УДК 512.542

Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская

О существовании и сопряженности π-нильпотентных инъекторов в частично разрешимых группах

Все рассматриваемые группы конечны.

Один из основополагающих результатов в теории классов Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп – обобщение теорем Силова и Холла, которое представляет теорема Гашюца–Фишера–Хартли [1], о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Напомним, что подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-максимальной [2], если $V \in \mathfrak{F}$ и из того, что $V \subseteq U \subseteq G$, $U \in \mathfrak{F}$, всегда следует, что $V = U$. Если

$\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют ее $\mathfrak{F}$-инъектором [2], если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп группы *N*, принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы *N* из *G*.

Расширение этого результата на случай класса $\mathfrak{E}$ всех конечных групп в общем случае невозможно (например, уже для $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ и $G = A_5$ это неверно). Задача существования и сопряженности инъекторов для специальных случаев классов Фиттинга в произвольных группах рассматривалась многими авторами. В частности, Форстером [3] доказано существование $\mathfrak{N}$-инъекторов, где $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп, а Блессенолем и Лауе [4] доказаны существование и сопряженность, а также получена характеризация инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ для класса $\mathfrak{N}^*$ квазинильпотентных групп. Некоторые результаты при дополнительных ограничениях либо на класс Фиттинга либо на группу в этом направлении можно найти в работе Иранцо и Переса Моназора [5]. Позднее В.С. Монаховым [6] было установлено существование инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ для классов всех разрешимых π-групп $\mathfrak{S}_\pi$ и всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$.

Ориентиром для поиска разрешимых $\mathfrak{X}$-инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ служит следующая

Проблема (Л.А. Шеметков, проблема 11.117 [7]). Пусть $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ – класс Фиттинга. Верно ли, что каждая неразрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$-инъектором?

Понятно, из указанных выше результатов следует, что проблема Л.А. Шеметкова положительно решена только для класса Фиттинга $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{N}\}$.

Вместе с тем самостоятельный интерес представляет также задача отыскания классов сопряженных инъекторов в π-разрешимых группах. Перспективность такой задачи определяет известная в теории групп теорема С.А. Чунихина [8–9] о существовании и сопряженности холловских π-групп ($\mathfrak{E}_\pi$-инъекторов) в π-разрешимой группе.

Классы сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов в π-разрешимых группах для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ впервые были найдены Л.А. Шеметковым [10]. Он установил, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$ в любой $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Более того, Л.А. Шеметковым [11] доказано, что в любой π-разрешимой группе существует единственный класс сопряженных π-разложимых инъекторов.

Напомним, что через $\pi(\mathfrak{F})$ мы обозначили здесь множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$.

Настоящая работа посвящена изучению классов сопряженных инъекторов в частично разрешимых группах и их характеризации. В определениях и обозначениях мы следуем [2].

Предварительные сведения. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение AB принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу группы *G* называют $\mathfrak{F}$-радикалом *G* и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ = = (G | $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$). Заметим, что произведение двух любых классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Приведем в качестве лемм некоторые известные утверждения, которые мы будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 [2]. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) если V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $K \lhd G$, то $V \cap K$ $\mathfrak{F}$-инъектор группы K;

2) если V – $\mathfrak{F}$-инъектор G и $\alpha : G \to G\alpha$ – изоморфизм, то V^{α} – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G^{α};

3) если V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G и $V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор G.

Лемма 1.2 [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.*

Лемма 1.3 [2]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если U и N – подгруппы группы G и V нормализует N, то имеет место изоморфизм: $VN/N \cong V/V \bigcap N$;

2) если M и N – нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq M$, то справедлив изоморфизм $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

π-Нильпотентные инъекторы. Следующая теорема решает задачу нахождения π-нильпотентных инъекторов в любой π-разрешимой группе.

Теорема 1.4. *Любая π-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных π-нильпотентных инъекторов, каждый из которых является произведением π'-радикала группы G и $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектора некоторой π-холловской подгруппы из G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – контрпример минимального порядка и *M* – любая максимальная нормальная подгруппа группы *G*.

Рассмотрим два возможных случая.

1. π'-радикал $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ группы *G* – единичная подгруппа.

Тогда $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$ и по индукции в *M* существует единственный класс сопряженных π-нильпотентых инъекторов, которые представляются в указанном в условии теоремы виде, то есть в данном случае совпадают с $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъекторами π-холловских подгрупп группы *M*.

Пусть F_1 – $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор холловской π-подгруппы M_{π} группы *M*. Так как холловская π-подгруппа G_{π} группы *G* разрешима, то в ней по теореме Гашюца–Фишера–Хартли [1] существует $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор *V* и любые два $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектора из G_{π} сопряжены в G_{π}. Но $M_{\pi} = M \cap G_{\pi} \lhd G_{\pi}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.1 $V \cap M_{\pi}$ – $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор группы M_{π}. Ввиду сопряженности $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъекторов группы *M*, мы можем считать, что $F_1 = V \cap M_{\pi}$.

Поэтому теорема в случае 1 будет доказана, если мы покажем, что *V* – максимальная π-нильпотентная подгруппа группы *G*. Предположим, что $F_1 \subseteq V \subseteq V_1$, где V_1 – некоторая максимальная π-нильпотентная подгруппа из *G*. Так как $G_{\mathfrak{N}_{\pi}}$ и $(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ нормальны в V_1 и $[(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}, G_{\mathfrak{N}_{\pi}}] = 1$, то

$(V_1)_{\mathrm{E}_{\pi'}} \subseteq C_G(G_{\mathrm{N}_\pi}) \subseteq G_{\mathrm{N}_\pi}$ и поэтому $(V_1)_{\mathrm{E}_{\pi'}} = 1$. Значит, $V_1 \in \mathrm{N}_\pi$ и $V = V_1$. Следовательно, в случае 1 теорема верна. Остается принять случай

2. π'-радикал группы *G* – неединичная подгруппа.

Пусть $G_1 = G / G_{\mathrm{E}_{\pi'}}$. В этом случае в группе G_1 существует единственный класс сопряженных π-нильпотентных инъекторов вида $(G_1)_{\mathrm{E}_{\pi'}} V_1$, где V_1 – N_π-инъектор некоторой холловской π-подгруппы из G_1. Так как $(G_1)_{\mathrm{E}_{\pi'}} = 1$, то π-нильпотентные инъекторы группы G_1 совпадают с N_π-инъекторами ее холловской π-подгруппы $G_\pi G_{\mathrm{E}_{\pi'}} / G_{\mathrm{E}_{\pi'}}$, где G_π – некоторая холловская π-подгруппа группы *G*. Но G_π – разрешимая группа и поэтому по теореме Гашюца–Фишера–Хартли [1] в ней существует N_π-инъектор *V*.

Учитывая случай 1 и утверждение 2 леммы 1.1, подгруппа $VG_{\mathrm{E}_{\pi'}} / G_{\mathrm{E}_{\pi'}}$ является N_π-инъектором группы $G_\pi G_{\mathrm{E}_{\pi'}} / G_{\mathrm{E}_{\pi'}}$ и, следовательно, π-нильпотентным инъектором этой группы. Значит, $VG_{\mathrm{E}_{\pi'}}$ – π-нильпотентная подгруппа группы *G*.

Покажем, что $VG_{\mathrm{E}_{\pi'}}$ максимальная из π-нильпотентных подгрупп из *G*.

Предположим, что $VG_{\mathrm{E}_{\pi'}} \subseteq F$, где *F* – максимальная π-нильпотентная подгруппа группы *G*. Тогда $F = F_{\mathrm{E}_{\pi'}} F_\pi$, где $F_\pi \in \mathrm{N}_\pi$ и является холловской π-подгруппой из *F*. По теореме вложения С.А. Чунихина [9] мы можем считать, что $F_\pi \subseteq G_\pi$. Но тогда $V \subseteq F_\pi \subseteq G_\pi$ и так как *V* является N_π-максимальной в *G*, то $V = F_\pi$. Из того, что $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} \triangleleft F$, следует, что $(F / G_{\mathrm{E}_{\pi'}})_{\mathrm{E}_{\pi'}} = F_{\mathrm{E}_{\pi'}} / G_{\mathrm{E}_{\pi'}}$. Но тогда по лемме 1.3 $F / G_{\mathrm{E}_{\pi'}} / (F / G_{\mathrm{E}_{\pi'}})_{\mathrm{E}_{\pi'}} \cong F / F_{\mathrm{E}_{\pi'}} \cong F_\pi = V \in \mathrm{N}_\pi$. Следовательно, группа $F / G_{\mathrm{E}_{\pi'}}$ π-нильпотентна и $VG_{\mathrm{E}_{\pi'}} / G_{\mathrm{E}_{\pi'}} \subseteq F / F_{\mathrm{E}_{\pi'}}$. Отсюда $F = G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V$, так как $VG_{\mathrm{E}_{\pi'}} / G_{\mathrm{E}_{\pi'}}$ максимальная из π-нильпотентных подгрупп группы G_1.

Итак, мы показали, что $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V$ максимальная из π-нильпотентных подгрупп группы *G*. Поэтому, чтобы доказать, что подгруппа $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V$ является π-нильпотентным инъектором группы *G*, остается, ввиду утверждения 3 леммы 1.1, выяснить, что $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V \cap M$ – π-нильпотентный инъектор группы *M*.

По индукции группа *M* имеет π-нильпотентные инъекторы вида $M_{\mathrm{E}_{\pi'}} L$, где *L* – N_π-инъектор холловской π-подгруппы M_π группы *M*. Так как $M_\pi = M \cap G_\pi \triangleleft G_\pi$ и в M_π любые два N_π-инъектора сопряжены по теореме Гашюца–Фишера–Хартли [1], то по утверждению 1 леммы 1.1 $L_1 = V \cap M_\pi$. Но тогда из того, что $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V \cap M \triangleleft G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V$ и группа $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V$ – π-нильпотентная подгруппа, следует, что $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V \cap M$ – π-нильпотентная подгруппа группы *M*, содержащая π-нильпотентный инъектор $M_{\mathrm{E}_{\pi'}} L$. Следовательно, $M_{\mathrm{E}_{\pi'}} L = G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V \cap M$ и подгруппа $G_{\mathrm{E}_{\pi'}} V \cap M$ является π-нильпотентным инъектором группы *M*. Итак, существование π-нильпотентных инъекторов в π-разрешимых группах доказано.

Сопряженность π-нильпотентных инъекторов вытекает непосредственно из сопряженности N_{π}-инъекторов π-холловских подгрупп π-разрешимой группы.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Fischer, B.*** Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
2. ***Doerk, K.*** Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Waltor de Gryeter, 1992. – 892 p.
3. ***Forster, P.*** Nilpotent injectors in finite groups / P. Forster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32, № 4. – P. 293–297.
4. ***Blessenohl, D.*** Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – № 56. – S. 516–532.
5. ***Iranzo, M.J.*** F-constraint with respect to a Fitting class / M.J. Iranzo, F. Perez Monasor // Arch. Math. – 1986. – № 46. – P. 205–210.
6. ***Монахов, В.С.*** Существование разрешимых инъекторов в конечных группах / В.С. Монахов // Докл. АН Беларуси. – 1992. – Т. 36, № 6. – С. 494–496.
7. ***Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп).*** – 11-е изд. – Новосибирск: ИМ РАН, 1990. – 125 с.
8. ***Чунихин, С.А.*** О силовских свойствах конечных групп / С.А. Чунихин // Докл. АН БССР. – 1950. – Т. 73, № 1. – С. 29–32.
9. ***Чунихин, С.А.*** Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964.
10. ***Шеметков, Л.А.*** О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы / под ред. Л.А. Шеметкова. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
11. ***Шеметков, Л.А.*** Некоторые свойства инъекторов конечных групп / Л.А. Шеметков // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, Вопросы алгебры. – 1999. – № 1(15). – С. 5–13.

S U M M A R Y

The present paper proves the existence and conjugacy of π-nilpotent injectors in π-soluble groups. Moreover, the questions of characterization of such injectors are solved.

Поступила в редакцию 8.02.2010