УДК 512.542.63

О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не π-разложимых формациях

В.М. Селькин

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Пусть Θ – некоторая непустая совокупность формаций. Формации принадлежащие Θ называются Θ-формациями. Θ-формация F называется H_Θ-критической формацией [1], или минимальной не H_Θ-формацией [2], если $\mathrm{F} \not\subseteq \mathrm{H}$, но в классе групп H содержится всякая собственная Θ-подформация из F. Если Θ-формации F и H такие, что $\mathrm{F} \not\subseteq \mathrm{H}$, тогда, в большинстве случаев, можно показать, что F содержит, по крайней мере, одну H_Θ-критическую подформацию. Этот факт указывает на важность изучения критических формаций. Общая проблема изучения H_Θ-критических формаций впервые была поставлена Л.А. Шеметковым в работе [2]. В случае когда $\Theta = 1$ является классом всех локальных формаций, данная проблема была решена А.Н. Скибой в [3]. Описание H_Θ-критических формаций, в случае когда Θ является классом наследственных локальных формаций, представлено в [4]. Основные результаты исследований, проводимых в данном направлении, представлены в книгах Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [5–6], Венбин Го [7]. Существенный вклад в теорию критических формаций внесли К.П. Шам и Венбин Го [8], где были описаны минимальные тотально-локальные ненильпотентные формации. После выхода работы Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [9] начались изучения минимальных ω-локальных не H-формаций [10–12]. Следуя основным результатам работ [3, 4, 10–12], мы опишем минимальные τ-замкнутые ω-локальные не π-разложимые формацией.

Теорема. *Тогда и только тогда формация F является минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не π-разложимой формацией, когда $\mathrm{F} = t^{w}\mathrm{form}(G)$, где G – такая $\overline{\tau}$-минимальная не π-разложимая группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathrm{G}_{\pi'}\mathrm{G}_\pi \cap \mathrm{N}_\pi \mathrm{G}_{\pi'}}$, что G – πd-группа, и если $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, то выполняется одно из следующих условий:*

1) G – простая неабелева группа, не имеющая неединичных собственных τ-подгрупп;

2) P – неабелева группа, $\pi(P) \cap \omega \cap \pi = p$ и $\pi(P) \cap \omega \cap \pi' = \varnothing$, G – $\overline{\tau}$-минимальная не N_p-группа с монолитом $P = G^{N_p}$;

3) если P – неабелева группа и $\pi(P) \cap \omega \cap \pi = \varnothing$, то G – $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathrm{G}_{\pi'}$ с монолитом $P = G^{\mathrm{G}_{\pi'}}$, являющимся πd-группой;

4) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \pi$, H – простая группа, не имеющая неединичных собственных τ-подгрупп.

Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, УО «ГГУ им. Ф. Скорины», fax: (00375232)578111 – Селькин В.М.

5) G – группа Шмидта.

Определения и некоторые предварительные результаты. В группе G выберем некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Следуя А.Н. Скибы [6], τ называется подгрупповым функтором, если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G,

2) для любого эпиморфизма и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация F называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \mathrm{H}\, \mathrm{F}$ для любой группы $G \in \mathrm{F}$. Для подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \le \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G. Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если всегда из того, что $T \in \tau(H)$, $H \in \tau(G)$, следует, что $T \in \tau(G)$. Символом $\bar{\tau}$ обозначается наименьший замкнутый подгрупповой функтор со свойством $\tau \le \bar{\tau}$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Всякая функция вида:

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{\text{ формации групп}\}$$

называется ω-локальным спутником [9]. Если все значения ω-локального спутника f являются τ-замкнутыми формациями, то f называется τ-замкнутым ω-локальным спутником. Символом $LF_{\omega} < f >$ обозначим класс групп $(G \mid G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$, для любого произвольного ω-локального спутника f. Пусть $\mathrm{F} = LF_{\omega} < f >$, то говорим, что f – ω-локальный V-спутник формации F. В этом случае мы называем F ω-локальной формацией. Если при этом все значения f лежат в F, то f будем называть внутренним ω-локальным V-спутником формации F.

Пусть X – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают

$$\mathrm{X}(\mathrm{F}_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathrm{X}), & \text{для всех } p \in \pi(\mathrm{X}); \\ \varnothing, & \text{если } \mathrm{p} \in \pi(\mathrm{X}). \end{cases}$$

Если формация F такая, что $\mathrm{F} = LF_{\omega} < f >$, где $F(\omega') = \mathrm{F}$ и $F(p) = \mathrm{N}_p\mathrm{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$, тогда спутник F называется каноническим ω-локальным V-спутником формации F. Символом $\tau^{\omega}\mathrm{form}(\mathrm{X})$ обозначаем пересечение всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, содержащих непустое множество групп X. V-спутник формации F называется минимальным τ-значным ω-локальным V-спутником формации F, если $f(\omega') = \mathrm{form}(\mathrm{G}/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathrm{F})$ и $f(p) = \mathrm{form}(\mathrm{F}(F_p))$ для всех простых $p \in \omega$.

Сформулируем в виде леммы основной результат работ [13].

Лемма 1. *Пусть H – ω-насыщенная формация с внутренним τ-значным ω-локальным V-спутником H, F – ω-насыщенная формация с минимальным внутренним τ-значным ω-локальным V-спутником f. Тогда в том и только в том случае F – $H_{\tau^{\omega}}$-критическая формация, когда $\mathrm{F} = t^{w}\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$-минимальная не H-группа с монолитом $P = G^{H}$, что-либо $P \subseteq O_{\omega}(G)$ и $f(p)$ – $(H(p))_{\tau}$-критическая* *формация для всех* $p \in \pi(P)$*, либо* $O_\omega(G)=1$ *и* $f(\omega')$ *–* H_τ*-критическая формация,* $f(p)$ *–* $(H(p))_\tau$*-критическая формация для всех* $p \in \pi(P)\cap\omega$*.*

Лемма 2. *Пусть* G *– монолитическая группа с неабелевым монолитом* P*. И пусть* $\pi(P)\cap\omega \neq \varnothing$ *и* $\pi(P) \not\subseteq \omega$*. Тогда максимальная* τ*-замкнутая* ω*-насыщенная подформация* M *формации* $\mathrm{F} = t^{w}\mathrm{form}(G)$ *имеет такой внутренний* τ*-значный* ω*-локальный* V*-спутник* m*, что*

$$m(a)=\begin{cases}\tau\mathrm{form}(\mathrm{X}\cup\{G/P\}), & \text{если } a=q\in\pi=\omega\cap\pi(P),\\ \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a=q\in\omega\cap(\pi(G)\ ,\ \pi(P)),\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\ ,\ \ \pi(G),\\ \tau\mathrm{form}(\mathrm{X}\cup\{G/P\}), & \text{если } a=\omega',\end{cases}$$

где X *– множество всех собственных* τ*-подгрупп группы* G*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f – минимальный τ-значный ω-локальный V-спутник формации F. По лемме 5 [9]

$$f(a)=\begin{cases}\tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a=q\in(\omega\cap\pi(G))\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\ ,\ \ \pi(G),\\ \tau\mathrm{form}(G/O_\omega(\mathrm{G})), & \text{если } a=\omega'.\end{cases}$$

Поскольку для каждого $p\in\pi(P)$ имеет место $F_p(G)=1$ и $O_\omega(\mathrm{G})=1$, то

$$f(a)=\begin{cases}\tau\mathrm{form}(G), & \text{если } a=q\in\omega\cap\pi(P),\\ \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a=q\in\omega\cap(\pi(G)\ ,\ \pi(P)),\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\ ,\ \ \pi(G),\\ \tau\mathrm{form}(G), & \text{если } a=\omega'.\end{cases}$$

Рассмотрим формацию $\mathrm{M}=LF_\omega<m>$, где m – V-спутник из условия леммы. Покажем, что M – максимальная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация формации F. Пусть H – произвольная собственная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация формации F и h – минимальный τ-значный ω-локальный V-спутник формации H. Тогда ввиду леммы 6 [9] $h\le f$. Пусть $a\in\omega\cup\omega'$ и $h(a)\subseteq f(a)$. Если $a\in\omega\cap(\pi(G)\setminus\pi(P))$, то $m(a)=f(a)$. Значит, $h(a)\subseteq m(a)$. В случае, когда $a\in\omega\setminus\pi(G)$ имеем $h(a)=f(a)=m(a)=\varnothing$.

Если $a\in\omega\cap\pi(P)$ или $a=\omega'$, то по лемме 2.1.5 [6] $m(a)=\tau\mathrm{form}(\mathrm{X}\cup\{G/P\})$ – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $f(a)=\tau\mathrm{form}(G)$. Значит, $h(a)\subseteq m(a)$. Итак, для всех $a\in\omega\cup\omega'$ имеет место $h(a)\subseteq m(a)$. Поэтому $\mathrm{H}\subseteq\mathrm{M}$. Из описания V-спутника m мы имеем $m\le f$, т.е. $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{F}$. Предположим, что $\mathrm{M}=\mathrm{F}$. Тогда $f\le m$. Значит,

$$\tau\mathrm{form}(G)=f(\omega')\subseteq m(\omega')=\tau\mathrm{form}(\mathrm{X}\cup\{G/P\}),$$

что противоречит лемме 2.1.5 [6]. Итак, $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{F}$. Таким образом, M – единственная максимальная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация формации F.

Покажем теперь, что m – внутренний ω-локальный V-спутник формации M. Пусть A – произвольная группа из X. Покажем, что

$$A/F_p(A)\in m(p)=\tau\mathrm{form}(\mathrm{G}/\mathrm{F}_\mathrm{p}(G))$$

для всякого $p\in\omega\cap\pi(P)$. Если $p\in\omega\cap\pi(P)$ то, очевидно,

$$A/F_p(A)\in m(p)=\tau\mathrm{form}(\mathrm{X}\cup\{G/P\}).$$

Пусть $p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$. Тогда $m(p) = \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_p}(G))$. Рассмотрим τ-подгруппу $AF_p(G)/F_p(G)$ группы $G/F_p(G)$. Тогда

$$A/(F_p(G) \cap A) \cong AF_p(G)/F_p(G) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_p}(G)).$$

Но $F_p(G) \cap A \subseteq F_p(A) \subseteq A$. Значит, $A/F_p(A) \subseteq \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_p}(G)) = m(p)$ для всякого $p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$. При этом очевидно $A/O_\omega(A) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\}) = m(\omega')$.

Таким образом, $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{M} = LF_\omega < m >$. Рассмотрим группу G/P. Если $p \in \omega \cap \pi(P)$, то $(G/P)/F_p(G/P) \in m(p) = \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\})$. Пусть $p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$. Тогда $m(p) = \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_p}(G))$. Но

$$(G/P)/F_p(G/P) = (G/P)/(F_p(G/P)) \cong G/F_p(G).$$

Значит, $(G/P)/F_p(G/P) \in m(p) = \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_p}(G))$ для всех $p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$.

Кроме того, $(G/P)/O_\omega(G/P) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\}) = m(\omega')$. Следовательно, $G/P \in \mathrm{M} = LF_\omega < m >$.

Рассмотрим теперь группу $G/F_p(G)$, где p – произвольное число из $\omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$. Для произвольного $q \in \omega \cap \pi(G/F_p(G))$ покажем, что $(G/F_p(G))/F_q(G/F_p(G)) \in m(q)$. Пусть $q \in \omega \cap \pi(P)$. Так как P – p'-группа, то $P \in F_p(G)$. Значит, $G/F_p(G) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\})$. Следовательно,

$$(G/F_p(G))/F_q(G/F_p(G)) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\}) = m(q)$$

для всякого $q \in \omega \cap \pi(G/F_p(G))$. Пусть теперь $q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$, тогда $m(q) = \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_q}(G))$. Так как $F_q(G) \subseteq F_q(G)F_p(G) \subseteq G$, то

$$G/F_q(G)F_p(G) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_q}(G)).$$

Следовательно,

$$(G/F_p(G))/(F_q(G)F_p(G)/F_p(G)) \cong G/F_q(G)F_p(G) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_q}(G)).$$

Но,

$$F_q(G)F_p(G)/F_p(G) \cong F_q(G)/(F_p(G) \cap G) \subseteq G/F_p(G).$$

Таким образом, $F_q(G)F_p(G)/F_p(G) \subseteq F_q(G/F_p(G))$. Значит,

$$(G/F_p(G))/F_q(G/F_p(G)) \in \tau\mathrm{form}(\mathrm{G/F_q}(G)) = m(q).$$

Покажем теперь, что $(G/F_p(G))/O_\omega(G/F_p(G)) \in m(\omega') = \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\})$ для любого $p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$. Так как P – p'-группа, то $P \subseteq F_p(G)$ для всякого $p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$. Следовательно, $G/F_p(G) \in m(\omega') = \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\})$. Таким образом, $(G/F_p(G))/O_\omega(G/F_p(G)) \in m(\omega') = \tau\mathrm{form}(\mathrm{X} \cup \{G/P\})$. Следовательно, по определению формации $\mathrm{M} = LF_\omega < m >$ имеем, что $G/F_p(G) \in \mathrm{M}$ для всякого $p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(P))$. Значит, m – внутренний τ-значный ω-локальный V-спутник формации M. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Формация H всех π-разложимых групп может быть представлена в виде $\mathrm{G}_{\pi'}\mathrm{G}_\pi \cap \mathrm{N}_\pi \mathrm{G}_{\pi'}$. Ввиду теоремы 1 [9] канонический V-спутник H формации H имеет вид

$$H(a) = \begin{cases} \mathrm{N_p}, & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi \\ \mathrm{G}_{\pi'}, & \text{если } a = q \in \omega \text{ , } \ \pi, \\ H, & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Необходимость. Так как по условию формация $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не π-разложимой формацией, то ввиду леммы 1 $\mathfrak{F} = t^{w}\text{form}(G)$, где G – такая монолитическая $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $P \subseteq O_{\omega}(G)$ и $f(p)$ – $(H(p))_{\tau}$-критическая формация для всех $p \in \pi(P)$, либо $O_{\omega}(G) = 1$ и $f(\omega')$ – $\mathfrak{H}_{\tau}$-критическая формация, $f(p)$ – $(H(p))_{\tau}$-критическая формация для всех $p \in \pi(P) \cap \omega$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ максимальную ω-насыщенную τ-замкнутую подформацию формации $\mathfrak{F}$.

Предположим, что $\pi(G) \cap \pi = \varnothing$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что G – πd-группа. Пусть P – неабелева ω'-группа. Тогда, ввиду теоремы 1 [14], формация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний τ-значный ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a) = \begin{cases} \tau\text{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a = q \in (\omega \cap \pi(G)) \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega, \quad \pi(G), \\ \tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/P\}), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Так как по условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то $m(\omega') \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $(\mathfrak{X} \cup \{G/P\}) \subseteq \mathfrak{H}$. Очевидно, что $G \notin \mathfrak{H}$. Значит, G – $\overline{\tau}$-минимальная не H-группа с монолитом $P = G^{H}$.

Пусть теперь $\pi(P) \subseteq \omega$. Тогда, ввиду теоремы 2 [14], формация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний τ-значный ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a) = \begin{cases} \tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/P\}), & \text{если } a = q \in \pi(P), \\ \tau\text{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a = q \in \omega \cap (\pi(G), \quad \pi(P)), \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega, \quad \pi(G), \\ \tau\text{form}(G/O_{\omega}(G)), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Предположим, что $\pi(P) \cap \pi = p$. Тогда существует такое простое число $q \in \pi(P)$, что $q \neq p$. Так как по условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то

$$\tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/P\}) \subseteq H(p) \cap H(q) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{G}_{\pi'} = 1.$$

Следовательно, $G = P$ – простая неабелева πd-группа, не имеющая собственных τ-подгрупп.

Не теряя общности, предположим, что $\pi(P) \cap \pi = \{p, q\}$. Тогда

$$\tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/P\}) \subseteq H(p) \cap H(q) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = 1.$$

Таким образом, $G = P$ – простая неабелева πd-группа, не имеющая собственных неединичных τ-подгрупп.

Предположим теперь, что $\pi(P) \cap \pi = \varnothing$. Тогда

$$m(q) = \tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/P\}) \subseteq H(q) = \mathfrak{G}_{\pi'},$$

где $q \in \pi(P)$. Значит, $G/P \in \mathfrak{G}_{\pi'}$. Но, ввиду нашего предположения, P – π'-группа. Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{G}_{\pi'} = \mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что данный случай не имеет места.

Рассмотрим случай, когда $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$ и $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Тогда, ввиду леммы 2, формация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний τ-значный ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a)=\begin{cases}\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\}), & \text{если } a=q\in\pi=\omega\cap\pi(P),\\ \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a=q\in\omega\cap(\pi(G)\ ,\ \pi(P)),\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\ ,\ \pi(G),\\ \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\}), & \text{если } a=\omega',\end{cases}$$

где X – множество всех собственных τ-подгрупп группы G.

Предположим, что $\pi(P)\cap\omega\cap\pi=\{p\}$ и $\pi(P)\cap\omega\cap\pi'=\varnothing$. Тогда $m(p)=\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\})\subseteq H(p)=\mathfrak{N}_p$. Следовательно, G – $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{N}_p$-группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{N}_p}$.

Пусть теперь $\pi(P)\cap\omega\cap\pi=\{p\}$ и $\pi(P)\cap\omega\cap\pi'=\{q\}$. Тогда $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\})\subseteq H(p)\cap H(q)=\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{G}_{\pi'}=1$. Таким образом, $G=P$ – простая неабелева πd-группа, не имеющая собственных неединичных τ-подгрупп.

Если $\pi(P)\cap\omega\cap\pi=\{p,q\}$, то, используя рассуждения приведенные выше, можно показать, что $G=P$ – простая неабелева πd-группа, не имеющая собственных неединичных τ-подгрупп.

Предположим теперь, что $\pi(P)\cap\omega\cap\pi=\varnothing$. Тогда $m(q)=\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\})\subseteq H(q)=\mathfrak{G}_{\pi'}$, для всякого простого $q\in\pi(P)\cap\omega$. Если P – π'-группа, то $G\in\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{G}_{\pi'}=\mathfrak{G}_{\pi'}\subseteq\mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что G – $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{G}_{\pi'}$-группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$, являющимся πd-группой.

Пусть теперь P – абелева p-группа Тогда $G=[P]H$, где $P=C_G(P)$ – минимальная нормальная p-подгруппа группы G. Пусть $p\notin\omega$. Тогда, ввиду теоремы 1 [14], формация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний τ-значный ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a)=\begin{cases}\tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a=q\in(\omega\cap\pi(G))\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\ ,\ \pi(G),\\ \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\}), & \text{если } a=\omega',\end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Так как $m(\omega')=\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/P\})\subseteq H(\omega')=\mathfrak{H}$, то G – $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$.

Пусть $p\in\omega$. Тогда, ввиду теоремы 3 [14], формация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний τ-значный ω-локальный V-спутник m, что

$$m(a)=\begin{cases}\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{H/Q\}), & \text{если } a=p,\\ \tau\mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a=q\in\omega\cap(\pi(G)\ ,\ p\}),\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\ ,\ \pi(G),\\ \tau\mathrm{form}(G/O_\omega(G)), & \text{если } a=\omega',\end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы H. Если $p\in\pi$, то $m(p)=\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{H/Q\})\subseteq H(p)=\mathfrak{N}_p$. Предположим, что $Q\neq H$. Так как $H/Q\in\mathfrak{N}_p$ и $H\in\mathfrak{H}$, то H – p-группа. Таким образом, $G/P \square H\in\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{H}$. Значит, $G\in\mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $H=Q$ – простая группа, не имеющая неединичных собственных τ-подгрупп.

Предположим теперь, что $p\notin\pi$. Тогда

$$m(p)=\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{H/Q\})\subseteq H(p)=\mathfrak{G}_{\pi'}.$$

Если H – π'-группа, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, H – πd-группа. Значит, существует такое простое число $q \in \pi(H) \cap \pi$. Предположим, что $H \neq Q$. Так как $H/Q \in \mathfrak{G}_{\pi'}$ и $H \in \mathfrak{H}$, то существует такая нормальная π'-холловская подгруппа K, что $Q \subseteq K$. Но H – πd-группа. Следовательно, существует такая нормальная πd-подгруппа F, что $Q \subseteq F$. Противоречие. Значит, $H = Q$. А так как H – монолитическая группа и $H \in \mathfrak{H}$, то она является q-группой. Следовательно, $|H| = q \neq p$. Таким образом, G – группа Шмидта.

Доказательство достаточности вытекает непосредственно из леммы 1. Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ***Скиба, А.Н.*** О критических формациях / А.Н. Скиба // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 780–782.
2. ***Шеметков, Л.А.*** Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев, 1980. – С. 37–50.
3. ***Скиба, А.Н.*** О критических формациях / А.Н. Скиба // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 258–268.
4. ***Селькин, В.М.*** О наследственных критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Сибирский мат. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1145–1153.
5. ***Шеметков, Л.А.*** Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
6. ***Скиба, А.Н.*** Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
7. ***Wenbin, Guo.*** The Theory of Classes of Groups / Guo Wenbin. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 275 p.
8. ***Wenbin, Guo.*** On totally local formations of groups / Guo Wenbin, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – № 5. – P. 2117–2131.
9. ***Shemetkov, L.A.*** Multiply ω-local formations and Fitting classes of finete groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Matem. Trudy. – 1999. – № 2. – P. 114–147.
10. ***Сафонова, И.Н***. О минимальных ω-локальных не-L-формациях / И.Н. Сафонова // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2. – С. 23–27.
11. ***Селькин, В.М.*** Минимальные наследственные ω-локальные формации / В.М. Селькин // Укр. мат. журнал. – 2002. – № 3. – С. 460–469.
12. ***Селькин, В.М.*** Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – № 5. – С. 9–11.
13. ***Селькин, В. М.*** О $\mathfrak{H}_{\theta^{\omega}}$-критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1999. – № 14. – С. 127–131.
14. ***Селькин, В.М.*** Формации с единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией / В.М. Селькин // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 25–29.

S U M M A R Y

In this paper we describe the minimal τ-closed ω-local non-decomposable-formations.

Поступила в редакцию 11.11.2009