

О существовании и сопряженности π -нильпотентных инъекторов в частично разрешимых группах

Все рассматриваемые группы конечны.

Один из основополагающих результатов в теории классов Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп – обобщение теорем Силова и Холла, которое представляет теорема Гашюца–Фишера–Хартли [1], о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены в G .

Напомним, что подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$ -максимальной [2], если $V \in \mathfrak{F}$ и из того, что $V \subseteq U \subseteq G$, $U \in \mathfrak{F}$, всегда следует, что $V = U$. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют ее $\mathfrak{F}$ -инъектором [2], если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп группы N , принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы N из G .

Расширение этого результата на случай класса $\mathfrak{S}$ всех конечных групп в общем случае невозможно (например, уже для $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ и $G = A_5$ это неверно). Задача существования и сопряженности инъекторов для специальных случаев классов Фиттинга в произвольных группах рассматривалась многими авторами. В частности, Форстером [3] доказано существование $\mathfrak{N}$ -инъекторов, где $\mathfrak{N}$ – класс всех nilпотентных групп, в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных групп, а Блессенолем и Лауе [4] доказаны существование и сопряженность, а также получена характеристика инъекторов в классе $\mathfrak{S}$ для класса $\mathfrak{N}^*$ квазинильпотентных групп. Некоторые результаты при дополнительных ограничениях либо на класс Фиттинга либо на группу в этом направлении можно найти в работе Иранцо и Переса Моназора [5]. Позднее В.С. Монаховым [6] было установлено существование инъекторов в классе $\mathfrak{S}$ для классов всех разрешимых π -групп $\mathfrak{S}_\pi$ и всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$.

Ориентиром для поиска разрешимых $\mathfrak{X}$ -инъекторов в классе $\mathfrak{S}$ служит следующая

Проблема (Л.А. Шеметков, проблема 11.117 [7]). Пусть $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ – класс Фиттинга. Верно ли, что каждая неразрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$ -инъектором?

Понятно, из указанных выше результатов следует, что проблема Л.А. Шеметкова положительно решена только для класса Фиттинга $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{N}\}$.

Вместе с тем самостоятельный интерес представляет также задача отыскания классов сопряженных инъекторов в π -разрешимых группах. Перспективность такой задачи определяет известная в теории групп теорема С.А. Чунихина [8–9] о существовании и сопряженности холловских π -групп ($\mathfrak{S}_\pi$ -инъекторов) в π -разрешимой группе.

Классы сопряженных $\mathfrak{F}$ -инъекторов в π -разрешимых группах для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ впервые были найдены Л.А. Шеметковым [10]. Он установил, что для любого

класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}$ в любой $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены в G . Более того, Л.А. Шеметковым [11] доказано, что в любой π -разрешимой группе существует единственный класс сопряженных π -разложимых инъекторов.

Напомним, что через $\pi(\mathfrak{F})$ мы обозначили здесь множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$.

Настоящая работа посвящена изучению классов сопряженных инъекторов в частично разрешимых группах и их характеристике. В определениях и обозначениях мы следуем [2].

Предварительные сведения. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;
- 2) из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение AB принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$ -подгруппу группы G называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Заметим, что произведение двух любых классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Приведем в качестве лемм некоторые известные утверждения, которые мы будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 [2]. Для любой группы G справедливы следующие утверждения:

- 1) если V – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G и $K \triangleleft G$, то $V \cap K$ – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K ;
- 2) если V – $\mathfrak{F}$ -инъектор G и $\alpha: G \rightarrow G\alpha$ – изоморфизм, то V^{α} – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G^{α} ;

- 3) если V – $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа G и $V \cap M$ – $\mathfrak{F}$ -инъектор M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G , то V – $\mathfrak{F}$ -инъектор G .

Лемма 1.2 [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 1.3 [2]. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если U и N – подгруппы группы G и V нормализует N , то имеет место изоморфизм: $VN/N \cong V/V \cap N$;
- 2) если M и N – нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq M$, то справедлив изоморфизм $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

π -Нильпотентные инъекторы. Следующая теорема решает задачу нахождения π -нильпотентных инъекторов в любой π -разрешимой группе.

Теорема 1.4. Любая π -разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных π -нильпотентных инъекторов, каждый из которых является произведением π' -радикала группы G и $\mathfrak{N}_{\pi}$ -инъектора некоторой π -холловской подгруппы из G .

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка и M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G .

Рассмотрим два возможных случая.

1. π' -радикал $G_{\mathfrak{C}_{\pi}}$ группы G – единичная подгруппа.

Тогда $M_{\mathfrak{G}_\pi} = 1$ и по индукции в M существует единственный класс сопряженных π -нильпотентных инъекторов, которые представляются в указанном в условии теоремы виде, то есть в данном случае совпадают с $\mathfrak{N}_\pi$ -инъекторами π -холловских подгрупп группы M .

Пусть F_1 – $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектор холловской π -подгруппы M_π группы M . Так как холловская π -подгруппа G_π группы G разрешима, то в ней по теореме Гашюца–Фишера–Хартли [1] существует $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектор V и любые два $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектора из G_π сопряжены в G_π . Но $M_\pi = M \cap G_\pi \triangleleft G_\pi$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.1 $V \cap M_\pi$ – $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектор группы M_π . Ввиду сопряженности $\mathfrak{N}_\pi$ -инъекторов группы M , мы можем считать, что $F_1 = V \cap M_\pi$.

Поэтому теорема в случае 1 будет доказана, если мы покажем, что V – максимальная π -нильпотентная подгруппа группы G . Предположим, что $F_1 \subseteq V \subseteq V_1$, где V_1 – некоторая максимальная π -нильпотентная подгруппа из G . Так как $G_{\mathfrak{N}_\pi}$ и $(V_1)_{\mathfrak{G}_\pi}$ нормальны в V_1 и $[(V_1)_{\mathfrak{G}_\pi}, G_{\mathfrak{N}_\pi}] = 1$, то $(V_1)_{\mathfrak{G}_\pi} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{N}_\pi}) \subseteq G_{\mathfrak{N}_\pi}$ и поэтому $(V_1)_{\mathfrak{G}_\pi} = 1$. Значит, $V_1 \in \mathfrak{N}_\pi$ и $V = V_1$. Следовательно, в случае 1 теорема верна. Остается принять случай

2. π' -радикал группы G – неединичная подгруппа.

Пусть $G_1 = G/G_{\mathfrak{G}_\pi}$. В этом случае в группе G_1 существует единственный класс сопряженных π -нильпотентных инъекторов вида $(G_1)_{\mathfrak{G}_\pi} V_1$, где V_1 – $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектор некоторой холловской π -подгруппы из G_1 . Так как $(G_1)_{\mathfrak{G}_\pi} = 1$, то π -нильпотентные инъекторы группы G_1 совпадают с $\mathfrak{N}_\pi$ -инъекторами ее холловской π -подгруппы $G_\pi G_{\mathfrak{G}_\pi}/G_{\mathfrak{G}_\pi}$, где G_π – некоторая холловская π -подгруппа группы G . Но G_π – разрешимая группа и поэтому по теореме Гашюца–Фишера–Хартли [1] в ней существует $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектор V .

Учитывая случай 1 и утверждение 2 леммы 1.1, подгруппа $VG_{\mathfrak{G}_\pi}/G_{\mathfrak{G}_\pi}$ является $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектором группы $G_\pi G_{\mathfrak{G}_\pi}/G_{\mathfrak{G}_\pi}$ и, следовательно, π -нильпотентным инъектором этой группы. Значит, $VG_{\mathfrak{G}_\pi}$ – π -нильпотентная подгруппа группы G .

Покажем, что $VG_{\mathfrak{G}_\pi}$ максимальная из π -нильпотентных подгрупп из G .

Предположим, что $VG_{\mathfrak{G}_\pi} \subseteq F$, где F – максимальная π -нильпотентная подгруппа группы G . Тогда $F = F_{\mathfrak{G}_\pi} F_\pi$, где $F_\pi \in \mathfrak{N}_\pi$ и является холловской π -подгруппой из F . По теореме вложения С.А. Чунихина [9] мы можем считать, что $F_\pi \subseteq G_\pi$. Но тогда $V \subseteq F_\pi \subseteq G_\pi$ и так как V является $\mathfrak{N}_\pi$ -максимальной в G , то $V = F_\pi$. Из того, что $G_{\mathfrak{G}_\pi} \triangleleft F$, следует, что $(F/G_{\mathfrak{G}_\pi})_{\mathfrak{G}_\pi} = F_{\mathfrak{G}_\pi}/G_{\mathfrak{G}_\pi}$. Но тогда по лемме 1.3 $F/G_{\mathfrak{G}_\pi}/(F/G_{\mathfrak{G}_\pi})_{\mathfrak{G}_\pi} \cong F/F_{\mathfrak{G}_\pi} \cong F_\pi = V \in \mathfrak{N}_\pi$. Следовательно, группа $F/G_{\mathfrak{G}_\pi}$ π -нильпотентна и $VG_{\mathfrak{G}_\pi}/G_{\mathfrak{G}_\pi} \subseteq F/F_{\mathfrak{G}_\pi}$. Отсюда $F = G_{\mathfrak{G}_\pi} V$, так как $VG_{\mathfrak{G}_\pi}/G_{\mathfrak{G}_\pi}$ максимальная из π -нильпотентных подгрупп группы G_1 .

Итак, мы показали, что $G_{\mathfrak{G}_\pi} V$ максимальная из π -нильпотентных подгрупп группы G . Поэтому, чтобы доказать, что подгруппа $G_{\mathfrak{G}_\pi} V$ является

π -нильпотентным инъектором группы G , остается, ввиду утверждения 3 леммы 1.1, выяснить, что $G_{\mathfrak{F}_\pi} V \cap M$ – π -нильпотентный инъектор группы M .

По индукции группа M имеет π -нильпотентные инъекторы вида $M_{\mathfrak{F}_\pi} L$, где L – $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектор холловской π -подгруппы M_π группы M . Так как $M_\pi = M \cap G_\pi \triangleleft G_\pi$ и в M_π любые два $\mathfrak{N}_\pi$ -инъектора сопряжены по теореме Гашюца–Фишера–Хартли [1], то по утверждению 1 леммы 1.1 $L_1 = V \cap M_\pi$. Но тогда из того, что $G_{\mathfrak{F}_\pi} V \cap M \triangleleft G_{\mathfrak{F}_\pi} V$ и группа $G_{\mathfrak{F}_\pi} V$ – π -нильпотентная подгруппа, следует, что $G_{\mathfrak{F}_\pi} V \cap M$ – π -нильпотентная подгруппа группы M , содержащая π -нильпотентный инъектор $M_{\mathfrak{F}_\pi} L$. Следовательно, $M_{\mathfrak{F}_\pi} L = G_{\mathfrak{F}_\pi} V \cap M$ и подгруппа $G_{\mathfrak{F}_\pi} V \cap M$ является π -нильпотентным инъектором группы M . Итак, существование π -нильпотентных инъекторов в π -разрешимых группах доказано.

Сопряженность π -нильпотентных инъекторов вытекает непосредственно из сопряженности $\mathfrak{N}_\pi$ -инъекторов π -холловских подгрупп π -разрешимой группы.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fischer, B.** Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
2. **Doerk, K.** Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.
3. **Forster, P.** Nilpotent injectors in finite groups / P. Forster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32, № 4. – P. 293–297.
4. **Blessenohl, D.** Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Hauptfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – № 56. – S. 516–532.
5. **Iranzo, M.J.** F-constraint with respect to a Fitting class / M.J. Iranzo, F. Perez Monasor // Arch. Math. – 1986. – № 46. – P. 205–210.
6. **Монахов, В.С.** Существование разрешимых инъекторов в конечных группах / В.С. Монахов // Докл. АН Беларуси. – 1992. – Т. 36, № 6. – С. 494–496.
7. **Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп).** – 11-е изд. – Новосибирск: ИМ РАН, 1990. – 125 с.
8. **Чунихин, С.А.** О силовских свойствах конечных групп / С.А. Чунихин // Докл. АН БССР. – 1950. – Т. 73, № 1. – С. 29–32.
9. **Чунихин, С.А.** Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964.
10. **Шеметков, Л.А.** О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы / под ред. Л.А. Шеметкова. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
11. **Шеметков, Л.А.** Некоторые свойства инъекторов конечных групп / Л.А. Шеметков // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, Вопросы алгебры. – 1999. – № 1(15). – С. 5–13.

S U M M A R Y

The present paper proves the existence and conjugacy of π -nilpotent injectors in π -soluble groups. Moreover, the questions of characterization of such injectors are solved.

Поступила в редакцию 8.02.2010