УДК 517.956

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СКОРОСТЯМИ $a_1(x,t)$ И $a_2(x,t)$ ПРИ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА КОНЦЕ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ. I

Ф.Е. Ломовцев
Белорусский государственный университет

Исследуется корректность по Адамару и находятся формулы классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений смешанной задачи впервые для двухскоростного неоднородного модельного телеграфного уравнения при нехарактеристической нестационарной косой производной на конце полуограниченной струны.

Цель статьи — разработка метода неявных характеристик для вывода полного, окончательного и неулучшаемого критерия корректности по Адамару и вычисления явных формул классических решений нехарактеристической смешанной задачи в случае неоднородного модельного телеграфного уравнения с двумя переменными скоростями волн.

Материал и методы. *Материалом служит линейная смешанная задача для двухскоростного неоднородного модельного телеграфного уравнения колебаний полуограниченной струны при зависящих от времени коэффициентах нехарактеристических первых частных производных в граничном режиме. Разработан метод неявных характеристик.*

Результаты и их обсуждение. *В двух частях настоящего исследования доказана глобальная теорема корректности смешаннной задачи для двухскоростного модельного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами при начальных условиях и нехарактеристической косой производной граничного режима в первой четверти плоскости. Глобальной теоремой корректности называются теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия на данные смешанной задачи для однозначной и устойчивой всюду ее разрешимости во множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций. В первой части статьи вычислены ее явные решения, доказана их дважды непрерывная дифференцируемость вне критической характеристики и непрерывная дифференцируемость на критической характеристике.*

Во второй части исследования будет доказана непрерывность их вторых производных на критической характеристике.

Заключение. *Таким образом, автором установлены критерий корректности и всюду, кроме критической характеристики, дважды непрерывная дифференцируемость решений смешанной задачи при нехарактеристической нестационарной косой производной на конце полуограниченной струны.*

Ключевые слова: *двухскоростное модельное телеграфное уравнение, переменные коэффициенты, метод неявных характеристик, нехарактеристическая косая производная, критерий корректности.*

MIXED PROBLEM FOR A MODEL TELEGRAPH EQUATION WITH TWO VELOCITIES $a_1(x,t)$ AND $a_2(x,t)$ WITH A NONCHARACTERISTIC OBLIQUE DERIVATIVE AT THE END OF A SEMIBOUNDED STRING. I

F.E. Lomovtsev
Belarusian State University

For the first time, Hadamard correctness is investigated and formulas for classical (twice continuously differentiable) solutions of a mixed problem for a two-velocity inhomogeneous model telegraph equation with a noncharacteristic non-stationary oblique derivative at the end of a semi-bounded string are sought.

The aim of the work is to develop an implicit characteristics method for deriving a complete, final and unimprovable criterion for Hadamard correctness and calculating explicit formulas for classical solutions of a noncharacteristic mixed problem in the case of an inhomogeneous model telegraph equation with two variable wave velocities.

Material and methods. *The material is a linear mixed problem for a two-velocity inhomogeneous model telegraph equation of a semi-bounded string oscillations with time-dependent coefficients of noncharacteristic first partial derivatives in the boundary regime. An implicit characteristics method is developed.*

Findings and their discussion. *In the two parts of the paper, a global correctness theorem is proved for a mixed problem for a two-speed model telegraph equation with variable coefficients at initial conditions and a non-characteristic oblique derivative of the boundary regime in the first quadrant of the plane. By a global correctness theorem, we mean theorems containing necessary and sufficient conditions on the data of a mixed problem for its denotable and everywhere stable solvability in the set of twice continuously differentiable functions. In the first part of the paper, its explicit solutions are calculated, their twice continuous differentiability outside the critical characteristic and continuous differentiability on the critical characteristic are proved. In the second part of the paper, the continuity of their second derivatives on the critical characteristic will be proved.*

Conclusion. *In the first part of the article, a correctness criterion and everywhere, except for the critical characteristic, twice continuous differentiability of solutions to the mixed problem with a noncharacteristic nonstationary oblique derivative at the end of a semibounded string are established.*

Key words: *two-velocity model telegraph equation, variable coefficients, implicit characteristics method, noncharacteristic oblique derivative, correctness criterion.*

В первой части настоящей статьи для завершения доказательства глобальной теоремы корректности нехарактеристической смешанной задачи для неоднородного модельного телеграфного уравнения со специальными переменными коэффициентами в первой четверти плоскости остается обосновать только непрерывность вторых частных производных ее решений на критической характеристике телеграфного уравнения. Новым *методом неявных характеристик* выводятся формулы ее единственных и устойчивых классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений и установлен критерий корректности по Адамару для однозначной и устойчивой везде разрешимости. *Нехарактеристичность косой производной* граничного режима на конце полуограниченной струны означает, что в каждый момент времени колебаний направление косой производной граничного условия не совпадает с направлением критической характеристики, т.е. проходящей через начало координат и строго возрастающей характеристики модельного телеграфного уравнения. *Критерий корректности* состоит из требований гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и двух условий согласования граничного режима с начальными условиями и правой частью уравнения. *Необходимость* интегральных требований гладкости на непрерывную правую часть двухскоростного модельного телеграфного уравнения обоснована методом неявных характеристик и *методом корректировки пробных решений в классические решения* с помощью корректирующей задачи Гурса в [1]. Метод неявных характеристик для модельного двухскоростного телеграфного уравнения основан на двенадцати тождествах обращения двух неявных функций характеристик модельного телеграфного уравнения и их четырех обратных функций. Впервые метод неявных характеристик был предложен в [2] для односкоростного модельного телеграфного уравнения. В [3] этим методом был вычислен общий интеграл классических решений неоднородного односкоростного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости. *Единственность* классических решений обеспечена способом их поиска методом неявных характеристик из всех дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения. *Устойчивость* классических решений вытекает из формул этих решений.

Всюду разрешимость первой смешанной задачи для односкоростного общего телеграфного уравнения в первой четверти плоскости была установлена обобщением известного метода продолжения по параметру Шаудера и теорем повышения гладкости сильных решений из глобальной теоремы корректности для односкоростного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости. Методом неявных характеристик также были вычислены явные формулы классических решений первой смешанной задачи для односкоростного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости и потом *методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны* из [4] были получены явные формулы единственных и устойчивых классических решений и критерий корректности по Адамару первой смешанной задачи для этого уравнения в полуполосе плоскости в [5]. Сначала *методом компенсации граничного режима правой частью волнового уравнения* выведены обобщенные формулы Римана единственных и устойчивых классических решений первой смешанной задачи для односкоростного общего телеграфного уравнения в первой четверти плоскости [6]. *Необходимость* интегральных требований гладкости на непрерывную правую часть односкоростного общего телеграфного уравнения также доказывается методом неявных характеристик и *методом корректировки пробных решений в классические решения* с помощью корректирующей задачи Гурса.

В случае односкоростного неоднородного модельного телеграфного уравнения его пробное решение с модулем пространственной переменной в правой части уравнения под двойным интегралом является классическим и поэтому может не корректироваться. Затем *методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны* получены обобщенные формулы Римана единственных и устойчивых классических решений и критерий корректности по Адамару первой смешанной задачи для односкоростного общего телеграфного уравнения в полуполосе плоскости в [7]. В [8; 9] и заключительном отчете [10] аналогично решена и изучена корректность второй смешанной задачи для односкоростных модельного и общего телеграфных уравнений в четверти и полуполосе плоскости.

Результаты настоящей работы будут использованы для вывода явных формул и формул Римана классических решений и доказательства теорем корректности аналогичной нехарактеристической смешанной задачи соответственно для двухскоростных модельного и общего телеграфных уравнений в полуполосе плоскости *методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны*. В нашей теореме 1 формула решения (15) задачи Коши для модельного телеграфного уравнения не является формулой Даламбера. В отечественной и зарубежной литературе нет других работ с явными классическими решениями и критериями корректности первой, второй и нашей нехарактеристической смешанной задачи для двухскоростного общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами. Невозможно построить теорию корректной разрешимости с необходимыми и достаточными условиями гладкости и согласования входных данных всех смешанных задач для волновых уравнений и, в частности, нашей смешанной задачи их сведением к интегральным уравнениям аналогично задачам Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

Материал и методы. В четверти плоскости $G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ решается смешанная задача

$$\mathcal{L}(t)u \equiv u_{tt}(x,t) + \big(a_1(x,t) - a_2(x,t)\big)u_{xt}(x,t) - a_1(x,t)a_2(x,t)u_{xx}(x,t) -$$
$$-a_2^{-1}(x,t)(a_2)_t(x,t)u_t(x,t) - a_1(x,t)(a_2)_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$
$$l_0 u \equiv u(x,0) = \varphi(x), \quad l_1 u \equiv u_t(x,0) = \psi(x), \quad x > 0, \tag{2}$$
$$\Gamma(t)u \equiv \big[\alpha(t)u_t(x,t) + \beta(t)u_x(x,t) + \gamma(t)u(x,t)\big]\big|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где исходные данные смешанной задачи f, φ, ψ, μ — заданные вещественные функции своих переменных x и t, коэффициенты уравнения $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $a_{3-i} \in C^2(G_\infty)$, $i = 1, 2,$ — заданные вещественные функции переменных x и t, коэффициенты граничного условия $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — заданные вещественные функции переменной t. Независимые переменные $x,\ t$ и количество этих переменных в нижних индексах функций обозначают соответствующие частные производные и порядки этих частных производных.

Двухскоростное телеграфное уравнение $u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = 0$ с постоянными коэффициентами $a_1 > 0,\ a_2 > 0$ моделирует волновые процессы в движующейся среде, которая оказывает сопротивление распространению волн. С помощью физико-геометрической интерпретации из учебника [11, глава II, параграф 2, раздел 2, с. 57–58] показывается, что результатом служит суперпозиция двух встречных волн, распространяющихся со скоростями a_1 и a_2.

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty, +\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Уравнение (1) имеет характеристические уравнения [1]

$$dx = (-1)^i a_{3-i}(x,t)dt,\ i = 1, 2,\ t \geq 0, \tag{4}$$

и общие интегралы $g_i(x,t) = C_i, C_i \in R, i = 1, 2.$

Если коэффициенты a_{3-i} строго положительны, т.е. $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0,\ (x,t) \in G_\infty$, то переменная t на характеристиках $g_1(x,t) = C_1, C_1 \in R,$ строго убывает, а на характеристиках $g_2(x,t) = C_2, C_2 \in R,$ строго возрастает вместе с ростом x. Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x,t) = C_i,\ x \geq 0, t \geq 0,$ обладают строго монотонными неявными обратными функциями $x = h_i\{y_i, t\}, t \geq 0,\ \ t = h^{(i)}[x, y_i], x \geq 0,\ \ i = 1, 2.$ По определению обратных отображений на G_∞ верны тождества обращения [1]:

$$g_i(\,h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \quad t \geq 0, \quad h_i\{g_i(x,t), t\} = x, \quad x \in R, \quad i = 1,2, \tag{5}$$
$$g_i\,(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad x \in R, \quad h^{(i)}[x, g_i(x,t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1,2, \tag{6}$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \in R, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \ge 0, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

В правых частях тождеств (5)–(7) вместе с взаимообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициенты $a_{3-i}(x,t) \ge a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a_{3-i} \in C^2(G_\infty)$, то функции g_i, h_i, $h^{(i)}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x, t, y_i, $i = 1, 2$, на $\dot{G}_\infty$ [1].

Определение 1. *Классическим решением смешанной задачи (1)–(3) называется функция $u \in C^2(G_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле на $\dot{G}_\infty$, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле значений пределов соответствующих дифференциальных выражений от функции $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$, стремящихся к граничным точкам (x,t) из (2) и (3) при $\dot{x} \to x$, $\dot{t} \to t$.*

Благодаря модулю переменной $|x|$ правой части f и коэффициентов a_1, a_2 двухскоростного модельного телеграфного уравнения (1) под двойным интегралом в его пробном обобщенном решении из [1; формула (8)] в формулах (4)–(7) эти и другие функции можно продолжить четно по x с положительных $x > 0$ на отрицательные $x < 0$ согласно нашему определению 1. По определению 1 классические решения удовлетворяют уравнению во внутренних точках, а начальным и граничным условиям в смысле соответствующих пределов внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$.

Найти классические решения и критерий (необходимые и достаточные условия) корректности по Адамару (существования, единственности решения и его устойчивости по исходным данным f, φ, ψ, μ) смешанной задачи (1)–(3) в G_∞ с нехарактеристической косой производной.

Определение 2. *Косая производная граничного условия (3) для $t \ge 0$ и смешанная задача (1)–(3) в G_∞ соответственно называются нехарактеристическими, если $a_1(0,t)\alpha(t) \ne \beta(t), t \ge 0$, в граничном режиме (3). Характеристика $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ называется критической уравнения (1) в первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty$.*

Из определения 1 классических решений смешанной задачи (1)–(3) в G_∞ и ее постановки непосредственно вытекают очевидные необходимые (обязательные) требования гладкости

$$f \in C(G_\infty), \quad \varphi \in C^2[0, +\infty[, \quad \psi \in C^1[0, +\infty[, \quad \mu \in C^1[0, +\infty[. \tag{8}$$

Ниже будут установлены дополнительные необходимые и достаточные требования гладкости на f. Положив $t = 0$ в граничном режиме (3), в силу начальных условий (2) при $x = 0$ находим необходимое первое условие согласования:

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0). \tag{9}$$

В первой производной по t от граничного режима (3) полагаем $t = 0$ и в силу начальных условий (2) при $x = 0$ находим необходимое второе условие согласования

$$\alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)\, u_{tt}\big|_{x=0}\big|_{t=0} + \beta(0)\psi'(0) + \gamma(0)\psi(0) =$$

$$= \alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \beta(0)\psi'(0) + \gamma(0)\psi(0) + \alpha(0)[f(0,0) + \left(a_2(0,0) - a_1(0,0)\right)\psi'(0) +$$

$$+ a_1(0,0)a_2(0,0)\varphi''(0) + \left((a_2)_t(0,0) / a_2(0,0)\right)\psi(0) + a_1(0,0)(a_2)_x(0,0)\varphi'(0)] = \mu'(0), \tag{10}$$

так как из уравнения (1) мы имеем

$$u_{tt}\big|_{x=0}\big|_{t=0} = u_{tt}\big|_{t=0}\big|_{x=0} = f(0,0) + \left(a_2(0,0) - a_1(0,0)\right)\psi'(0) + a_1(0,0)a_2(0,0)\varphi''(0) +$$

$$+ \left((a_2)_t(0,0) / a_2(0,0)\right)\psi(0) + a_1(0,0)(a_2)_x(0,0)\varphi'(0).$$

Мы обозначаем количеством штрихов над функциями одной переменной соответствующие порядки их обыкновенных производных по этим переменным.

Критическая характеристика $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ делит четверть плоскости G_∞ на два множества

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty : \ g_2(x,t) > g_2(0,0)\}, \ G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : \ g_2(x,t) \le g_2(0,0)\}.$$

Ниже теорема 1 использует вычисленные методом корректировки в [1] классические решения

$$F_i(x,t) \;=\; \int\limits_0^{g_2(x,t)} \int\limits_{h_1\left\{g_1\left((-1)^{i+1}g_2(x,t),\,g_2(x,t)\right),\tau\right\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \left[\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\exp\left\{\int\limits_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds\right\}\right]d\delta d\tau +$$

$$+\int\limits_{g_2(x,\,t)}^{t} \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \left[\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\exp\left\{\int\limits_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds\right\}\right]d\delta d\tau,\; i=1,2, \tag{11}$$

где с подынтегральной функцией по длине ds дуги в показателе экспоненты

$$E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})=\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}$$

интегралы не берутся от функций $f(x,t), a_1(x,t), a_2(x,t)$ для $x<0$. Для непрерывной правой части $f\in C(G_\infty)$ неоднородное уравнение (1) имеет частное классическое решение (11) на G_∞ из [1], равное F_1 при $i=1$ в G_- и F_2 при $i=2$ в G_+ с необходимой и достаточной гладкостью (13), (14) следующей теоремы 1 в силу следствия 3 статьи [1] при $\tilde{\varepsilon}=0$ и $\tilde{\vartheta}=2$, т.е. при $\varepsilon=\vartheta=1$.

Результаты и их обсуждение. Новым методом неявных характеристик доказана следующая

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $a_{3-i}(x,t)\ge a_{3-i}^{(0)}>0,\ (x,t)\in G_\infty=[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ a_{3-i}\in C^2(G_\infty)$, $i=1,2,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in C^1[0,+\infty[,\ a_1(0,t)\alpha(t)\ne\beta(t), t\ge 0,$ *а также коэффициент* $\alpha(0)=0$ *в (3) или*

$$a_1(0,0)=a_2(0,0),\ (a_1)_t(0,0)=(a_2)_t(0,0),\ (a_1)_x(0,0)=(a_2)_x(0,0). \tag{12}$$

Тогда для существования единственных и устойчивых классических решений $u\in C^2(G_\infty)$ *смешанной задачи (1)–(3) в* $\dot{G}_\infty$ *необходимо и достаточно гладкости (8),*

$$\mathbf{1}\quad \int\limits_0^t f(\left|h_i\{g_i(x,t),\tau\}\right|,\tau)\,d\tau\in C^1(G_\infty),\ i=1,2, \tag{13}$$

$$\int\limits_{(-1)^{i+1}g_2(x,t)}^{h_2\{g_2(x,t),\,g_2(x,t)\}} f(\delta,g_2(x,t))\,d\delta-\int\limits_{g_2(x,t)}^{t} f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^{g_2(x,t)} f\left(h_1\left\{g_1\left((-1)^{i+1}g_2(x,t),g_2(x,t)\right),\tau\right\},\tau\right)d\tau\in C^1(G_\infty),\ i=1,2, \tag{14}$$

и условий согласования (9), (10). Классическими решениями $u\in C^2(G_\infty)$ *задачи (1)–(3) являются*

$$u_-(x,t)=\varphi(h_2\{g_2(x,t),0\})-F_1(h_2\{g_2(x,t),0\},0)+$$

$$+\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}d\nu+F_1(x,t),\ (x,t)\in G_-, \tag{15}$$

$$u_+(x,t)=\varphi(0)-F_1(0,0)+F_1(x,t)+$$

$$+\int\limits_0^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}d\nu+$$

$$+\frac{1}{\eta(h^{(2)}[0,g_2(x,t)])}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}\eta(\rho)\left\{\frac{a_1(0,\rho)\mu(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}-\frac{a_1(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)+\beta(\rho)]}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}\times\right.$$

$$\times\left[\left.\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\right|_{\nu=h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{\partial h_1\{g_1(0,\rho),0\}}{\partial\rho}-\hat{F}_1{}'(\rho)\right]-$$

$$-\frac{a_1(0,\rho)\gamma(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}\left[\varphi(0)+\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}d\nu+\right.$$

$$\left.\left.+F_2(0,\rho)-F_1(0,0)-\hat{F}_1(\rho)\right]-(F_2)_\rho(0,\rho)\;-\frac{[a_1(0,\rho)+a_2(0,\rho)]\beta(\rho)}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}\hat{F}_2(\rho)\right\}d\rho,\ (x,t)\in G_+, \tag{16}$$

где функции $\hat{F}_1(\rho),\ \hat{F}_2(\rho)$ *взяты из (37), интегралы* $A_k(x,t),\ k=\overline{1,8}$, *в сумме (32) являются слагаемыми первой частной производной* $(F_2)_t$ *по* t *от* F_2 *из (30) и интегрирующий множитель* $\eta(t)=\exp\left\{\int\limits_0^t \frac{a_1(0,\tilde{\rho})\gamma(\tilde{\rho})}{a_1(0,\tilde{\rho})\alpha(\tilde{\rho})-\beta(\tilde{\rho})}d\tilde{\rho}\right\}$ *уравнения (34) из доказательства теоремы 1.*

Доказательство. *Необходимость*. Обязательность требований гладкости (8) и условий согласования (9), (10) на входные данные $f,\ \varphi,\psi,\ \mu$ установлена нами перед формулировкой теоремы 1. Там же говорится, что обязательность гладкости (13), (14) доказана методом корректировки пробных решений в классические решения в теоремах 1 и 3 статьи [1].

Достаточность. Наличие частного классического решения (11) на G_∞ неоднородного уравнения (1) сводит вычисление общего интеграла всех классических решений уравнения (1) к вычислению общего интеграла классических решений однородного уравнения (1) на G_∞. Отсюда на G_∞ легко находим общий интеграл неоднородного уравнения (1)

$$u(x,t)=\tilde{f}_1(g_1(x,t))+\tilde{f}_2(g_2(x,t))+F(x,t),\quad (x,t)\in G_\infty, \tag{17}$$

где функция $F=F_1$ на G_-, $F=F_2$ на G_+ и $\tilde{f}_1,\ \tilde{f}_2$ — любые дважды непрерывно дифференцируемые вещественные функции переменных $z,\ y$ вида

$$\tilde{f}_1(z)=f_1(z)+f_2(g_2(0,0)),\ \tilde{f}_2(y)=f_2(y)-f_2(g_2(0,0)). \tag{18}$$

В действительности множество классических решений на G_∞ в общем интеграле (17) не меняется, потому что после подстановки функций (18) в (17) постоянная $f_2(g_2(0,0))$ сокращается. В статье [12, формула (16)] этот простой и эффективный прием, существенно упрощающий вычисление решений систем дифференциальных уравнений, назван *методом включения значений решений* в общие интегралы уравнений с частными производными.

Сначала мы найдем выражение формального решения u_- на G_- смешанной задачи (1)–(3) на G_-. Решением этой задачи (1)–(3) на G_- является решение задачи Коши (1), (2) на G_-. Подставляем общий интеграл (17) на G_- в начальные условия (2) и для $x\geq 0$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &u(x,0)=\tilde{f}_1(g_1(x,0))+\tilde{f}_2(g_2(x,0))+F_1(x,0)=\varphi(x),\\ &u_t(x,0)=\left.\left(\frac{\partial\tilde{f}_1(g_1(x,t))}{\partial g_1}(g_1)_t\right)\right|_{t=0}+\left.\left(\frac{\partial\tilde{f}_2(g_2(x,t))}{\partial g_2}(g_2)_t\right)\right|_{t=0}+(F_1)_t(x,0)=\psi(x).\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В этой системе делаем невырожденную замену переменных

$$\xi=g_1(x,t),\quad \eta=g_2(x,t) \tag{20}$$

с якобианом $J(x,t)=\xi_x\eta_t-\xi_t\eta_x\neq 0$ в G_∞, так как $a_{3-i}(x,t)\geq a_{3-i}^{(0)}>0,\ i=1,2,$ в G_∞. Полные дифференциалы от характеристик $g_i(x,t)=C_i,\ C_i\in R,\ i=1,2,$ равны нулю. Поэтому из равенств (4) имеем

$$dg_i=(g_i)_x dx+(g_i)_t dt=[(g_i)_t+(-1)^i a_{3-i}(x,t)(g_i)_x]dt\equiv 0,\ (x,t)\in G,\ i=1,2,$$

и, следовательно,

$$(g_i)_t=(-1)^{i+1}a_{3-i}(x,t)(g_i)_x,\ (x,t)\in G,\ i=1,2. \tag{21}$$

Первое уравнение системы (19) дифференцируем по x, с помощью равенств (21) производные по x преобразуем в производные по t, делаем замену переменных (20) и в силу коммутируемости операции дифференцирования по x и взятия следа при $t=0$ получаем эквивалентную систему

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\tilde{f}_1(\xi)\right)_x+\left(\tilde{f}_2(\eta)\right)_x\right]\Big|_{t=0}=\varphi'(x)-(F_1)_x(x,0),\\ &\left[a_2\left(\tilde{f}_1(\xi)\right)_x-a_1\left(\tilde{f}_2(\eta)\right)_x\right]\Big|_{t=0}=\psi(x)-(F_1)_t(x,0).\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Первое уравнение этой системы, умноженное на $a_1(x,0)$, суммируем со вторым уравнением, полученную сумму делим на $a_1(x,0)+a_2(x,0)$, результат интегрируем по x от 0 до x и находим

$$\tilde{f}_1(g_1(x,0))=\int\limits_0^x\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}d\nu+\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_1\in R. \tag{23}$$

Из интеграла (23) при $y_1=g_1(x,0)$ и, следовательно, при $x=h_1\{y_1,0\}$ в силу существования обратной функции к функции g_1 и первого тождества обращения из (5) при $i=1,\ t=0$ для системы уравнений (22) мы имеем одно из ее решений

$$\tilde{f}_1(y_1)=\int\limits_0^{h_1\{y_1,0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\,d\nu+\tilde{C}_1. \tag{24}$$

Тогда из первого уравнения системы (19) для системы (22) легко находим второе решение

$$\tilde{f}_2(g_2(x,0))=\varphi(x)-F_1(x,0)-\int\limits_0^x\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\,d\nu-\tilde{C}_1.$$

В нем делаем замену переменной $y_2=g_2(x,0)$ и в силу существования обратной функции $x=h_2\{y_2,0\}$ к функции g_2 и первого тождества обращения из (5) при $i=2,\ t=0$ для системы уравнений (22) выводим второе ее решение

$$\tilde{f}_2(y_2)=\varphi(h_2\{y_2,0\})-F_1(h_2\{y_2,0\},0)-$$
$$-\int\limits_0^{h_2\{y_2,0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\,d\nu. \tag{25}$$

Подставляем формальные решения (24) и (25) системы (22) соответственно при $y_i=g_i(x,t),\ i=1,2,$ в общий интеграл (17) и получаем формальное решение (15) смешанной задачи (1)–(3) на G_- из теоремы 1.

Теперь мы будем искать формальное решение u_+ смешанной задачи (1)–(3) на G_+ как решение задачи Пикара для уравнения (1) с равенством функций (17) и (15) на критической характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0)$ и граничным режимом (3) при $x=0.$

У неявной функции $y_2=g_2(x,t)$ при $y_2=g_2(0,0)$ очевидно существует обратная функция $x=h_2\{g_2(0,0),t\}.$ Разность общего интеграла (17) из G_+ и уже известного решения (15) из замыкания $\overline{G_-}$ на пересечении $G_+\cap\overline{G_-}$, т.е. на характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0),$ должна быть нулевой

$$[u-u_-]\big|_{g_2(x,t)=g_2(0,0)}=\tilde{f}_1(g_1(x,t))\big|_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}}+\tilde{f}_2(g_2(0,0))-\varphi(h_2\{g_2(0,0),0\})+$$
$$+F_1(h_2\{g_2(0,0),0\},0)+[F_2(x,t)-F_1(x,t)]\big|_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}}-$$
$$-\int\limits_{h_2\{g_2(0,0),0\}}^{h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\,d\nu=$$
$$=\tilde{f}_1(g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t))-\varphi(0)+F_1(0,0)+[F_2(x,t)-F_1(x,t)]\big|_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}}-$$
$$-\int\limits_0^{h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\,d\nu=0,$$

потому что $\tilde{f}_2(g_2(0,0))=0$ ввиду (18) и $h_2\{g_2(0,0),0\}=0$ в силу второго тождества обращения из (5) при $i=2,\ \ x=0.$ Отсюда выражаем функцию

$$\tilde{f}_1(g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t))=\varphi(0)-F_1(0,0)-[F_2(x,t)-F_1(x,t)]\big|_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}}+$$
$$+\int\limits_0^{h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\,d\nu, \tag{26}$$

где слагаемые

$$F_1(0,0)=\int\limits_0^{g_2(0,0)}\int\limits_{h_1\{g_1(g_2(0,0),\,g_2(0,0)),\tau\}}^{h_2\{g_2(0,0),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\exp\left\{\int\limits_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(0,\,0)}E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds\right\}d\delta d\tau, \tag{27}$$

$$[F_2(x,t)-F_1(x,t)]\big|_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}}=$$

$$= \int\limits_{0}^{g_2(0,0)} \int\limits_{h_1\{g_1(-g_2(0,0),\, g_2(0,0)),\tau\}}^{h_1\{g_1(g_2(0,0),g_2(0,0)),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)} \exp\left\{ \int\limits_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} d\delta d\tau. \qquad (28)$$

В разности $F_2(x,t)-F_1(x,t)$ сокращаются вторые интегралы частных решений F_1 и F_2 из (11).

Для общего интеграла (17) из (26) при $z_1 = g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t)$ находим первую функцию

$$\tilde{f}_1(z_1) = \varphi(0) - F_1(0,0) - [F_2(x,t)-F_1(x,t)]\Big|_{x=h_1\{z_1,t\}} +$$

$$+ \int\limits_{0}^{h_1\{z_1,0\}} \frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\, d\nu, \qquad (29)$$

потому что $h_1\{z_1,t\} = h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t),t\} = h_2\{g_2(0,0),t\}$ по второму тождеству из (5) при $i=1$.

Вычисляем первые частные производные функции F_2 из (11) на G_+ соответственно по t и x:

$$(F_2)_t(x,t) = \int\limits_{-g_2(x,t)}^{h_1\{g_1(x,t),g_2(x,t)\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\tau=g_2(x,t)} \exp\left\{ \int\limits_{g_1(\delta,\, g_2(x,t))}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} d\delta\, (g_2)_t(x,t) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{g_2(x,t)} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\delta=h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} d\tau -$$

$$- \int\limits_{0}^{g_2(x,t)} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\delta=h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),\tau\}} \exp\left\{ \int\limits_{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t))}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} \times$$

$$\times \frac{\partial h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),\tau\}}{\partial t} d\tau -$$

$$- \int\limits_{0}^{g_2(x,t)} \int\limits_{h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)} \exp\left\{ \int\limits_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} d\delta d\tau\, E(x,t)(g_1)_t(x,t) -$$

$$- \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\tau=g_2(x,t)} \exp\left\{ \int\limits_{g_1(\delta,\, g_2(x,t))}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} d\delta\, (g_2)_t(x,t) +$$

$$+ \int\limits_{g_2(x,\,t)}^{t} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\delta=h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} d\tau -$$

$$- \int\limits_{g_2(x,\,t)}^{t} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\delta=h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \exp\left\{ \int\limits_{g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\,\tau)}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} d\tau -$$

$$- \int\limits_{g_2(x,t)}^{t} \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)} \exp\left\{ \int\limits_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} d\delta d\tau\, E(x,t)(g_1)_t(x,t),\ (x,t)\in G_+, \qquad (30)$$

$$(F_2)_x(x,t) = \frac{-1}{a_1(x,t)} \int\limits_{-g_2(x,t)}^{h_1\{g_1(x,t),g_2(x,t)\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\tau=g_2(x,t)} \times$$

$$\times \exp\left\{ \int\limits_{g_1(\delta,\, g_2(x,t))}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} d\delta\ (g_2)_t(x,t) +$$

$$+ \frac{1}{a_2(x,t)} \int\limits_{0}^{g_2(x,t)} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\delta=h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{a_1(x,t)} \int\limits_{0}^{g_2(x,t)} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\Bigg|_{\delta=h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),\tau\}} \times$$

$$\times \exp\left\{ \int\limits_{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t))}^{g_1(x,\,t)} E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds \right\} \frac{\partial h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),\tau\}}{\partial t} d\tau -$$

$$-\frac{1}{a_2(x,t)}\int\limits_0^{g_2(x,t)}\int\limits_{h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\exp\left\{\int\limits_{g_1(\delta,\tau)}^{g_1(x,t)}E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds\right\}d\delta d\tau\, E(x,t)(g_1)_t(x,t)+$$

$$+\frac{1}{a_2(x,t)}\int\limits_{g_2(x,t)}^{t}\left.\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\right|_{\delta=h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}d\tau+$$

$$+\frac{1}{a_1(x,t)}\int\limits_{g_2(x,t)}^{t}\left.\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\right|_{\delta=h_2\{g_2(x,t),\tau\}}\exp\left\{\int\limits_{g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\,\tau)}^{g_1(x,t)}E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds\right\}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}d\tau-$$

$$-\frac{1}{a_2(x,t)}\int\limits_{g_2(x,t)}^{t}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\exp\left\{\int\limits_{g_1(\delta,\tau)}^{g_1(x,t)}E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds\right\}d\delta d\tau\, E(x,t)(g_1)_t(x,t),\ (x,t)\in G_+, \quad (31)$$

так как $h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),g_2(x,t)\}=-g_2(x,t)$, $g_1(\delta,\tau)=g_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)=g_1(x,t)$ и $g_1(\delta,\tau)=$ $=g_1(h_1\{g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t)),\tau\},\tau)=g_1(-g_2(x,t),g_2(x,t))$ по второму тождеству обращения из (5) при $i=1$ соответственно в нижних пределах интегрирования от функций $f(\delta,\tau)$ и $E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})$.

Чтобы применить коммутируемость дифференцирования F_2 по t и взятия следа при $x=0$ на G_+, мы выразим первую производную по x от решения F_2 из (11) через производную по t от F_2 и сумму слагаемых четного порядка следования в этой производной $(F_2)_t$ на G_+.

Первую частную производную $(F_2)_t$ по t от F_2 на G_+ из (30) условно запишем в виде суммы

$$(F_2)_t(x,t)=A_1(x,t)+A_2(x,t)-A_3(x,t)-A_4(x,t)-A_5(x,t)+A_6(x,t)-A_7(x,t)-A_8(x,t), \quad (32)$$

где $A_k(x,t)$, $k=\overline{1,8}$, — интегралы этой производной, перед которыми знаки соответствуют знакам интегралов в (30). Первая производная $(F_2)_x$ по x от F_2 на G_+ из (31) условно записывается в виде

$$(F_2)_x(x,t)=\frac{-1}{a_1(x,t)}A_1(x,t)+\frac{1}{a_2(x,t)}A_2(x,t)+\frac{1}{a_1(x,t)}A_3(x,t)-\frac{1}{a_2(x,t)}A_4(x,t)+$$

$$+\frac{1}{a_1(x,t)}A_5(x,t)+\frac{1}{a_2(x,t)}A_6(x,t)+\frac{1}{a_1(x,t)}A_7(x,t)-\frac{1}{a_2(x,t)}A_8(x,t).$$

Тогда справедливо тождество

$$(F_2)_t(x,t)+a_1(x,t)(F_2)_x(x,t)=\left(1+\frac{a_1(x,t)}{a_2(x,t)}\right)[A_2(x,t)-A_4(x,t)+A_6(x,t)-A_8(x,t)],\ (x,t)\in G_+,$$

в правой части которого сократились слагаемые нечетного порядка следования из $(F_2)_x$. Отсюда легко выводится представление производной $(F_2)_x$ по x через производную $(F_2)_t$ по t

$$(F_2)_x(x,t)=\frac{-1}{a_1(x,t)}(F_2)_t(x,t)+\frac{a_1(x,t)+a_2(x,t)}{a_1(x,t)a_2(x,t)}[A_2(x,t)-A_4(x,t)+A_6(x,t)-A_8(x,t)],\ (x,t)\in G_+. \quad (33)$$

Итак, подставляем общий интеграл (17) с функциями $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ из (18) в граничный режим (3), преобразуя производные $\partial\tilde{f}_i(g_i(x,t))/\partial x$ в производные $\partial\tilde{f}_i(g_i(x,t))/\partial t$, $i=1,2$, с помощью равенств $(g_i)_x\equiv(-1)^{i+1}(g_i)_t/a_{3-i}(x,t)$, $i=1,2$, из (21) и используя запись (33), получаем тождество

$$\Gamma(t)u\equiv\left(\alpha(t)-\frac{\beta(t)}{a_1(0,t)}\right)\frac{\partial\tilde{f}_2(g_2(0,t))}{\partial t}+\gamma(t)[\tilde{f}_2(g_2(0,t))+F_2(0,t)]+\left(\alpha(t)+\frac{\beta(t)}{a_2(0,t)}\right)\frac{\partial\tilde{f}_1(g_1(0,t))}{\partial t}+$$

$$+\frac{1}{a_1(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\left.\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\right|_{\tau=g_2(x,t)}\exp\left\{\int\limits_{g_1(\delta,\,g_2(x,t))}^{g_1(x,t)}E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})ds\right\}d\delta\,(g_2)_t(x,t)+$$

$$+\gamma(t)\,\tilde{f}_1(g_1(0,t))+\left(\alpha(t)-\frac{\beta(t)}{a_1(0,t)}\right)(F_2)_t(0,t)+\beta(t)\left(1+\frac{a_1(x,t)}{a_2(x,t)}\right)[A_2-A_4+A_6-A_8](0,t)=\mu(t),\ t\geq 0.$$

После деления этого тождества на коэффициент $[a_1(0,t)\alpha(t)-\beta(t)]/a_1(0,t)$ для функции $\tilde{f}_2(g_2(0,t))$ мы выводим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\tilde f_2(g_2(0,t))}{\partial t}+\frac{a_1(0,t)\gamma(t)}{a_1(0,t)\alpha(t)-\beta(t)}\,\tilde f_2(g_2(0,t))=\frac{a_1(0,t)\mu(t)}{a_1(0,t)\alpha(t)-\beta(t)}-$$
$$-\frac{a_1(0,t)[a_1(0,t)\alpha(t)+\beta(t)]}{a_2(0,t)[a_1(0,t)\alpha(t)-\beta(t)]}\frac{\partial\tilde f_1(g_1(0,t))}{\partial t}-\frac{a_1(0,t)\gamma(t)}{a_1(0,t)\alpha(t)-\beta(t)}[\,\tilde f_1(g_1(0,t))+F_2(0,t)]-(F_2)_t\,(0,t)-$$
$$-\frac{[a_1(0,t)+a_2(0,t)]\beta(t)}{a_2(0,t)[a_1(0,t)\alpha(t)-\beta(t)]}[A_2-A_4+A_6-A_8](0,t), \tag{34}$$

в правой части которого функция $\tilde f_1(g_1(0,t))$ известна в (29). Умножаем это дифференциальное уравнение на интегрирующий множитель $\eta(t)=\exp\left\{\int\limits_0^t\frac{a_1(0,\tilde\rho)\gamma(\tilde\rho)}{a_1(0,\tilde\rho)\alpha(\tilde\rho)-\beta(\tilde\rho)}d\tilde\rho\right\}$, интегрируем результат умножения по t от 0 до t и после деления на $\eta(t)$ для уравнения (34) имеем решение

$$\tilde f_2(g_2(0,t))=\frac{1}{\eta(t)}\int\limits_0^t\eta(\rho)\left\{\frac{a_1(0,\rho)\mu(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}-\frac{a_1(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)+\beta(\rho)]}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}\frac{\partial\tilde f_1(g_1(0,\rho))}{\partial\rho}-\right.$$
$$-\frac{a_1(0,\rho)\gamma(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}[\,\tilde f_1(g_1(0,\rho))+F_2(0,\rho)]-\ (F_2)_\rho(0,\rho)\ -$$
$$\left.-\ \frac{[a_1(0,\rho)+a_2(0,\rho)]\beta(\rho)}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}[A_2-A_4+A_6-A_8](0,\rho)\right\}d\rho+\frac{\tilde C_2}{\eta(t)},\ \tilde C_2\in R, \tag{35}$$

где постоянная $\tilde C_2=0$ в силу второго равенства из (18) при $t=0$.

Здесь полагаем $z_2=g_2(0,t)$ и, тем самым, $t=h^{(2)}[0,z_2]=g_2(0,t)$ и находим для общего интеграла (17) вторую функцию

$$\tilde f_2(z_2)=\frac{1}{\eta(h^{(2)}[0,z_2])}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,z_2]}\eta(\rho)\left\{\frac{a_1(0,\rho)\mu(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}-\frac{a_1(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)+\beta(\rho)]}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}\times\right.$$
$$\times\frac{\partial\tilde f_1(g_1(0,\rho))}{\partial\rho}\ -\ \frac{a_1(0,\rho)\gamma(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}[\,\tilde f_1(g_1(0,\rho))+F_2(0,\rho)]\ -\ (F_2)_\rho(0,\rho)\ -$$
$$\left.-\frac{[a_1(0,\rho)+a_2(0,\rho)]\beta(\rho)}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}\tilde F_2(\rho)\right\}d\rho, \tag{36}$$

в которой согласно формуле (29) функции

$$\tilde f_1(g_1(0,\rho))\ =\ \varphi(0)-\ F_1(0,0)\ -\ [F_2(x,\rho)-F_1(x,\rho)]\Big|_{x=h_1\{g_1(0,\rho),\rho\}=0}\ +$$
$$+\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\,d\nu,$$
$$\frac{\partial\tilde f_1(g_1(0,\rho))}{\partial\rho}=\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)-a_1(\nu,0)(F_1)_\nu(\nu,0)-(F_1)_t(\nu,0)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\Bigg|_{\nu=h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{\partial h_1(g_1(0,\rho),0)}{\partial\rho}-$$
$$-\hat F_1{}'(\rho),\ \hat F_1(\rho)=F_2(0,\rho)-F_1(0,\rho),\ \hat F_2(\rho)=[A_2-A_4+A_6-A_8](0,\rho). \tag{37}$$

Подставляем функции (29) при $z_1=g_1(x,t)$ и (36) при $z_2=g_2(x,t)$ в общий интеграл (17) и получаем формальное решение u_+ вида (16) на G_+ из теоремы 1. После этих подстановок функций (29) и (36) в (17) функция F_2 из (17) сокращается с F_2 из разности $F_1(x,t)-F_2(x,t)$ при $x=h_1\{z_1,t\}$ и $z_1=g_1(x,t)$ в (29), так как $h_1\{g_1(x,t),t\}=x$ по второму тождеству обращения из (5) при $i=1$.

Убедимся в дважды непрерывной дифференцируемости функций u_- на G_- и u_+ на G_+. Гладкости коэффициентов $a_{3-i}\in C^2(G_\infty)$, $i=1,2$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in C^1[0,+\infty[$, характеристических функций $g_i,h_i,h^{(i)}\in C^2$, $i=1,2$, и данных $\varphi,\psi,\ \mu$ из (8), очевидно, достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости всех слагаемых, которые их содержат в функциях (15) на G_- и (16) на G_+. В силу теорем 1 и 3 работы [1] гладкости $f\in C(G_\infty)$ из (8) и гладкости (13), (14) также достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости остальных слагаемых функций (15) на G_- и (16) на G_+. Дважды непрерывно дифференцируемые функции (15) и (16), очевидно, поточечно удовлетворяют неоднородному уравнению (1) соответственно в G_- и G_+, так как они имеют структуру общего интеграла (17) его классических решений.

Для $f \in C(G_\infty)$ с гладкостью (13), (14) дважды непрерывная дифференцируемость решений F_1 и F_2 из (11) неоднородного уравнения (1) не только, соответственно, в G_- и G_+, а также на критической характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0)$ вытекает из следствия 3 работы [1] методом корректировки и их дважды непрерывно дифференцируемой стыковки на характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0)$. Поэтому остается проверить дважды непрерывную дифференцируемость на характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0)$ решений u_- при $F_1=0$ и u_+ при $F_2=0$, т.е. решений u_- из (15) и u_+ из (16) однородного уравнения (1) при $f(x,t)=0$ в G_∞.

Вычисляем первую производную по t разности функций (15) в $\overline{G_-}$ и (16) в G_+ при $f=0$

$$\frac{\partial u_-}{\partial t}-\frac{\partial u_+}{\partial t}=\frac{d\varphi(h_2\{g_2(x,t),0\})}{dh_2}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),0\}}{\partial t}-\left.\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\right|_{\nu=h_2\{g_2(x,t),0\}}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),0\}}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{\eta(h^{(2)}[0,g_2(x,t)])}\int_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}\eta(\rho)\left[\frac{a_1(0,\rho)\mu(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}-\frac{a_1(0,\rho)[a_2(0,\rho)\alpha(\rho)+\beta(\rho)]}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}\times\right.\right.$$

$$\times\left.\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\right|_{\nu=h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{\partial h_1\{g_1(0,\rho),0\}}{\partial\rho}-$$

$$\left.\left.-\frac{a_1(0,\rho)\gamma(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}\left(\varphi(0)+\int_0^{h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}d\nu\right)\right]d\rho\right\},\ x,t\geq 0. \tag{38}$$

Дифференцируя один раз по t как сложную функцию, используем дифференциальные уравнения характеристик (21) и находим тождества

$$\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial t}=\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial g_i}(g_i)_t=(-1)^{i+1}a_{3-i}(x,t)\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial g_i}(g_i)_x=$$

$$=(-1)^{i+1}a_{3-i}(x,t)\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial x},\ x,\ t\geq 0,\ i=1,2. \tag{39}$$

В силу вторых формул обращения из (5) при $i=1,2,\ t=0$ получаем значение производной

$$\left.\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial x}\right|_{t=0}=1,\ x\geq 0,\ i=1,2, \tag{40}$$

и, следовательно, из (39) имеем тождества

$$\left.\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial t}\right|_{t=0}=(-1)^{i+1}a_{3-i}(x,0),\ x\geq 0,\ i=1,2, \tag{41}$$

так как в правых частях тождеств (39) взятие следа при $t=0$ перестановочно с дифференцированием по x. Ввиду второй формулы обращения из (6) при $i=2,\ x=0$ из $h^{(2)}[0,g_2(0,t)]=t$ выводим

$$\left.\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial t}\right|_{x=0}=1,\ t\geq 0, \tag{42}$$

потому что здесь взятие следа при $x=0$ перестановочно с дифференцированием по t.

В тождестве (38) полагаем $g_2(x,t)=g_2(0,0)$, т.е. $x=t=0$, и на основе тождеств (41) при $i=1,2$, $x=0$, значения (42) при $t=0$ и первого условия согласования (9) приходим к равенствам

$$\left.\left[\frac{\partial u_-}{\partial t}-\frac{\partial u_+}{\partial t}\right]\right|_{g_2(x,t)=g_2(0,0)}=-a_1(0,0)\varphi'(0)+a_1(0,0)\frac{a_1(0,0)\varphi'(0)+\psi(0)}{a_1(0,0)+a_2(0,0)}-\left\{\frac{a_1(0,0)\mu(0)}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}-\right.$$

$$-\frac{a_1(0,0)[a_2(0,0)\alpha(0)+\beta(0)]}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}\frac{a_1(0,0)\varphi'(0)+\psi(0)}{a_1(0,0)+a_2(0,0)}-\frac{a_1(0,0)\gamma(0)}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}\varphi(0)\Bigg\}\times$$

$$\times\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial t}\Bigg|_{g_2(x,t)=g_2(0,0)}=\frac{a_1(0,0)}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}[\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)-\mu(0)]=0, \quad (43)$$

так как $h_i\{g_i(0,0),0\}=0$ ввиду вторых формул обращения из (5) для $i=1,2,\ x=t=0,$ $t=h^{(2)}[0,g_2(0,0)]=0$ в силу вторых формул обращения из (6) для $i=2,\ x=t=0$ и интегрирующий множитель $\eta(0)=1.$

Находим первую производную по x разности функций (15) в $\overline{G_-}$ и (16) в G_+ при $f=0$

$$\frac{\partial u_-}{\partial x}-\frac{\partial u_+}{\partial x}=\frac{d\varphi(h_2\{g_2(x,t),0\})}{dh_2}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),0\}}{\partial x}-\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\Bigg|_{\nu=h_2\{g_2(x,t),0\}}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),0\}}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Bigg\{\frac{1}{\eta(h^{(2)}[0,g_2(x,t)])}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}\eta(\rho)\Bigg[\frac{a_1(0,\rho)\mu(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}-\frac{a_1(0,\rho)[a_2(0,\rho)\alpha(\rho)+\beta(\rho)]}{a_2(0,\rho)[a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)]}\times$$

$$\times\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}\Bigg|_{\nu=h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{\partial h_1\{g_1(0,\rho),0\}}{\partial\rho}-$$

$$-\frac{a_1(0,\rho)\gamma(\rho)}{a_1(0,\rho)\alpha(\rho)-\beta(\rho)}\Bigg(\varphi(0)+\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,\rho),0\}}\frac{a_1(\nu,0)\varphi'(\nu)+\psi(\nu)}{a_1(\nu,0)+a_2(\nu,0)}d\nu\Bigg)\Bigg]d\rho\Bigg\},\ x,t\ge 0. \quad (44)$$

Дифференцируем один раз по x и ввиду уравнений (21) при $i=2$ приходим к равенствам

$$\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial x}=\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial g_2}(g_2)_x=$$

$$=-\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial g_2}\frac{(g_2)_t}{a_1(x,t)}=-\frac{1}{a_1(x,t)}\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial t},\ x,t\ge 0. \quad (45)$$

Согласно значению (42) из равенств (45) находим значения производной

$$\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=-\frac{1}{a_1(0,t)},\ t\ge 0. \quad (46)$$

Из значения (40) при $i=2,\ x=0,$ тождества (41) при $i=1,\ x=0,$ значения (46) при $t=0$ и первого условия согласования (9) из тождества (44) при $g_2(x,t)=g_2(0,0),$ т.е. $x=t=0,$ имеем равенства

$$\left[\frac{\partial u_-}{\partial x}-\frac{\partial u_+}{\partial x}\right]\Bigg|_{g_2(x,t)=g_2(0,0)}=\varphi'(0)-\frac{a_1(0,0)\varphi'(0)+\psi(0)}{a_1(0,0)+a_2(0,0)}-\Bigg\{\frac{a_1(0,0)\mu(0)}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}-$$

$$-\frac{a_1(0,0)[a_2(0,0)\alpha(0)+\beta(0)]}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}\frac{a_1(0,0)\varphi'(0)+\psi(0)}{a_1(0,0)+a_2(0,0)}-\frac{a_1(0,0)\gamma(0)}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}\varphi(0)\Bigg\}\frac{\partial h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}{\partial x}\Bigg|_{g_2(x,t)=g_2(0,0)}=$$

$$=\frac{1}{a_1(0,0)\alpha(0)-\beta(0)}[\mu(0)-\alpha(0)\psi(0)-\beta(0)\varphi'(0)-\gamma(0)\varphi(0)]=0. \quad (47)$$

Во второй части настоящей статьи для завершения доказательства теоремы 1 остается только убедиться в непрерывности вторых частных производных от решений (15) и (16) на критической характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0).$ Доказательство теоремы 1 будет завершено в следующей статье.

Заключение. В данной работе установлен критерий корректности, найдены явные единственные устойчивые решения и доказана их дважды непрерывная дифференцируемость вне критической характеристики и непрерывная дифференцируемость на критической характеристике. Критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и двух условий согласования начальных данных, граничного данного и правой части уравнения. Устойчивость классических решений по начальным данным, граничному данному и правой части уравнения следует из выведенных формул. Разработан метод неявных характеристик вывода критериев корректности по Адамару с вычислением явных формул классических решений нехарактеристической смешанной задачи для двухскоростного модельного телеграфного уравнения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки пробных в классические решения модельного волнового уравнения с переменными скоростями $a_1(x,t)$ и $a_2(x,t)$ в первой четверти плоскости / Ф.Е. Ломовцев // Вестник Фонда фундаментальных исследований. — 2023. — № 4. — С. 53–83.
2. Ломовцев, Ф.Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф.Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2021. — № 1. — С. 18–38.
3. Ломовцев, Ф.Е. The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* on the Halt-Line / F.E. Lomovtsev // Труды 10-го международного научного семинара AMADE–2021. — БГУ: ИВЦ Минфина, 2022. — С. 43–53.
4. Ломовцев, Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. / Ин-т математики Нац. акад. наук Беларуси; ред. С.Г. Красовский. — Минск: ИМ НАН Беларуси, 2015. — Ч. 2. — С. 74–75.
5. Lomovtsev, F.E. Global Correctness Theorem of the First Mixed Problem for the Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* in the Half-Strip of the Plane / F.E. Lomovtsev // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2021. — Т. 11, № 3. — С. 13–26.
6. Ломовцев, Ф.Е. Формулы Римана первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. I / Ф.Е. Ломовцев // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя B, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). — 2023. — № 2(62). — С. 16–31.
7. Lomovtsev, F.E. Global Correctness Theorem to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Segment / F.E. Lomovtsev // Problems of physics, mathematics and technology. — 2022. — № 1(50). — P. 62–73. — DOI: https: //doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62.
8. Ломовцев, Ф.Е. Метод компенсации граничного режима правой частью телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в решении второй смешанной задачи на полупрямой / Ф.Е. Ломовцев // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2023. — Т. 13, № 1. — С. 39–63.
9. Ломовцев, Ф.Е. Вторая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости / Ф.Е. Ломовцев // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2022. — Т. 12, № 3. — С. 50–70.
10. Ломовцев, Ф.Е. Смешанные задачи для новых множеств уравнений математической физики / Ф.Е. Ломовцев // Заключительный отчет о научно-исследовательской работе совместного научного проекта БРФФИ-НФЕНК № Ф22КИ-001 от 05.11.2021 г. — 2023. — 108 с.
11. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — Москва: Наука, 2004. — 798 с.
12. Ломовцев, Ф.Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных / Ф.Е. Ломовцев, В.В. Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. — 2019. — № 3(104). — С. 5–17.

R E F E R E N C E S

1. Lomovtsev F.E. *Vestnik Fonda fundamentalnykh issledovani* [Bulletin of the Foundation for Fundamental Research], 2023, 4, pp. 53–83.
2. Lomovtsev F.E. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika* [Journal of Belarusian State University. Mathematics. Computer Science], 2021, 1, pp. 18–38.
3. Lomovtsev F.E. *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminara AMADE–2021* [Proceedings of the 10th international scientific seminar AMADE–2021], BGU: IVTs Minfina, 2022, pp. 43–53.
4. Lomovtsev F.E. *Shestiye Bogdanovskiye chteniya po obyknovennym differentsialnym uravneniyam: materialy mezhdunar. matemat. konf., Minsk, 7–10 dekabria 2015 g.* [Sixth Bogdanov Readings on ordinary differential equations: Proceedings of the int. mathem. conf., Minsk, December 7–10, 2015], In-t of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk: IM NAN Belarusi, 2015, 2, pp. 74–75.
5. Lomovtsev F.E. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta imia Ianky Kupaly. Seriya 2, Matematyka. Fizika. Infarmatyka. Vylichalnaya tekhnika i kiravanne* [Journal of Yanka Kupala State University of Grodno. Mathematics. Physics. Information Technology and Computer Science], 2021, 11(3), pp. 13–26.
6. Lomovtsev F.E. *Vesnik Mahileuskaha dziarzhaunaga universiteta imia A.A. Kuliashova. Seiya B, Pryrodaznauchiya navuki (Matematyka. Fizika. Biyalogiya)* [Bulletin of A.A. Kulyashov Mogilev State University. Series B, Natural Sciences (Mathematics, Physics, Biology)], 2023, 2(62), pp. 16–31.
7. Lomovtsev F.E. Global Correctness Theorem to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Segment / F.E. Lomovtsev // Problems of physics, mathematics and technology. — 2022. — № 1(50). — Pp. 62–73. — DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62.
8. Lomovtsev F.E. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta imia Ianky Kupaly. Seriya 2, Matematyka. Fizika. Infarmatyka. Vylichalnaya tekhnika i kiravanne* [Journal of Yanka Kupala State University of Grodno. Mathematics. Physics. Information Technology and Computer Science], 2023, 13, 1, pp. 39–63.
9. Lomovtsev F.E. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta imia Ianky Kupaly. Seriya 2, Matematyka. Fizika. Infarmatyka. Vylichalnaya tekhnika i kiravanne* [Journal of Yanka Kupala State University of Grodno. Mathematics. Physics. Information Technology and Computer Science], 2022, 12(3), pp. 50–70.
10. Lomovtsev F.E. *Zakluchitelny otchet o nauchno-issledovatelskoi rabote sovmestnogo nauchnogo proyekta BRFFI-NFENK No. F22KI-001 ot 5.11.2021* [Final report on the research work of the joint scientific project BRFFI-NFENK No. F22KI-001 dated 05.11.2021], 2023, 108 p.
11. Tikhonov A.N., Samarski A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics], Moscow: Nauka, 2004, 798 p.
12. Lomovtsev F.E., Lysenko V.V. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2019, 3(104), pp. 5–17.

Поступила в редакцию 11.06.2025

Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by — Ломовцев Ф.Е.