УДК 517.977+517.956

О.В. Храмцов

Управляемость одной линейной стационарной системы в частных производных

Рассматривается процесс, описываемый линейной системой в частных производных

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial x}{\partial t_2}=Ax+bu(t_1,t_2)\ , \qquad (1)$$

где $x\in R^n$ – выход, состояние системы; $u\in R^1$ – вход, управляющая функция; $\lambda\in R^1$; A,b – постоянные вещественные матрица и вектор соответствующих размерностей. Для системы (1) имеют место начальное и конечное условия

$$x(t_1,0)=\phi(t_1),\qquad t_1\in I=(-a,a)\,, \qquad (2)$$

$$x(t_1,t_2^0)=\varphi(t_1)\,,\qquad t_1\in I\,, \qquad (3)$$

здесь ϕ,φ – аналитические функции.

Определение 1. *Система (1) называется вполне управляемой в классе аналитических управлений, если существуют момент* $t=t_2^0$ *и аналитическая функция* $u=u(t_1.t_2)$, $(t_1,t_2)\in I\times[0,t_2^0]$, *такие, что для решения системы (1) выполняются условия (2) и (3).*

Задача заключается в нахождении условий, при которых система (1) вполне управляема в классе аналитических управлений.

Теорема 1. *Для полной управляемости системы (1) в классе аналитических управлений необходимо и достаточно выполнение рангового условия*

$$rank[b,Ab,A^2b,\ldots,A^{n-1}b]=n\ . \qquad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя метод подстановки Э. Камке [1], можно найти общее решение системы уравнений (1)

$$x(t_1,t_2)=\exp(At_2)[H(t_1-\lambda t_2)+\int_0^{t_2}\exp(-As)Bu(t_1-\lambda t_2+\lambda s,s)ds]\,, \qquad (5)$$

где H – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Для определения этой функции воспользуемся условием (2), подставив $t_2=0$. Откуда $\phi(t_1)=H(t_1)$, а значит, $H=\phi(t_1-\lambda t_2)$. Условие (3) принимает вид

$$h(t_1)=\int_0^{t_2^0}\exp(-As)bu(t_1-\lambda t_2^0+\lambda s,s)ds\ , \qquad (6)$$

$$h(t_1)=\exp(-At_2^0)\varphi(t_1)-\phi(t_1)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it_1^i\ ,\quad t_1\in I\ , \qquad (7)$$

здесь функция h в силу аналитичности входящих в нее функций представлена в виде ряда (7). Управление u будем находить в виде промежуточного управления v

$$v=\sum_{0}^{\infty} t_1^i z_i(s)\,,\quad t_1\in I,\quad t_2\in[0,t_2^0]\,. \tag{8}$$

Условие (6) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i = \int_0^{t_2^0} \exp(-As)b\sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(s)ds\,. \tag{9}$$

Так как степень t_1^i можно выносить из-под знака интеграла, то сравнение коэффициентов при одинаковых степенях дает счетное число проблем моментов

$$a_i = \int_9^{t_2^0} \exp(-As)bz_i(s)ds,\ \ i=\ 0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{10}$$

относительно неизвестных функций z_i. Согласно Р. Калману [2, с. 51] каждая проблема моментов (10) имеет бесконечное множество решений z_i в классе аналитических функций тогда и только тогда, когда выполнено условие (4). Отберем те из них, для которых ряд (8) сходится. Таким образом, промежуточное управление (8) построено. Для восстановления управления u с помощью формулы Тэйлора каждую степень t_1^i из (8) разложим в окрестности точки $t_1^0=\lambda(t_2^0-s)$

$$t_1^i = p(t_1,\lambda(t_2^0-s)) = \sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{(i-j)!\,j!}(t_1-\lambda(t_2^0-s))^j\ . \tag{11}$$

В результате подстановки $s=t_2$ в (11) получается искомое управление

$$u(t_1,t_2)=\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t_1,\lambda(t_2^0-t_2))z_i\,(t_2)\,.$$

Таким образом, аналитическое управление, решающее задачу управления (1)–(3) при выполнении условия (4), построено. Теорема 1 доказана.

Пусть теперь в задаче (1)–(3) участвует векторное управление. Тогда система (1) имеет вид

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial x}{\partial t_2}=Ax+Bu(t_1,t_2)\,, \tag{12}$$

где теперь управление вектор $u\in R^m$, $B-(n\times m)$-постоянная вещественная матрица. Условия (2), (3) остаются. Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Для полной управляемости системы (12) в классе аналитических функций необходимо и достаточно выполнение условия*

$$rank[B,AB,A^2B,\ldots,A^{n-1}B]=n\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Камке, Э.*** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М., 1966. – С. 162.
2. ***Калман, Р.*** Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М., 1971. – С. 51.

S U M M A R Y

Criterion of the controllability of linear stationary system with partial derivatives has been proved.

Поступила в редакцию 23.10.2009