УДК 512.534

М.И. Наумик

О дистрибутивности решетки конгруэнций на полугруппе линейных отношений

В данной работе продолжается изучение конгруэнций полугруппы линейных отношений. Используя результаты [1], автор доказывает, что решетка конгруэнций полугруппы линейных отношений является дистрибутивной. Данный результат анонсирован в [2] и является продолжением развития идеи академика А.И. Мальцева.

Пусть *V* – левое векторное пространство над произвольным телом *F*, *LR(V)* – полугруппа линейных отношений. Все далее используемые обозначения и определения отражены в [1, 3, 4].

Приведем описание конгруэнций из работы [1].

Пусть n – целое положительное число, ν, ν' – кардинальные числа равные 1 (при n = 1) или превосходящие $\aleph_0$ при любом n; Q_μ ($n + 1 \le \mu \le \dim V$) – подгруппы группы Z^*, удовлетворяющие условию $Q_\xi \subseteq Q_\mu$ при $\mu \le \xi$. Пусть далее e – идемпотент некоторого H-класса $H_e \subset D_n$, N_e – нормальный делитель группы H_e такой, что $Q_{n+1}e \subseteq N_e$. Определим отношение δ на полугруппе $LR(V)$ следующим образом: $a\delta b$ тогда и только тогда, когда

$a, b \in LR_n(V)$ и $\dim(pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu$, $\dim(pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu$, $\dim(pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu'$, $\dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu'$;

$a, b \in D_n$ и существуют такие $c, d \in D_n$, что $a, b \in cN_ed$ или $a, b \in D_\mu$ ($\mu > n$) и $b = \alpha a$ при некотором $\alpha \in Q_\mu$.

Пусть k – натуральное число, ν_i, μ_i ($i = 1, \ldots, k$), ν, ν' – кардинальные числа, удовлетворяющие условиям:

1) $\nu_k < \nu_{k-1} < \ldots < \nu_1 \le \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k \le \dim V = \nu_{k+1}$;

2) все ν_i и μ_i бесконечны за исключением, быть может, ν_k, если ν_k конечно, то $\nu_k = 0$;

3) $\mu_1 \le \nu$, $\mu_1 \le \nu'$.

Пусть далее Q_μ ($\mu_1 \le \mu \le \dim V$) – ненулевые мультипликативные подгруппы центра тела F такие, что $Q_\mu \subseteq Q_\xi$ при $\xi \le \mu$. Определим следующее отношение σ на полугруппе $LR(V)$:

$a\sigma b$ тогда и только тогда, когда

$a, b \in LR_{\mu_1}(V)$ и $\dim(pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu$, $\dim(pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu$, $\dim(pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu'$, $\dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu'$, или

$a, b \in D_\mu$ ($\mu_i \le \mu < \mu_{i+1}$),

$b'_{pr_1a \cap pr_1b} = \alpha a'_{pr_1a \cap pr_1b} + f$, $b''_{pr_2a \cap pr_2b} = \alpha^{-1} a''_{pr_2a \cap pr_2b} + f_1$ при некоторых $\alpha \in Q_\mu$, $f, f_1 \in LR_{\nu_i}(V)$ ($pr_1f = pr_1a \cap pr_1b$, $\operatorname{coker} f = \{\bar{0}\}$,

$pr_2f_1 = pr_2a \cap pr_2b$, $\ker f_1 = \{\bar{0}\}$), $b' = \langle(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in V_2', (\bar{x}, \bar{y}) \in b\rangle$,

$b'' = \langle(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} \in V_1', (\bar{x}, \bar{y}) \in b\rangle$, $a' = \langle(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in V_2, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\rangle$,

$a'' = \langle(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} \in V_1, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\rangle$, $pr_1a = \ker a \oplus V_1$, $pr_2a = \operatorname{coker} a \oplus V_2$,

$pr_1b = \ker b \oplus V_1'$, $pr_2b = \operatorname{coker} b \oplus V_2'$, где V_1, V_2, V_1', V_2' – некоторые прямые дополнения пространства $\ker a$, $\operatorname{coker} a$, $\ker b$, $\operatorname{coker} b$ в pr_1a, pr_2a, pr_1b, pr_2b соответственно и

$\dim(pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu_i$, $\dim(pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu_i$,
$\dim(pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu_i$, $\dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu_i$.

Теорема 1. *Отношения δ и σ являются конгруэнциями на полугруппе LR(V). Всякая конгруэнция на полугруппе LR(V) совпадает с одним из отношений δ или σ.*

Основные результаты. Здесь мы докажем основной результат нашей работы.

Теорема 2. *Решетка конгруэнций на LR(V) является подрешеткой решетки всех линейных отношений на LR(V). В частности, она является дистрибутивной решеткой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В решетке конгруэнций на любой полугруппе операция пересечения совпадает с операцией теоретико-множественного пересечения. Для доказательства теоремы достаточно установить, что операция объединения в решетке конгруэнций на $LR(V)$ совпадает с операцией теоретико-множественного объединения.

Пусть ρ и τ – две конгруэнции на *LR(V)*. Обозначим V операцию объединения в решетке конгруэнций на *LR(V)*, так что $\rho V\tau$ есть пересечение всех конгруэнций на *LR(V)*, которые содержат ρ и τ. Мы должны установить, что $\rho V\tau = \rho\cup\tau$. Доказательство разобьем на несколько случаев.

1. Если одно из отношений ρ и τ является отношением равенства или универсальной конгруэнцией, то ясно, что $\rho V\tau = \rho\cup\tau$.

2. Пусть $\eta(\rho) = n$ конечно (так что $\rho = \sigma'$, где σ есть конгруэнция на $LR_{n+1}(V) / LR_n(V)$ и $\eta(\tau)$ бесконечно, $\rho(\nu,\nu')$ и $\tau(\nu_1,\nu_1')$ ограниченная конгруэнцией ρ и τ на $LR_1(V)$. Пусть далее наибольшее из ν и ν_1 будет ν_2, а наибольшее из ν' и ν_1' будет ν_2'. Возьмем конгруэнцию τ_1, определяющую цепочку нормальных делителей конгруэнций τ и $\tau_1(\nu_2,\nu_2')$. Мы имеем $\rho V\tau = \tau_1$ = = $\rho\cup\tau$.

3. Пусть $\eta(\rho) = n$ и $\eta(\tau) = m$ и оба числа m и n конечны и $n < m$. Возьмем конгруэнцию τ_1, определяющую цепочку нормальных делителей конгруэнции τ и $\tau_1(\nu_2,\nu_2')$. Мы имеем $\rho V\tau = \tau_1 = \rho\cup\tau$. Если $m = n$, то $\rho V\tau = \tau_1 = \rho\cup\tau$, так как нормальные делители полной линейной группы образуют цепь.

4. Пусть $\eta(\rho)$ и $\eta(\tau)$ оба бесконечны. Пусть далее наибольшее из ν и ν_1 будет ν_2, а наибольшее из ν_1, ν_1' будет ν_2' и $\eta = \max\{\text{rank } a, \text{rank } b\}$. Если ξ – бесконечное кардинальное число, то положим

$$\Delta\xi = \{ (a; b) \in LR(V) \times LR(V) \mid \eta < \xi \}.$$

Мы можем записать $\rho\cup\tau$ как пересечение отношений типа I_η^*, $\Delta\xi$ и $I_\eta^* \cup \Delta\xi$, где η и ξ бесконечны. Легко показать, что $I_\eta^* \cup \Delta\xi$ всегда являются конгруэнцией на *LR*(*V*), а этого достаточно, чтобы установить равенство $\rho V\tau = \rho\cup\tau$.

Теорема доказана.

Заключение. Мы показали, что решетка конгруэнций полугруппы линейных отношений *LR*(*V*) является дистрибутивной. Это показывает, что идеи А.И. Мальцева [5] находят дальнейшее развитие и в полугруппе линейных отношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Наумик, М.И.*** Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.
2. ***Наумик, М.И.*** О решетке конгруэнций полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения–2009». – Новосибирск, 2009. – С. 161. http://www.math.nse.ru/conference/malmeet/09/Abs.hts
3. ***Клиффорд, А.*** Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М., 1972. – Т. 1. – 286 с.
4. ***Клиффорд, А.*** Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М., 1972. – Т. 2. – 422 с.
5. ***Мальцев, А.И.*** Мультипликативные сравнения матриц / А.И. Мальцев // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 90, № 3. – С. 333–335.

S U M M A R Y

The following work proves that the lattice congruence of the line relation semigroup is distributional.

Поступила в редакцию 8.02.2010