УДК 373.3.016:51

Е.Е. Семенов, В.В. Устименко

О некоторых аспектах факультативного курса математики

Школьный курс математики мы считаем состоящим из двух связанных между собой частей: основного и факультативного курсов. Каждая из них на соответствующем уровне выполняет функции развития. Последние мы считаем более важными, чем расширение числа тем, изучаемых в курсе математики общеобразовательной школы. Выход за рамки традиционных тем на факультативных занятиях для нас может быть оправдан лишь как преследующий цель «приоткрыть занавес», чтобы показать нескончаемость диалога о той или иной математической идее, математических понятиях, теории, как способ более глубокого изучения и осознания материала, как возможность эффективного развития математического мышления.

Движению «вширь» мы предпочитаем движение «вглубь». Этим в значительной степени может объясняться содержание факультативного курса математики. При этом следует помнить мудрое высказывание: «Знания улетучиваются, развитие остается».

Одним из важнейших направлений в работе по достижению развивающего эффекта в диалоге и через диалог является смещение акцента со слепого запоминания решения задачи предоставленным самому себе учеником на осознание, осмысление последним метода решения при участии учителя, совместно с ним. Овладение ориентировочной основой действия, идеей решения и есть овладение укрупненной дидактической единицей знаний, зачастую безотносительной к изучаемой теме, имеющей общетематическое значение.

Цель исследования – систематизировать методы решения геометрических и алгебраических задач, раскрыть возможности их конкретизации и укрупнения на факультативных занятиях по математике.

О методах решения математических задач. По нашему мнению, невозможно перечислить сколько-нибудь исчерпывающе все методы решения задач. К тому же многие из них, выступая на первоначальном этапе и психологически воспринимаемые учащимися как методы, на последующих этапах переходят в сознании школьников в очевидные приемы, превращаются «в очередную таблицу умножения», не знать которую было бы странно и непростительно. И теперь они могут восприниматься уже не как методы, а как некое самоочевидное «обрамление» методов, их постоянный спутник. А вот методы воспринимаются как нечто глобальное, широкое, очень значительное, масштабное, а то, что оказывается полезным на каждом шагу, как метод может и не восприниматься.

Приведем пример. В чем состоит метод доказательства равенства двух углов? – В доказательстве того, что углы являются: 1) соответственными углами двух равных треугольников; 2) накрест лежащими или соответственными углами при параллельных прямых; 3) углами при основании равнобедренного треугольника; 4) противолежащими углами параллелограмма; 5) углами при основании равнобокой трапеции; 6) углами, образованными диагональю ромба с его сторонами; 7) вписанными в одну и ту же окружность и опирающимися при этом на одну и ту же дугу и т.д. Первоначально каждый из перечисленных пунктов раскрывает перед учащимися один из методов. Позже для многих из них – это набор приемов, в совокупности образующих метод доказательства равенства двух углов.

Аналогичным образом можно сформулировать методы доказательства равенства двух отрезков. Среди них будет и такой: доказать, что отрезки являются отрезками касательных, проведенных через одну и ту же точку к одной и той же окружности. На первом этапе этот совет будет восприниматься школьниками как метод, позже, возможно, как «частный прием».

Мы полагаем, что в программе факультативного курса по математике можно перечислить лишь весьма ограниченное число методов решения задач. (Более полное перечисление и раскрытие методов является задачей методической литературы для учителя и книг для учащихся). Укажем на некоторые из них. 1. Метод доказательства от противного. 2. Метод подбора соответствующих эвристик. 3. Метод посредника. 4. Метод попеременного движения с двух концов. 5. Метод конкретизации. 6. Метод обобщения. 7. Метод аналогии. 8. Метод нисходящего и восходящего анализа. 9. Анализ через синтез. 10. Проверка ответа на правдоподобие. 11. Метод рассмотрения предельных случаев. 12. Метод получения следствий из гипотез. 13. Метод получения следствий из условий задачи. 14. Поиск контрпримеров. 15. Переформулирование условий задачи. 16. Построение цепочки вспомогательных задач. 17. Отказ от части условия задачи (метод послабления). 18. Формулирование предложения, обратного данному, и его сравнение с первоначальным. 19. Метод индукции. 20. Поиск эвристики. 21. Метод интервалов. 22. Метод осуществления перебора. 23. Метод замены. 24. Функциональный подход. 25. Метод разложения на множители. 26. Использование и поиск способов суммирования. 27. Метод сравнения чисел и выражений. 28. Методы решения систем уравнений. 29. Умножение и деление на одно и то же отличное от нуля число или выражение как способ тождественного преобразования. 30. Графические интерпретации. 31. Метод математической индукции. 32. Методы доказательства равенства отрезков, углов. 33. Метод использования свойств геометрических фигур. 34. Алгебраический метод решения геометрических задач. 35. Метод дополнительных построений. 36. Метод равных треугольников. 37. Метод подобия. 38. Метод площадей. 39. Метод, основанный на единственности прямой, перпендикулярной данной и проходящей через данную точку. 40. Метод, опирающийся на аксиому параллельности. 41. Единственность точки, делящей отрезок в заданном отношении и в указанном направлении. 42. Метод геометрических мест точек. 43. Координатный метод. 44. Метод геометрических преобразований. 45. Векторный метод. 46. Свойство вписанных и описанных четырехугольников [1].

Многие из указанных методов могут быть истолкованы как конкретизация или обобщение других, как отличающиеся друг от друга лишь акцентами или сильно пересекающиеся, наконец, одни – как слишком широкие, другие – как чрезмерно узкие. И это отражает всю сложность методики преподавания математики, ее многообразие, противоречивость и глубинную неисчерпаемость. Поэтому нужно считать, что перечисление методов сделано не для первоочередного и неукоснительного их изучения, а для поиска точек опоры в методическом творчестве, для расширения базы диалога учителя, учащихся, соответствующей задачной литературы.

Заметим также, что осознание методов, овладение умением пользоваться ими является важнейшей частью работы по изучению основного курса математики и неотъемлемым элементом, стержнем, факультативного курса.

Работа по конкретизации многих из указанных методов оказывается наиболее успешной в том случае, когда она осуществляется в соответствующих контекстах: методических, психологических, содержательно-математических, диалогических, перспективно-ретроспективных и т.д. В качестве примера рассмотрим «метод использования свойств геометрических фигур» (он оказался в только что приведенном списке под номером 33). Этот метод через конкретные ситуации поможет открыть много своих конкретизаций. При этом важно, чтобы не терялось понимание того, что каждая конкретизация имеет родовое понятие – «метод использования свойств геометрических фигур». Перечислим несколько возможных конкретизаций такого рода. 33.1. Метод продолжения медианы треугольника и откладывания на продолжении отрезка, равного медиане. Этот метод ведет к появлению равных треугольников, к получению параллелограмма, что позволяет воспользоваться свойствами получаемых при этом фигур. 33.2. Метод дополнительных построений. Он позволяет воспользоваться свойствами получаемых при этом фигур. В сущности, он является обобщением предшествующего метода – продолжения медианы треугольника, так что конкретизация метода 33 может быть получена и путем обобщения другой конкретизации. В свою очередь, метод дополнительных построений может конкретизироваться, что приведет к получению конкретизации метода использования свойств геометрических фигур. 33.3. Метод использования свойств точки пересечения медиан треугольника. 33.4. Метод использования свойств серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. 33.5. Метод использования свойств биссектрис углов треугольника. 33.6. Метод сравнения квадрата большей стороны треугольника с суммой квадратов двух других сторон. Он может иметь также и второе название: метод применения теоремы, обратной теореме Пифагора. Этот метод позволяет установить, является ли треугольник прямоугольным, остроугольным, тупоугольным. 33.7. Метод «превращения» прямых, содержащих высоты треугольника, в серединные перпендикуляры к сторонам вспомогательного треугольника. 33.8. Метод использования сумм противолежащих сторон четырехугольника, описанного около окружности. 33.9. Метод использования существования центра симметрии у правильного тетраэдра. 33.10. Метод использования сумм противолежащих углов четырехугольника, вписанного в окружность. 33.11. Методы построения общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых. 33.12. Метод нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми. 33.13. Метод удачного выбора высоты трапеции. 33.14. Метод использования условия существования окружности, вписанной в четырехугольник. 33.15. Метод использования условия существования окружности, описанной около четырехугольника. 33.16. Метод использования условия существования сферы, описанной около пирамиды. 33.17. Метод использования условия существования сферы, вписанной в пирамиду. 33.18. Метод построения сечения куба, являющегося правильным шестиугольником. 33.19. Метод многократного использования теоремы Фалеса. 33.20. Метод использования свойства внешнего угла треугольника. 33.21. Метод включения в треугольник двух равных углов.

Перечень конкретизации можно продолжать. Акцентирование внимания учащихся на их формулировках расширяет базу диалога, развивает способность к глобальной актуализации знаний, увеличивает возможности успешного поиска решения задач. Формулировки такого рода более эффективны, чем простое формулирование теорем, свойств ради них самих, поскольку в этих формулировках заложено важное с психологической точки зрения начало: акцент на возможности, целесообразности применения, использования «в деле», в деятельности по решению задач. Пассивное начало формулировок заменяется, таким образом, динамическим началом возможностей их приложения в самых разнообразных ситуациях. Казалось бы, «давно доказанные», а потому ретроспективные «устаревшие», «порядком надоевшие» утверждения, формулировки свойств становятся перспективными, направленными в будущее, оказываются его «строительным материалом». В связи с этим и отношение к ним становится в большей степени актуализированным. Вместо слов «это нужно помнить» в головах школьников появляется мысль «все это очень даже может пригодиться; без знания этих методов невозможно успешное продвижение в математическом познании». Набор методов всегда есть и набор идей, ориентировочных основ действий, набор эвристик, основа для построения и реконструирования когнитивных репрезентативных структур в сознании школьников, обнаружения, выявления гештальта, база для неповерхностного диалога, отказ от слепой эксплуатации памяти, глобальная эвристика, ускоренное развитие, объединяющее начало школьного курса математики.

Далее приведем примеры методов, конкретизированных применительно к тому или иному содержанию алгебраического материала.

О методах решения уравнений и неравенств:

1. Простейшие: решаются путем обычных упрощений, применения заранее известных формул корней данного вида уравнений и т.п.

2. Группировка (для рациональных, показательных, тригонометрических, логарифмических уравнений): путем группировки слагаемых, применения соответствующих формул приводят уравнения к виду, когда слева записано произведение нескольких множителей, а справа – ноль.

3. Подстановка или введение новой переменной (для рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений): находят в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначают новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно, что удобно обозначить, а в более сложных случаях подстановка видна лишь после нескольких преобразований.

4. Метод почленного деления (для рациональных, иррациональных, показательных и тригонометрических уравнений). Этот метод применяют для решения однородных уравнений. Суть метода в почленном делении трехчленного уравнения, члены которого представляют собой степени с одинаковыми показателями и различными основаниями, на одну из степеней.

5. Функциональный подход (для всех видов уравнений). Основан на применении свойств функций, входящих в данное уравнение, их графического изображения. Довольно часто используется следующее утверждение: пусть дано уравнение $f(x)=g(x)$ с областью определения D. Тогда, если функция $f(x)$ возрастает на D, а функция $g(x)$ убывает на D, то уравнение имеет не более одного корня (в частности, его находят подбором).

6. Уравнение с модулем. При решении уравнений с модулем используются определение модуля и метод интервалов: приравнивают к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечают на координатной прямой полученные значения, исследуют уравнение в каждом из полученных интервалов.

7. Способ приведения к одному основанию при решении показательных уравнений. Основан на следующем свойстве степеней: если две степени равны, а их основания равны и отличны от 0 и 1, то равны их показатели.

8. Метод потенцирования (для логарифмических уравнений). Суть метода в следующем: с помощью формул уравнение привести к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Это уравнение (при $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

9. Метод приведения к одному основанию (для логарифмических уравнений). Обычно условие уравнения подсказывает, к какому основанию следует перейти. Используются соответствующие формулы. Как правило, метод «работает» с методом подстановки.

10. Метод логарифмирования. Обычно логарифмируют уравнения вида

$$f_1(x)^{g(x)} = f_2(x).$$

11. Метод введения вспомогательного аргумента (для тригонометрических уравнений). Суть метода в том, что некоторую величину представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента φ, а затем производят тригонометрические преобразования.

12. Нестандартный подход. Требуется заметить какую-то особенность исходного уравнения, проявить смекалку, придумать «свой метод», догадаться что-то прибавить и отнять, выделить полный квадрат, на что-то разделить и умножить и т.д. [2].

Методы решения неравенств зависят в основном от того, к какому классу относятся функции, составляющие неравенство. Но, как правило, сводятся к простейшему виду с помощью методов решения соответствующих уравнений. Особую значимость приобретает здесь метод интервалов.

О методах решения уравнений и неравенств с параметром. Решить уравнение (неравенство) с параметром – значит для любого допустимого значения параметра найти множество всех корней заданного уравнения (неравенства).

Основной подход к решению параметрических уравнений (неравенств) можно сформулировать так: необходимо разбить область изменения параметра на участки, такие, что при изменении параметра в каждом из них получающиеся уравнения (неравенства) можно решить одним и тем же методом. Отдельно для каждого участка находят корни уравнения (неравенства), выраженные через значения параметра. Используемые для этого приемы в точности таковы, как и при решении уравнений (неравенств) с постоянными коэффициентами. Поскольку каждый из методов представляет собой последовательность определенных действий, которые могут выполняться по-разному в зависимости от значений параметра, то выбранные первоначально участки его изменения в процессе решения могут дробиться с тем, чтобы на каждом из них рассуждения проводились единообразно. Ответ задачи состоит из списка участков всех корней уравнения (неравенства). Сложность параметрических задач в том, что, как правило, в них с изменением параметра меняются не только коэффициенты, но и ряд других, связанных с параметрическим уравнением или неравенством, характеристик. Может меняться степень уравнения или неравенства, область допустимых значений и т.д. Обычно это приводит к тому, что при разных значениях параметра приходится использовать различные методы решения [3].

О методах доказательства неравенств:

1. Метод от противного: чтобы доказать, что $A > B$, полагают, что это не так, т.е. $A \leq B$. Затем путем тождественных преобразований прийти к невозможности неравенства $A \leq B$.

2. Аналитический метод: с помощью тождественных преобразований привести данное неравенство к очевидному. Затем, исходя из очевидного неравенства, доказать данное.

3. Выяснение знака разности между доказываемыми частями неравенства: чтобы доказать, что $A > B$, достаточно показать, что разность $A - B$ положительна для всех положительных значений букв, входящих в неравенство.

4. Использование известных неравенств (справедливость которых уже доказана) для доказательства данного неравенства.

5. Доказательство неравенств методом математической индукции, который опирается на следующую теорему: если утверждение $A(n)$, $n \in N$, справедливо для $n = 1$ и из предположения, что оно верно для $n = k$, $k \in N$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ верно для любого натурального числа.

О методах решения систем алгебраических уравнений. При решении систем уравнений опираются на теоремы о равносильности систем.

1. Метод подстановки: из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другие и подставляем в оставшиеся уравнения системы.

2. Метод введения новых переменных: применяется при решении систем двух уравнений с двумя переменными одним из следующих способов: 1) вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы; 2) вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

3. Метод алгебраического сложения. Обычно «работает» с другими методами.

4. Система содержит однородное уравнение. В таком случае целесообразно выразить линейно одно из неизвестных через другое из однородного уравнения.

5. Графический способ. Для того, чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

6. Методы умножения и деления. Основаны на следующем утверждении: если обе части уравнения $f_2(x;y) = g_2(x;y)$ ни при каких значениях (x,y) одновременно не обращаются в нуль, то системы

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y), \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y)\, f_2(x;y) = g_1(x;y) g_2(x;y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)} = \dfrac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)} \end{cases}$$ равносильны.

При решении систем показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений используются методы решения алгебраических уравнений.

Общий метод решения задач с помощью составления уравнений:

1. Вводят переменные, т.е. буквами *x, y, z* обозначают неизвестные величины, которые либо требуется найти в задаче, либо они необходимы для отыскания искомых величин.

2. С помощью введенных переменных и данных в задаче чисел и их соотношений составляют систему уравнений (или одно уравнение).

3. Решают составленную систему уравнений (или уравнение) и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

4. Если буквами *x, y, z* обозначали искомые величины, то с помощью полученных решений находят ответ на вопрос задачи.

Заключение. Принципиально важной стороной содержания факультативного курса, методологии его преподавания должен быть акцент на методы решения задач, их систематизацию и укрупнение.

Кроме того, внешне, утилитарно, факультативный курс не должен зависеть от основного курса математики, а внутренне, идейно, создавать условия для лучшего, успешного изучения учащимися основ математики, помогать им преодолевать страх перед «неизвестным решением», воспитывать отвагу в поиске решения конкурсных задач, вооружать эвристиками. При этом, если факультативные занятия и окажутся «продолжением» общеобразовательных уроков, то не потому, что факультативный курс должен выполнять функции простого «продолжателя, дополняющего урок», а потому, что это позволяет решать те или иные развивающие задачи, достигать наилучшего претворения в жизнь методологии преподавания в данных условиях.

С другой стороны, нужно иметь в виду, что догматическое преподавание основного курса, злоупотребление так называемым натаскиванием в значительной степени будет тормозить развитие школьников, а потому снижать эффективность факультативного курса. Необходима гармония методологии преподавания там и здесь.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Азаров, А.И.*** Математика для старшеклассников: методы решения планиметрических задач. 8–11 классы: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / А.И. Азаров, В.В. Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Минск: Аверсэв, 2005. – 336 с.
2. ***Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных*** / С.В. Кравцев [и др.]. – М.: Экзамен, 2001. – 544 с.
3. ***Азаров, А.И.*** Математика для старшеклассников: методы решения задач с параметрами: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Федосенко. – 2-е изд., перераб. – Минск: Аверсэв, 2005. – 272 с.

S U M M A R Y

In this article the authors show that methods of solving problems are the basis of contence of mathematical optionals. The authors reveal the essence of the methods of algebraic and geometric solvings.

Поступила в редакцию 31.12.2009