



УДК 517.977+517.956

О.В. Храмцов

Управляемость одной линейной стационарной системы в частных производных

Рассматривается процесс, описываемый линейной системой в частных производных

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial x}{\partial t_2} = Ax + bu(t_1, t_2), \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – выход, состояние системы; $u \in R^1$ – вход, управляющая функция; $\lambda \in R^1$; A, b – постоянные вещественные матрица и вектор соответствующих размерностей. Для системы (1) имеют место начальное и конечное условия

$$x(t_1, 0) = \phi(t_1), \quad t_1 \in I = (-a, a), \quad (2)$$

$$x(t_1, t_2^0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in I, \quad (3)$$

здесь ϕ, φ – аналитические функции.

Определение 1. Система (1) называется вполне управляемой в классе аналитических управлений, если существуют момент $t = t_2^0$ и аналитическая функция $u = u(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in I \times [0, t_2^0]$, такие, что для решения системы (1) выполняются условия (2) и (3).

Задача заключается в нахождении условий, при которых система (1) вполне управляема в классе аналитических управлений.

Теорема 1. Для полной управляемости системы (1) в классе аналитических управлений необходимо и достаточно выполнение рангового условия

$$\text{rank}[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = n. \quad (4)$$

Доказательство. Используя метод подстановки Э. Камке [1], можно найти общее решение системы уравнений (1)

$$x(t_1, t_2) = \exp(At_2) \left[H(t_1 - \lambda t_2) + \int_0^{t_2} \exp(-As) Bu(t_1 - \lambda t_2 + \lambda s, s) ds \right], \quad (5)$$

где H – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Для определения этой функции воспользуемся условием (2), подставив $t_2 = 0$. Откуда $\phi(t_1) = H(t_1)$, а значит, $H = \phi(t_1 - \lambda t_2)$. Условие (3) принимает вид

$$h(t_1) = \int_0^{t_2^0} \exp(-As) bu(t_1 - \lambda t_2^0 + \lambda s, s) ds, \quad (6)$$

$$h(t_1) = \exp(-At_2^0)\varphi(t_1) - \phi(t_1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i, \quad t_1 \in I, \quad (7)$$

здесь функция h в силу аналитичности входящих в нее функций представлена в виде ряда (7). Управление u будем находить в виде промежуточного управления v

$$v = \sum_0^{\infty} t_1^i z_i(s), \quad t_1 \in I, \quad t_2 \in [0, t_2^0]. \quad (8)$$

Условие (6) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i = \int_0^{t_2^0} \exp(-As) b \sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(s) ds. \quad (9)$$

Так как степень t_1^i можно выносить из-под знака интеграла, то сравнение коэффициентов при одинаковых степенях дает счетное число проблем моментов

$$a_i = \int_0^{t_2^0} \exp(-As) b z_i(s) ds, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

относительно неизвестных функций z_i . Согласно Р. Калману [2, с. 51] каждая проблема моментов (10) имеет бесконечное множество решений z_i в классе аналитических функций тогда и только тогда, когда выполнено условие (4). Отберем те из них, для которых ряд (8) сходится. Таким образом, промежуточное управление (8) построено. Для восстановления управления u с помощью формулы Тэйлора каждую степень t_1^i из (8) разложим в окрестности точки $t_1^0 = \lambda(t_2^0 - s)$

$$t_1^i = p(t_1, \lambda(t_2^0 - s)) = \sum_{j=0}^i \frac{i!}{(i-j)! j!} (t_1 - \lambda(t_2^0 - s))^j. \quad (11)$$

В результате подстановки $s = t_2$ в (11) получается искомое управление

$$u(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t_1, \lambda(t_2^0 - t_2)) z_i(t_2).$$

Таким образом, аналитическое управление, решающее задачу управления (1)–(3) при выполнении условия (4), построено. Теорема 1 доказана.

Пусть теперь в задаче (1)–(3) участвует векторное управление. Тогда система (1) имеет вид

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial x}{\partial t_2} = Ax + Bu(t_1, t_2), \quad (12)$$

где теперь управление вектор $u \in R^m$, $B - (n \times m)$ -постоянная вещественная матрица. Условия (2), (3) остаются. Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается

Теорема 2. Для полной управляемости системы (12) в классе аналитических функций необходимо и достаточно выполнение условия

$$\text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М., 1966. – С. 162.

2. **Калман, Р.** Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М., 1971. – С. 51.

S U M M A R Y

Criterion of the controllability of linear stationary system with partial derivatives has been proved.

Поступила в редакцию 23.10.2009

Репозиторий ВГУ