta_{21}\left(\omega_2^2 + d_{11}\right) + \delta_{11}d_{21}\right]\dot{x}_1(0) + \left[-\delta_{21}d_{12} + \delta_{11}\left(\omega_2^2 + d_{22}\right)\right]\dot{x}_2(0)\right\}\sin\omega_1 t -$$

$$- \frac{1}{\delta\omega_1\omega_2}\left\{\left[-\delta_{21}\left(\omega_1^2 + d_{11}\right) + \delta_{11}d_{21}\right]\dot{x}_1(0) + \left[-\delta_{21}d_{12} + \delta_{11}\left(\omega_1^2 + d_{22}\right)\right]\dot{x}_2(0)\right\}\sin\omega_2 t +$$

$$+\frac{1}{\delta}\left[d_{21}x_1(0)+\left(\omega_2^2+d_{22}\right)x_2(0)\right]\cos\omega_1 t-\frac{1}{\delta}\left[d_{21}x_1(0)+\left(\omega_1^2+d_{22}\right)x_2(0)\right]\cos\omega_2 t.$$

Доказательство. Подставляя найденные значения $\left(\sqrt{-D}\right)^{-1}\sin\sqrt{-D}t$, $\cos\sqrt{-D}t$ в равенство (15), получаем требуемый результат.

Аналогично получаются равенства для координат $y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2$.

Ограниченная задача трех тел. Рассмотрим случай ограниченной задачи трех тел**.**

Лемма 5. *В случае ограниченной задачи трех тел, т.е. при* $m_2=0$, *справедливы следующие равенства:*

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 2fm_1\left(b_{01}-b_{12}\right) & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \sqrt{-D}=\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ -\gamma\left(\omega_2-\omega_1\right) & \omega_2\end{pmatrix},$$

$$\left(\sqrt{-D}\right)^{-1}=\frac{1}{\omega_1\omega_2}\begin{pmatrix}\omega_2 & 0\\ \gamma\left(\omega_2-\omega_1\right) & \omega_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\omega_1} & 0\\ \gamma\left(\dfrac{1}{\omega_1}-\dfrac{1}{\omega_2}\right) & \dfrac{1}{\omega_2}\end{pmatrix},$$

$$\sin\sqrt{-D}t=\begin{pmatrix}\sin\omega_1 t & 0\\ -\gamma\left(\sin\omega_2 t-\sin\omega_1 t\right) & \sin\omega_2 t\end{pmatrix},$$

$$\cos\sqrt{-D}t=\begin{pmatrix}\cos\omega_1 t & 0\\ -\gamma\left(\cos\omega_2 t-\cos\omega_1 t\right) & \cos\omega_2 t\end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_1=2f\left(m_0+m_1\right)b_{01},\quad \lambda_2=2f\left(m_0b_{02}+m_1b_{12}\right),$$

$$b_{ij}=-\frac{1}{2a_{ij}^3\left(1-e_{ij}^2\right)}<0\ \left(i,\ j=0,1,2,\ i\neq j\right),$$

$$\omega_j=\sqrt{-\lambda_j}\ \left(j=1,2\right),\quad \gamma=\frac{2fm_1\left(b_{01}-b_{12}\right)}{\omega_2^2-\omega_1^2}=\frac{1}{1+\dfrac{m_0\left(b_{01}-b_{02}\right)}{m_1\left(b_{01}-b_{12}\right)}}.$$

Доказательство проводится подстановкой элементов матрицы D в соответствующие выражения.

Теорема 2. *Решение системы дифференциальных уравнений (14) в случае ограниченной задачи трех тел имеет следующий вид:*

$$x_1(t)=x_1(0)\cos\omega_1 t+\frac{\dot{x}_1(0)}{\omega_1}\sin\omega_1 t;$$

$$x_2(t)=\gamma x_1(0)\cos\omega_1 t+\frac{\gamma}{\omega_1}x_1(0)\sin\omega_1 t+$$

$$+\left[x_2(0)-\gamma x_1(0)\right]\cos\omega_2 t+\frac{1}{\omega_2}\left[\dot{x}_2(0)-\gamma\dot{x}_1(0)\right]\sin\omega_2 t=$$

$$=\gamma x_1(t)+\left[x_2(0)-\gamma x_1(0)\right]\cos\omega_2 t+\frac{1}{\omega_2}\left[\dot{x}_2(0)-\gamma\dot{x}_1(0)\right]\sin\omega_2 t. \quad (16)$$

Доказательство вытекает из теоремы 1. Аналогичные формулы имеют место и для координат $y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2$.

Точки либрации. В небесной механике точкой либрации называется векторная функция $\vec{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$, связанная с векторной функцией $\vec{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ равенством:

$$\vec{r}_2(t) = \gamma \vec{r}_1(t). \quad (17)$$

Если в равенстве (16) начальные условия таковы, что выражения в квадратных скобках равны нулю, то выполняется равенство (17).

Заключение. В настоящей статье проведена аппроксимация потенциала общей задачи трех тел квадратичными полиномами наилучшего чебышевского приближения. Такой способ приближения позволяет построить линейную модель гравитационного взаимодействия трех тел как в абсолютных, так и в относительных координатах. В свою очередь линейная модель позволяет решить (что и делается в статье) задачу Коши в явном аналитическом виде. Найдены кинематические характеристики движущихся тел, при которых возникает тип движения, называемый в небесной механике точкой либрации и соответствующий некоторым реальным движениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Дубошин, Г.Н.*** Небесная механика. Основные задачи и методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1975. – С. 735.
2. ***Трубников, Ю.В.*** Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М.: Asstro Press, 2002. – С. 100.
3. ***Гантмахер, Ф.Р.*** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – С. 29–32.

SUMMARY

In this article we make the approximation capacity of the general three-body problem by quadratic polynomials, the best Chebyshev approximation. This method of approach allows us to construct a linear model of the gravitational interaction of three bodies both in absolute and in relative coordinates. In turn, the linear model can be solved (which is done in the article) the Cauchy problem in explicit analytical form.

Поступила в редакцию 12.03.2010