Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

ПРАКТИКУМ
ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

Методические рекомендации

В 2 частях

ЧАСТЬ 1

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2025

УДК 512(076.5)
ББК 22.14я73
П69

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 08.09.2025.

Составители: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук, доцент **Л.Л. Ализарчик;** преподаватель кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова **А.И. Лятос**

Рецензенты:
доцент кафедры математики и компьютерной безопасности
ПГУ имени Евфросинии Полоцкой,
кандидат педагогических наук *А.П. Матеденок*;
доцент кафедры информационных технологий и управления бизнесом
ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Е.А. Витько*

П69 **Практикум по решению задач по алгебре :** методические рекомендации : в 2 ч. / сост.: Л.Л. Ализарчик, А.И. Лятос. — Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2025. — Ч. 1. — 48 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами дисциплин: «Элементарная математика», «Практикум по решению задач по алгебре», «Элементарная математика: алгебра», «Общая методика обучения математике», «Частная методика обучения математике», «Дополнительные главы методики преподавания математики», «Практикум по методике обучения математике», «Практикум по решению математических задач», «Методика профильного обучения математике» специальностей I ступени высшего образования. Вначале предложены краткие теоретические сведения, затем подробные решения задач различных типов и далее представлены задания для самостоятельного решения.

УДК 512(076.5)
ББК 22.14я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная цель данного издания — систематизировать и обобщить знания, полученные студентами при изучении школьного курса алгебры, сформировать практические умения с помощью общих и частных методов решать алгебраические задачи различных типов и уровней сложности.

Для достижения этой цели предполагается:

- обеспечить изучение студентами различных методов решения алгебраических задач;
- сформировать у студентов умения решать одну задачу различными способами;
- выработать навыки классификации и систематизации задач по отдельным темам школьной математики;
- научить студентов дифференцировать задачи как по уровням трудности, так и в соответствии с профилями обучения математике;
- развивать творческие способности студентов путем систематического решения задач повышенной сложности и нестандартных задач;
- сформировать общие приемы поиска решения математических задач.

При решении предложенных в методических рекомендациях задач у студентов формируется умение использовать различные методы: метод математической индукции, метод равносильных переходов, метод замены переменной, метод интервалов, комбинированный метод.

Методические рекомендации построены по следующему принципу: вначале предложены краткие теоретические сведения, затем подробные решения задач различных типов и далее представлены задания для самостоятельного решения.

Адресовано студентам Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, обучающимся по специальностям:

6-05-0113-04 Физико-математическое образование (математика и информатика);

6-05-0113-04 Физико-математическое образование (математика и физика);

6-05-0533-09 Прикладная математика.

Данное издание может успешно использоваться для подготовки к занятиям по дисциплинам: «Элементарная математика», «Практикум по решению задач по алгебре», «Элементарная математика: алгебра», «Общая методика обучения математике», «Частная методика обучения математике», «Дополнительные главы методики преподавания математики», «Практикум по методике обучения математике», «Практикум по решению математических задач», «Методика профильного обучения математике».

1. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ ИНДУКЦИЯ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1.1 Множество натуральных чисел

Натуральные числа (естественные числа) — числа, возникающие естественным образом при счёте (как в смысле перечисления, так и в смысле исчисления).

Существуют два подхода к определению натуральных чисел — числа, используемые при:

- **перечислении (нумеровании) предметов** (*первый, второй, третий…*);
- **обозначении количества предметов** (*нет предметов, один предмет, два предмета…*).

Множество натуральных чисел описывается с помощью системы аксиом **Пеано**, которые служат аксиоматическим определением трёх исходных (основных) понятий теории натуральных чисел: «*натуральное число*», «*единица*», «*непосредственно следует за*».

Аксиоматическое определение множества натуральных чисел:

Множеством натуральных чисел называется всякое непустое множество $\mathbb{N}$, в котором для некоторых элементов a и b существует отношение «b непосредственно следует за a» (a, a'), удовлетворяющее следующим аксиомам (аксиомам **Пеано**):

1. Существует натуральное число 1, непосредственно не следующее ни за каким натуральным числом, т.е. $a' \neq 1$.

2. Для любого натурального числа a существует одно и только одно непосредственно следующее натуральное число a', т.е. из $a = b$ следует $a' = b'$.

3. Любое натуральное число, кроме 1, непосредственно следует за одним и только одним натуральным число, т.е., если $a \neq 1$, то из $a' = b'$ следует $a = b$.

4. (Аксиома математической индукции) Пусть M – множество натуральных чисел, обладающих свойствами:

1) $1 \in M$,

2) если натуральное число $a \in M$, то и $a' \in M$,

тогда множество M содержит все натуральные числа, т.е. совпадает с $\mathbb{N}$.

1.2 Метод математической индукции

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n (например, нужно доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2). Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение, проверяют сначала его справедливость для $n = 1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n = k$ следует его справедливость и при $n = k + 1$. Тогда утверждение считается доказанным для всех n.

В самом деле, утверждение справедливо при $n = 1$. Но тогда оно справедливо и для следующего числа $n = 1+1 = 2$. Из справедливости утверждения для $n = 2$ следует его справедливость для $n = 2+1 = 3$. Отсюда следует справедливость утверждения для $n = 4$ и т.д. Ясно, что, в конце концов, мы дойдём до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Метод математической индукции

Если предложение P(n), зависящее от натурального числа n, истинно для n=1 (P(1) истинно) и из того, что оно истинно для $n = k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n = k+1$, то предположение P(n) истинно для любого натурального числа n.

Обобщенный принцип математической индукции

В ряде случаев бывает нужно доказать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных чисел, а лишь для $n \geq p$, где p-фиксированное натуральное число. В этом случае принцип математической индукции формулируется следующим образом.

Если предложение P(n) истинно при n=p и если из того, что P(k) истинно следует, что истинно P(k+1) для любого $k \geq p$, то предложение P(n) истинно для любого $n \geq p$.

Алгоритм:

1. Проверяем истинность утверждения при $n = 1$ – первый шаг доказательства (первый индукционный шаг).

2. Допускаем, что утверждение справедливо при $n = k$, где k – произвольное натуральное число ($k \in N$), и доказываем, что тогда утверждение верно и при $n = k +1$ – второй шаг доказательства (второй индукционный шаг).

Если обе части доказательства проведены, то на основании принципа математической индукции утверждение истинно для всех натуральных n ($n \in N$) – вывод.

В самом деле, если утверждение справедливо при $n = 1$, то, по доказанному в шаге 2, оно верно и при $n =1+1 = 2$. Далее, из того, что оно верно при $n = 2$ вытекает его справедливость при $n = 2 +1 = 3$. Затем от $n = 3$ переходят к $n = 4$ и т.д. Ясно, что при этом рано или поздно мы доберемся до любого натурального числа n, а потому данное утверждение истинно для всех $n \in N$.

Пример 1. Доказать, что 1+3+5+…+(2n-1) = n^2.

Решение:

1) Имеем $n=1=1^2$. Следовательно, утверждение верно при n=1, т.е. P(1) истинно.

2) Докажем, что из истинности P(k) следует истинность P(k+1).

Пусть k – любое натуральное число и утверждение справедливо для n=k, т.е.

$1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$ (*).

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа n=k+1, т.е.

$1+3+5+\ldots+(2k+1) = (k+1)^2$.

В самом деле, используя утверждение (*), можно преобразовать левую часть:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+2k+1= (k+1)^2$.

Итак, из истинности P(k) следует истинность P(k+1).

На основании принципа математической индукции заключаем, что предположение P(n) истинно для натурального числа n.

Пример 2. Доказать, что при n > 6 справедливо неравенство $3^n>n\cdot 2^{n+1}$.

Решение: Перепишем неравенство в виде:

$\left(\frac{3}{2}\right)^n>2n$.

1) При n=7 имеем $\frac{3^7}{2^7}=\frac{2187}{128}> 14 = 2\cdot 7$ – неравенство верно.

2) Предположим, что при n = k заданное неравенство выполняется

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k>2k \ (*).$$

Докажем в этом случае верность неравенства при n=k+1.

$$\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}}=\left(\frac{3^k}{2^k}\right)\cdot\frac{3}{2}>2k\cdot\frac{3}{2}=3k>2(k+1).$$

Так как k >7, последнее неравенство очевидно.

В силу метода математической индукции неравенство справедливо при n>6.

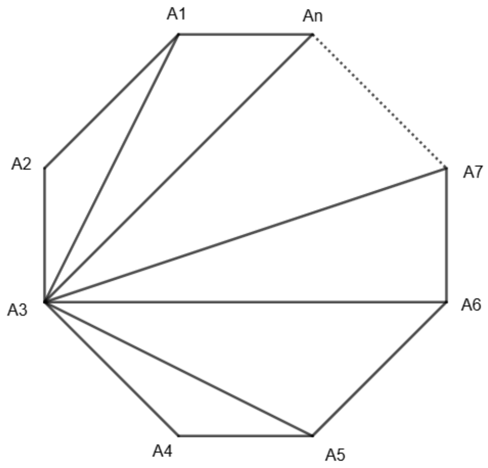
Пример 3. Доказать, что число диагоналей выпуклого n-угольника равно $A_n=n(n-3)/2$.

Решение:

1) При n=3 утверждение справедливо, ибо в треугольнике $A_3=3(3-3)/2=0$ диагоналей;

Итак, A(3) истинно.

2) Предположим, что во всяком выпуклом k-угольнике имеется A_k=k(k-3)/2 диагоналей.



Докажем, что тогда в выпуклом (k+1)-угольнике число диагоналей A_{k+1}=(k+1)(k-2)/2.

Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_kA_{k+1}$-выпуклый (k+1)-угольник.

Проведём в нём диагональ A_1A_k.

Чтобы подсчитать общее число диагоналей этого (k+1)-угольника, нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2\ldots A_k$, прибавить к полученному числу k-2, т.е. число диагоналей (k+1)-угольника, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует учесть диагональ A_1A_k.

Таким образом, $A_{k+1}= A_k$ +(k-2)+1=k(k-3)/2+k-1=(k+1)(k-2)/2.

Итак, из истинности A(k) следует истинность A(k+1).

Вследствие принципа математической индукции утверждение верно для любого выпуклого n-угольника.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Используя *метод полной индукции,* доказать, что:
Квадрат натурального числа при делении на 4 дает остаток 0 или 1.

2. Применяя *метод математической индукции*, доказать справедливость равенства для любого натурального *n*:

2.1 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$

2.2 $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n\,(n+1)(n+2)}{3}$

2.3 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$

2.4 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(\frac{n\,(n+1)}{2})^2$

2.5 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

2.6 $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\cdots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 2^{2n+1}$

2.7 $1+6+20+\ \ldots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$

3. Доказать, что для любого натурального *n* справедливо утверждение:

3.1 сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9

3.2 $(3^{2n+1}+40n-67) \vdots\ 64$ **3.4** $(5^{2n}-3^n2^{2n}) \vdots\ 13$

3.3 $(11^{n+2}+12^{2n+1}) \vdots\ 133$ **3.5** $(2^{n+3}+8^n3^{n+1}) \vdots\ 11$

4. Доказать, что если a> b, a и b – положительные числа, то $a^n > b^n$, где $n \in N$.

5. Доказать неравенство для любого натурального n

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

6. При каких натуральных n справедливо неравенство:

6.1 $2^n > n^2$ **6.2** $2^n > n(n+4)$ **6.3** $2^n < n^2 + n + 2$?

7. Доказать, что при любом натуральном n>1 справедливо неравенство:

7.1 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$

7.2 $6^{n-1} > n+3$

8. Доказать, что n различных прямых, проведенных на плоскости через одну точку, разбивают ее на 2n частей.

2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Бесконечной числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел.

Числовую последовательность принято обозначать $(x_n), (a_n), n \in N$.

2.1. Арифметическая прогрессия

Последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется арифметической прогрессией.

Число d – разность прогрессии, $d = a_{n+1} - a_n$,

$a_{n+1} = a_n + d$ – рекуррентная формула.

Замечание. Если $d = 0$, то получаем постоянную последовательность (2, 2, 2,…). Значит, постоянная последовательность является арифметической прогрессией, у которой $d = 0$.

Свойства арифметической прогрессии:

1) Формула n-ого члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

2) Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

3) Характеристическое свойство арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n > 1$$

2.2. Геометрическая прогрессия

Последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называется геометрической прогрессией.

Число q – знаменатель прогрессии.

$$\begin{cases} b_{n+1} = b_n \cdot q \\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0 \end{cases}$$ – рекуррентная формула.

Замечание. Постоянная последовательность $(2, 2, 2, \ldots)$ является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 2$, $q = 1$. Но не нулевая последовательность $(0, 0, 0, \ldots)$.

Свойства геометрической прогрессии:

1. Формула n-ого члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
2. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-b_1 + b_n \cdot q}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Если $q = 1$, то $S_n = b_1 \cdot n$.

3. Характеристическое свойство:

Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда любой член этой последовательности, начиная со второго, удовлетворяет равенству

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},\ n \geq 2$$

Для последовательности с положительными членами характеристическое свойство может быть записано в виде:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}},\ n \geq 2.$$

4. В конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть величина постоянная.

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}$$

5. Геометрическая прогрессия со знаменателем q, удовлетворяющим условию $|q| < 1$, называется **бесконечно убывающей**.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии может быть представлена в виде: $S = \frac{b_1}{1-q}$

Это позволяет представить бесконечную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби.

Примеры:

1) 0,(54) = 0,5454…

0,(54) = 0,54+0,0054+0,000054+… – геометрическая прогрессия.

$b_1 = 0{,}54$, $q = 0{,}01$.

$$0,(54) = \frac{0{,}54}{1-0{,}01} = \frac{0{,}54}{0{,}99} = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$$

2) –10,3(621)

–10,3(621) = –10,3–(0,0621+0,0000621+…) = A

$b_1 = \frac{621}{10000}$, $q = \frac{1}{1000}$.

$$A = -10 - \frac{3}{10} - \frac{\frac{621}{10000}}{1-0{,}001} = -10 - \frac{3}{10} - \frac{0{,}0621}{0{,}999} = -10 - \frac{3}{10} - \frac{23}{370} = -10\frac{67}{185}.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Сумма первого, пятого и пятнадцатого члена арифметической прогрессии равна трем. Найти сумму пятого и девятого ее членов.

2. Сумма первых 10 членов арифметической прогрессии равна 5, а сумма первых 40 её членов равна 80. Чему равна сумма первых 20 членов этой прогрессии?

3. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно 8. Найти сумму первых 16 членов.

4. Первый член арифметической прогрессии равен 15, а ее разность равна -4. Найти сумму всех членов прогрессии с 7-го по 21-й включительно.

5. Шестой член арифметической прогрессии составляет 60% от третьего, а их сумма равна 48. Найти разность прогрессии.

6. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на восемь.

7. Сумма членов арифметической прогрессии с 3-го по 13-й включительно равна 55 и a_n=5. Найти n.

8. Сумма первых n членов арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, равна половине суммы следующих n членов. Найти отношение суммы первых 3n членов этой прогрессии к сумме ее первых n членов.

9. Найти общий член числовой последовательности 2,4, 7,11, …, обладающей тем свойством, что разности между соседними членами составляют арифметическую прогрессию.

10. Один из корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен -0,2. Коэффициенты a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, их сумма равна 24. Чему равно утроенное значение второго корня?

11. Три числа x, y, 12 образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти сумму x + y.

12. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, состоящей из положительных членов, в которой квадрат первого члена в 2 раза меньше суммы квадратов ее членов.

13. Какие три числа a, b, c являются одновременно членами арифметической и геометрической прогрессий?

14. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

15. Три целых положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Найти третий член этой прогрессии, если второй член на 1 больше первого.

16. Найти четыре действительных числа, из которых первые три составляют геометрическую, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних членов равна 14, а сумма средних – 12.

17. Периодическую дробь представить в виде суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и найти эту сумму.

18. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй увеличить на 8, то данная прогрессия станет арифметической, но если затем третий член увеличить на 64, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

19. Перевести в обыкновенные дроби: 0,(3); 1,(6); 2,1(8).

3. ЦЕЛЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. КОРЕНЬ СТЕПЕНИ N. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

Множество всех чисел, противоположных натуральным, называется множеством **целых отрицательных чисел**. Сами натуральные числа при этом называют целыми положительными числами. Множество целых отрицательных чисел, множество целых положительных чисел и число нуль вместе называются **множеством целых чисел**. Это множество обозначается $\mathbb{Z}$.

Рациональным называется (лат. ratio — отношение, деление, дробь) всякое число, представляющееся в виде $\frac{a}{b}$, где a –целое, b –натуральное.

Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$ и может быть записано в виде:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Числа, которые не являются рациональными, то есть не являются ни целыми, ни представимыми в виде дроби вида $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное, называются **иррациональными**.

Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, и любая бесконечная десятичная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

Любое иррациональное число можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, и любая бесконечная непериодическая десятичная дробь является иррациональным числом.

Множества рациональных и иррациональных чисел вместе составляют множество **действительных чисел.**

3.2 Делимость чисел

Если натуральное число p не делится на натуральное число q, то говорят о делении с остатком. Так, если p – делимое, q – делитель и $p > q$, то $\mathbf{p = kq + r}$, где $r < q$, k – частное, r – остаток. Деление без остатка описывается случаем, когда $r = 0$.

Простым называется натуральное число, которое не имеет других натуральных различных делителей, кроме единицы и самого себя.

Числа, которые имеют и другие натуральные делители, кроме единицы и самих себя, называют **составными**.

Число 1 имеет единственный натуральный делитель – саму единицу. А значит, согласно данным определениям, оно не является ни простым, ни составным.

Два числа называют **взаимно простыми**, если они не имеют общих делителей, кроме единицы.

3.3 Корень степени n. Арифметический корень

Корнем n-ой степени из числа действительного числа a называют такое число b, n-ная степень которого равна b. Обозначается символом $\sqrt[n]{\ }$.

$$\sqrt[n]{a} = \mathrm{b} \Leftrightarrow b^n = a$$

В поле действительных чисел корень имеет только одно решение или ни одного, если это корень чётной степени из отрицательного числа.

Арифметическим корнем n–й степени из *неотрицательного* числа a называется *неотрицательное* число, n–я степень которого равна a.

Свойства:

1. $\sqrt[n]{0} = 0; \qquad \sqrt[n]{1} = 1;$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \qquad a,\ b \geq 0;$
3. $\sqrt[n]{a^n} = a, a \geqslant 0$
4. $\forall a \geqslant 0, b > 0 \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

5. $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{1/n}\right)^m=a^{m/n}.$

6. $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}, \qquad a>0, n\in\mathbb{N}$

7. $\forall a\geqslant 0, \qquad n,k\in\mathbb{N} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

Алгебраическим корнем *n*–й степени из данного числа называется множество всех корней из этого числа. Алгебраический корень *чётной* степени имеет два значения: положительное и отрицательное. Алгебраический корень *нечётной* степени имеет единственное значение: либо положительное, либо отрицательное.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Выполнить задания на делимость:

1.1 Докажите, что произведение любых трёх последовательных целых чисел:

а) делится на 3; б) делится на 6.

1.2 Можно ли в числе $1{*}21934$ поставить вместо звёздочки цифру так, чтобы полученное число делилось на 11?

1.3 Вставьте вместо звёздочек в числе $2{*}\,45\,{*}6$ цифры так, чтобы полученное число делилось а) на 12, б) на 36.

1.4 Какое наименьшее количество цифр "2" нужно выписать подряд, чтобы получилось число, делящееся на 18?

1.5 Натуральное число а таково, что а + 2 делится на 5. Докажите, что число 7а+ 4 также делится на 5.

2. Перевести бесконечные периодические дроби в обыкновенные:

а) 0,(13) б) 1,1(3) в) 3,(214) г) 0,12(9)

3. Перевести обыкновенные дроби в десятичные:

а) $\frac{7}{3}$ б) $\frac{5}{7}$ в) $\frac{17}{12}$

4. Выполнить действия с корнями:

4.1 $\left(9\cdot\sqrt[3]{32}-2\cdot\sqrt[3]{500}\right):\sqrt[3]{4}$

4.2 $\left(\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}\right):\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[3]{5}}$

4.3 $\sqrt[6]{(5-3\sqrt{3})^6}+\sqrt{(5+3\sqrt{3})^2}$

4.4 $5\cdot\sqrt{48\cdot(1{,}5)^{-\frac{1}{3}}}+\sqrt{32\cdot\sqrt[3]{2{,}25}}-11\cdot\sqrt[3]{24\cdot\sqrt{2}}$

4.5 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

4.6 $\sqrt[5]{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[10]{11+4\sqrt{6}}$

4.7 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

4. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ. МНОГОЧЛЕНЫ

Алгебраическое выражение − это выражение, составленное из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень и извлечения корня и скобок.

В *рациональных выражениях* используются только сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в степень с целым показателем (сводится к умножению или делению). *Иррациональное выражение* содержит извлечение корня. *Целое рациональное выражение* не содержит деления на выражения с переменными (деление на параметры допускается). *Дробное рациональное выражение* содержит деление на выражение с переменными.

Многочленом n-й степени относительно переменной x называется выражение вида: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, где $a_n \neq 0$, $n \geq 0$, a_i – коэффициенты многочлена, a_n – старший коэффициент, a_0 – свободный член.

Многочлен является целым рациональным выражением.

Многочленом относительно переменных x, y, …, z называется сумма произведений вида:

$ax^n \cdot y^m \cdot \ldots \cdot z^k$, где a – числовой коэффициент, n, m, …, k – неотрицательные целые числа.

Само выражение $ax^n \cdot y^m \cdot \ldots \cdot z^k$ называется ***одночленом***.

Число $n+m+\ldots+k$ – *степень одночлена*.

Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен, называется *степенью многочлена*.

Два одночлена называются ***подобными***, если они совпадают или же отличаются только числовыми коэффициентами.

Стандартным (каноническим) видом многочлена называется многочлен, заданный в виде суммы попарно неподобных одночленов.

Два алгебраических выражения называются ***тождественно равными,*** если они определены на одном и том же множестве значений переменных и принимают равные числовые значения при всех допустимых значениях переменных, входящих в них.

Тождество — алгебраическое равенство, правая и левая части которого тождественно равны.

Тождественное преобразование алгебраического выражения — замена этого выражения другим, тождественно равным ему.

4.1 Метод неопределенных коэффициентов

Коэффициенты искомого выражения обозначаются буквами (A,B,C, …) и их рассматривают как неизвестные. В случае многочленов коэффициенты заданного и искомого выражения приравниваются.

Пример 1. Многочлен x^3+6x^2+4x+6 расположить по степеням (x-1)

$x^3+6x^2+4x+6=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$

Решение. Подставим x=1 => D=17.
Подставим x=0, x= -1, x=2

$$\begin{cases} A - B + C = 11, \\ A + B + C = 29, \\ 4A - 2B + C = 5 \end{cases} => \begin{cases} A = 1 \\ B = 9 \\ C = 19 \end{cases}$$

$x^3+6x^2+4x+6 = (x-1)^3+9(x-1)^2+19(x-1)+17$

Пример 2. Подобрать числа a, b, c, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

Решение.

$$x + 5 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$$
$$x + 5 = (a+b+c)x^2 - (5a+4b+3c)x + (6a+3b+2c)$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\begin{cases} 6a + 3b + 2c = 5, \\ 5a + 4b + 3c = 1, \\ a + b + c = 0 \end{cases} => \begin{cases} a = 3, \\ b = -7, \\ c = 4 \end{cases}$$

4.2 Разложение многочлена на множители

Часто бывает полезно преобразовать многочлен так, чтобы он был представлен в виде произведения нескольких сомножителей. Такое тождественное преобразование называется *разложением многочлена на множители*. В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих сомножителей.

$M = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$, P_i – делители многочлена M.

Если P_i –число, то P_i – *тривиальный делитель*, в противном случае – *нетривиальный делитель*.

При разложении многочленов на множители применяют три основных приёма: вынесение множителя за скобку, использование формул сокращённого умножения и способ группировки.

1. **Вынесение множителя за скобку**. Из распределительного закона непосредственно следует, что ac + bc = c(a + b). Этим можно воспользоваться для вынесения множителя за скобки.

Пример 1. Разложить многочлен на множители $12y^3 – 20y^2$.

Решение:

Имеем: $12y^3 – 20y^2 = 4y^2 \cdot 3y – 4y^2 \cdot 5 = 4y^2(3y – 5)$.

Ответ: $4y^2(3y – 5)$.

2. **Использование формул сокращённого умножения**. Формулы сокращённого умножения позволяют довольно эффективно представлять многочлен в форме произведения.

Пример 2. Разложить на множители многочлен $x^4 – 1$.

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Ответ: $(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

3. **Способ группировки**. Этот способ заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов. На практике он применяется в тех случаях, когда многочлен удается представить в виде пар слагаемых таким образом, чтобы из каждой пары можно было выделить один и тот же множитель. Этот общий множитель можно вынести за скобку и исходный многочлен окажется представленным в виде произведения.

Пример 3. Разложить на множители многочлен $x^3 – 3x^2y – 4xy + 12y^2$.

Решение:

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$x^3 – 3x^2y – 4xy + 12y^2 = (x^3 – 3x^2y) – (4xy – 12y^2).$$

В первой группе вынесем за скобку общий множитель x^2, а во второй − 4y. Получаем:

$$(x^3 – 3x^2y) – (4xy – 12y^2) = x^2(x – 3y) – 4y(x – 3y).$$

Теперь общий множитель $(x – 3y)$ также можно вынести за скобки:

$$x^2(x – 3y) – 4y(x – 3y) = (x – 3y)(x^2 – 4y).$$

4.3 Деление многочленов

Пусть **f(x)** и **g(x)** – два многочлена, причём $g(x) \neq 0$.

Многочлен **f(x)** делится на многочлен **g(x)**, если существует такой многочлен **q(x),** что **f(x) = g(x) · q(x)**.

В множестве многочленов деление осуществимо не всегда.

Разделить многочлен **f(x)** на многочлен **g(x)** с остатком означает записать многочлен в виде

f(x) = g(x) · q(x) + r(x),

где **q(x)** и **r(x) –** многочлены, причём r(x) либо равен нулю, либо имеет степень, меньшую, чем многочлен g(x), а r(x) – остаток от деления f (x) на g(x).

Деление многочленов «уголком»

Пример 1. $P(x) = x^4+2x^3-11x^2+4x+4$ разделить на $Q(x) = x^2-3x+2$

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & \underline{x^2-3x+2} \\
\underline{x^4-3x^3+2x^2\qquad\qquad} & x^2+5x+2 \\
-\;5x^3-13x^2+4x\quad & \\
\underline{5x^3-15x^2+10x}\quad & \\
-\;2x^2-6x+4 & \\
\underline{2x^2-6x+4} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно, многочлен можно переписать в виде

$$P(x)= \underbrace{(x^2-3x+2)}_{\text{делитель}}\underbrace{(x^2+5x+2)}_{\text{частное}}$$

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

$\mathbf{P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)}$

Пример 2. $P(x) =x^4-3x^3+2x^2+x-5$ разделить на $Q(x) = x^2+2x-3$

$$\begin{array}{r|l}
x^4-3x^3+2x^2+x-5 & x^2+2x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+2x^3-3x^2} & x^2-5x+15 \\
-5x^3+5x^2+x & \\
\underline{-5x^3-10x^2+15x} & \\
15x^2-14x-5 & \\
\underline{15x^2+30x-45} & \\
-44x+40 &
\end{array}$$

$$P(x) = x^4-3x^3+2x^2+x-5 = \underbrace{(x^2+2x-3)}_{\text{делитель}}\underbrace{(x^2-5x+15)}_{\text{частное}} + \underbrace{(-44x+40)}_{\text{остаток}}$$

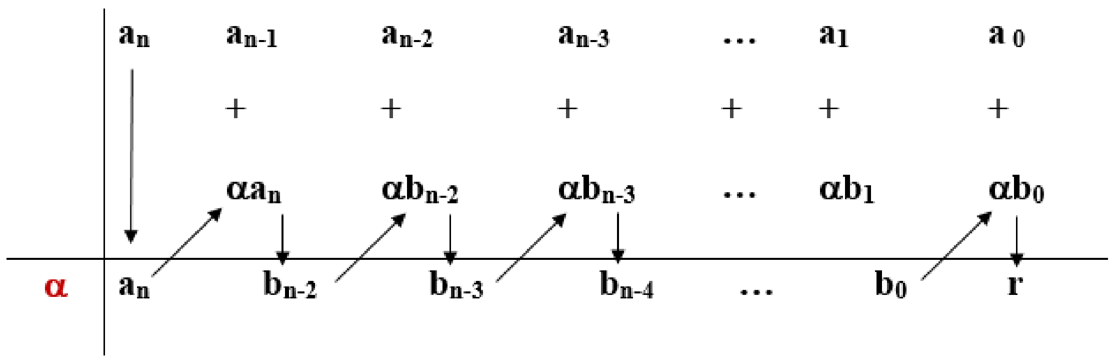
Схема Горнера

При делении многочлена на многочлен можно использовать схему Горнера.

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0 =$

$= (x-\alpha)(a_nx^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+ \ldots+b_2x^2+b_1x+b_0)+r$

Тогда коэффициенты $b_{n-2}, b_{n-3},\ldots, b_1, b_0$ можно получить с помощью таблицы:



В этой схеме каждое число третьей строки, начиная с коэффициента b_{n-2}, получается из предыдущего числа этой строки умножением на число α и прибавлением к полученному результату соответствующего числа первой строки, стоящего под искомым числом.

Пример: разделим многочлен $4x^3-x^5+32-8x^2$ на $x + 2$

Сначала запишем делимое в каноническом виде, т.е. в виде

$$\mathbf{-x^5+0\cdot x^4+4x^3-8x^2+0\cdot x+32}$$

Применим схему Горнера:

Очевидно, что $\alpha = -2$.

$$\mathbf{-x^5+0\cdot x^4+4x^3-8x^2+0\cdot x+32}$$

	-1	0	4	-8	0	32
		+	+	+	+	+
		2	-4	0	16	-32
-2	-1	2	0	-8	16	0

Очевидно, что $x = -2$ является корнем многочлена, так как остаток $r = 0$.

$$\mathbf{4x^3-x^5+32-8x^2 = (x+2)(-x^4+2x^3-8x+16)}$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Разделить многочлен на многочлен.

1.1 $18x^3+45x^2+58x+39$ на $6x+7$

1.2 $18x^3+45x^2+58x+35$ на $6x+7$

1.3 $X^4-3x^3+2x^2+x-5$ на x^2+2x-3

1.4 $4x^5-2x^3-x^2+x+1$ на $2x^3+x^2+x$

2. Разложить многочлен на множители, используя схему Горнера.

2.1 $a^5+a^3-a^2-1$

2.2 a^4+4a^2-5

2.3 $a(a^2(a^2-7)^2-36)$

2.4 $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$

3. Разделить многочлен на многочлен, используя метод неопределенных коэффициентов.

x^3+x+4 на x^2+x-2

4. Разложить на множители многочлен с двумя переменными.

4.1 x^4+y^4

4.2 $x^2+xy-3x-2y+2$

5. УРАВНЕНИЯ. КОРНИ УРАВНЕНИЙ. УРАВНЕНИЯ-СЛЕДСТВИЯ И РАВНОСИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПОНЯТИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1 Равносильные уравнения

Равенство с переменной вида $f(x) = g(x)$ называется **уравнением с одной переменной.**

Значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называют **корнем уравнения** $f(x) = g(x)$.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что оно не имеет корней.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются **равносильными** (эквивалентными), если совпадают множества их решений или оба они не имеют решений.

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

Замена уравнения ему равносильным уравнением или равносильной совокупностью уравнений (неравенств, систем) называется **равносильным переходом**.

Если любой корень уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ является корнем уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, то второе уравнение называется **следствием** первого.

$$f_1(x)=g_1(x) \Rightarrow f_2(x)=g_2(x)$$

Из определения следует, что множество решений второго уравнения будет содержать все корни исходного уравнения и кроме них *может* содержать ещё некоторые числа, называемые **посторонними корнями** исходного уравнения. Поэтому, если в процессе решения от уравнения перешли к его следствию, то в конце решения обязательно провести исследование корней (например, сделать проверку) и отобрать те из них, которые являются корнями исходного уравнения.

Утверждения о равносильности:

1. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$
2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$ для любого действительного числа α.
3. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \alpha f(x) =\alpha g(x)$ для любого действительного числа $\alpha\neq 0$.
4. $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $(a>0,\ a\neq 1) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
5. Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ неотрицательны на некотором множестве A, то на этом множестве $f^n(x)=g^n(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ для $n\in N$.

6. Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ положительны на некотором множестве A, то на этом множестве $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0,\ a\neq1)$. В частности, если $b>0$, то $a^{h(x)}=b \Leftrightarrow h(x)=\log_a b$.

7. Пусть функция $y=\varphi(x)$ определена и не обращается в нуль ни в одной точке множества A, содержащемся в ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$. Тогда на множестве A $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\,\varphi(x)=g(x)\,\varphi(x)$. Множество A может совпадать с ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$.

Утверждения о следствии:

1. $f(x)=g(x) \Rightarrow f^{2n}(x)=g^{2n}(x),\ (n\in N)$.
2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x)=g(x),\ (a>0,\ a\neq1)$.
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x) \Rightarrow f(x)=\varphi(x)g(x)$.
4. $f(x)+h(x)=g(x)+h(x) \Rightarrow f(x)=g(x)$
5. $f(x)g(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right.$
6. $\left(\dfrac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot h(x)}=0\right) \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\right)$
7. $\left(\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{g(x)}{h(x)}\right) \Rightarrow \left(f(x)=g(x)\right)$

5.2 Целые рациональные уравнения

Уравнение $f(x)=g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, называют **целым рациональным уравнением**.

Основные методы решения целых рациональных уравнений

Метод разложения на множители

Как уже говорилось, уравнение $f(x)=g(x)$ можно привести к виду $P_n(x)=0$.

Метод разложения на множители заключается в том, что левую часть уравнения $P_n(x)$ представляют в виде произведения двух или нескольких многочленов и решают равносильное уравнение.

Метод введения новых переменных

В некоторых случаях путём замены выражения $f(x)$, входящего в многочлен $P_n(x)$, через **y** можно получить многочлен относительно **y**, что упрощает решение уравнения $P_n(x)=0$.

Пример.

Решить уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)-15=0$.

Решение.

$x(x+1)(x+2)(x+3)-15=[x(x+3)][(x+1)(x+2)]-15=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-15.$

Обозначим: $x^2+3x=y$. Тогда имеем уравнение:

$y(y+2)-15=0.$

Преобразуем левую часть:

$y(y+2)-15=y^2+2y-15=y^2+2y+1-16=(y+1)^2-16=(y+5)(y-3)$

Можно было искать корни квадратного трёхчлена $y^2+2y-15$ и с помощью известных формул, и с помощью теоремы, обратной теореме Виета.

Исходное уравнение можно переписать в виде:

$$(x^2+3x+5)(x^2+3x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x+5=0, \\ x^2+3x-3=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}, \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$.

5.3 Уравнения с модулем

1. Уравнение вида $|f(x)| = b$

при $b<0$ решений не имеет;

при $b=0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;

при $b>0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=b \\ f(x)=-b \end{array}\right.$.

2. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$.

3. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

I. Доказать, что уравнения не имеют корней:

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x-5}$
2. $\lg(10-x^2)=\sqrt{x}+\sqrt{2+x}$

II.Равносильны ли следующие уравнения (уравнения и совокупности уравнений)

1. $x^2+1=\sqrt{x}$ и $x^2+1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$
2. $x^2-1=\sqrt{x}$ и $x^2-1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$
3. $x^2+x=0$ и $\dfrac{x^2+x}{x}=0$

4. $x^2+1=0$ и $\frac{x^2+1}{x}=0$
5. $\sqrt{x}+2=\sqrt{2x}+1$ и $(\sqrt{x}+2)^2=(\sqrt{2x}+1)^2$
6. $(\sqrt{x}-2)^2=(\sqrt{2x}+1)^2$ и $x-4\sqrt{x}+4=2x+2\sqrt{2x}+1$
7. $2\sqrt{x}-7x^2=2x+2\sqrt{x}$ и $-7x^2=2x$
8. $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}=0$ и $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0,\\ \sqrt{x+3}=0\end{array}\right.$
9. $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x+3}=0$ и $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}=0,\\ \sqrt{x+3}=0\end{array}\right.$

III. Решить уравнения:
1. $4x^3+6x^2+4x+1=0$
2. $10x^3-x^2-x+1=0$
3. $4x^3-3x-1=0$
4. $16x^3-28x^2+4x+3=0$
5. $3x^3-2x^2+x-10=0$
6. $4x^3+6x^2+5x+69=0$

IV. Решить уравнения:
1. $|4x-7|=7-4x$
2. $|3x-5|=3x-5$
3. $|x-7|=|x+9|$
4. $|x+3|=|2x-1|$
5. $|3x+2|=|2x-3|$
6. $|6x+5|=|1-x|$
7. $|x^2+x-1|=2x-1$
8. $|x^2-x-3|=-x-1$
9. $|x|+|x+1|=1$
10. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$
11. $|x+1|-|x-2|+|3x+6|=5$

6. НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМИ

Решить неравенство – значит найти все множество М значений x, при подстановке которых в неравенство получаются верные числовые неравенства.

Если любое решение неравенства $f_1(x)>\varphi_1(x)$, является решением неравенства $f_2(x)>\varphi_2(x)$, то второе неравенство называют **следствием** первого

$$\mathbf{f_1(x)>\varphi_1(x)\Rightarrow f_2(x)>\varphi_2(x)}\ .$$

Если же верно и обратное утверждение, то множества решений неравенств совпадают.

Два неравенства, множества решений которых совпадают, называются **равносильными** (эквивалентными).

Неравенства, решения которых - пустое множество, считают равносильными

$$\mathbf{f_1(x)>\varphi_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)>\varphi_2(x).}$$

Правила равносильного перехода от одного неравенства к другому

1. Если к обеим частям неравенства $f(x)>\varphi(x)$ прибавить функцию $g(x)$, определенную на области допустимых значений x этого неравенства, то

$$f(x)<\varphi(x)\Leftrightarrow f(x)+g(x)<\varphi(x)+g(x).$$

На основе этого правила можно к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, переносить члены неравенства из одной части в другую с противоположным знаком, получая при этом равносильное неравенство.

2. Если обе части неравенства умножить на одну и ту же функцию, все значения которой в области определения данного неравенства строго положительны, то получится неравенство, равносильное данному,

$$f(x)<\varphi(x)\Leftrightarrow f(x)g(x)<\varphi(x)g(x), \text{ где } g(x)>0.$$

3. Если все значения функции, на которую мы умножаем обе части неравенства, строго отрицательны, то, изменив знак неравенства на противоположный, мы получим неравенство, равносильное данному.

$$f(x)<\varphi(x)\Leftrightarrow f(x)g(x)>\varphi(x)g(x), \text{ где } g(x)<0.$$

4. Если в обеих частях неравенства стоят функции, все значения которых в области определения неравенства неотрицательны, то, возведя обе части неравенства в степень n, $n\in N$ или, извлекая корень n-й степени из обеих частей, мы получим неравенство, равносильное данному.

$$f(x)<\varphi(x)\Leftrightarrow(f(x))^n<(\varphi(x))^n$$

$$f(x)<\varphi(x)\Leftrightarrow\sqrt[n]{f(x)}<\sqrt[n]{\varphi(x)}$$

5. Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же нечетную степень или извлечение корня нечетной степени есть равносильное преобразование неравенства.

$$f(x)<\varphi(x)\Leftrightarrow f^{2n+1}(x)<\varphi^{2n+1}(x),$$

$$f(x)<\varphi(x)\Leftrightarrow\sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$$

6. Если к обеим частям неравенства $f(x) < \varphi(x)$ применить функцию h, которая определена при всех значениях f и g и (строго) монотонна, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow h(f(x)) < h(\varphi(x)), \text{ для h – возрастающей,}$$

$$f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow h(f(x)) > h(\varphi(x)), \text{ для h – убывающей.}$$

7. Пусть неравенство $f_1(x)>g_1(x)$ является следствием неравенства $f(x)>g(x)$, т.е. множество решений неравенства $f(x)>g(x)$ есть подмножество множества решений $f_1(x)>g_1(x)$. Тогда система неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f_1(x) > g_1(x) \end{cases}$ равносильна неравенству $f(x)>g(x)$, а совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f_1(x) > g_1(x) \end{array} \right.$ равносильна неравенству – следствию $f_1(x)>g_1(x)$.

6.1 Решение рациональных неравенств. Метод интервалов (метод промежутков)

Рассмотрим решение рационального неравенства $\dfrac{P_n(x)}{Q_p(x)} > 0$. Данное неравенство можно решить, сведя его к совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} P_n(x) > 0 \\ Q_p(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P_n(x) < 0 \\ Q_p(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.,$$ либо **методом интервалов.**

При решении неравенств методом интервалов на числовую прямую наносятся действительные корни многочленов $P_n(x)$ и $Q_p(x)$, предварительно разложенных на линейные множители, если это возможно, в виде (*).

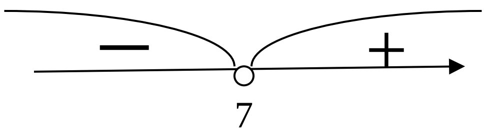
$$\frac{(x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{m_1} \cdot (x-b_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-b_p)^{m_p}} > 0 \quad \textbf{(*)},$$

где $a_1,\ldots,a_n$; $b_1,\ldots,b_n$ попарно различны и $P_n(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n}$, $Q_p(x) = (x-b_1)^{m_1} \cdot (x-b_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-b_p)^{m_p}$. Обязательно должно быть $(x-a_i)^{k_i}$, а не $(a_i - x)^{k_i}$, $(x-b_j)^{m_j}$, а не $(b_j - x)^{m_j}$ и т.д. Этого всегда можно добиться, умножая неравенство на –1 и меняя одновременно его знак столько раз, сколько надо.

Решая уравнение $x\text{-}a_i=0$, $x\text{-}b_i=0$, отмечаем точками нули числителя (закрашенные точки, если неравенство нестрогое; «выколотые» точки, если неравенство строгое) и знаменателя (всегда «выколотые» точки). Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (кривой знаков), которую чертят справа налево, начиная сверху. На тех промежутках, где эта кривая проходит выше координатной прямой выполняется неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_p(x)} > 0$, на тех же промежутках, где кривая проходит ниже координатной прямой, имеем $\frac{P_n(x)}{Q_p(x)} < 0$. **Кривую знаков чертят, учитывая, что она меняет знак на нечетной степени и сохраняет на четной.**

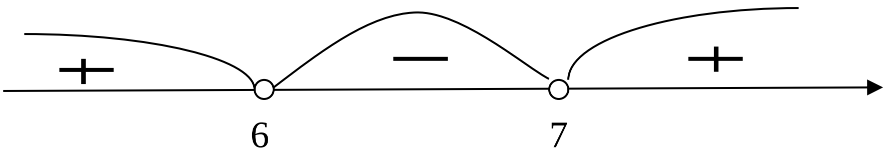
Если в состав многочленов входят многочлены с действительными коэффициентами и комплексными корнями, то они при решении неравенств не учитываются. Примерами таких многочленов могут служить квадратный трехчлен ax^2+bx+c, где $a>0$ (если $a<0$, то умножают неравенство на –1 и одновременно меняют его знак) и $Д=b^2-4ac<0$, либо многочлен вида $ax^{2n}+b$, где $a>0$, $b>0$, который также не имеет действительных корней.

Процедуру расстановки знаков можно упростить. Если рассмотреть простое неравенство x-7> 0, то решением его будет промежуток
(7; +∞). На числовой прямой можно отметить промежутки:



Правее числа 7 оба множителя положительны.

Если рассмотреть неравенство (x-7)(x-6)>0, то на числовой прямой можно отметить две точки :



Правее числа 7 оба множителя положительны. При переходе через число 7 меняет знак только один множитель (x-7). Значит, меняет знак и произведение. При переходе через число 6 снова меняет знак только один множитель (x-6). Значит, меняет знак и произведение.

Выражение $(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}$ в случае $a_1> a_2> \ldots> a_n$ имеет положительный знак на самом первом интервале справа. При переходе через a_i (если двигаться справа налево по числовой оси) это выражение

меняет знак на противоположный при **нечетном** значении k_i и **не меняет** знак при **четном**. Поэтому можно дугами отмечать промежутки знакопостоянства. В этом случае $a_1, a_2, \ldots, a_n$ должны быть различны и каждый множитель должен быть $(x-a_i)^{k_i}$, а не $(a_i-x)^{k_i}$. Показатель степени k_i может быть меньше нуля, если выражение $x-a_i$ находится в знаменателе.

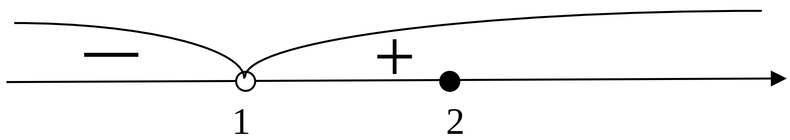
Пример 1. Решить неравенство

$$x \le 3 - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{-x^2+4x-4}{x-1} \ge 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \le 0$$

Очевидно, изменение знака произойдет только при переходе через *корень знаменателя* **1**.



Ответ: (-∞; 1) ∪ {2}

6.2 Неравенства с модулями

Общий способ решения неравенств с модулями основан на раскрытии знака модуля по определению. Сущность этого способа заключается в следующем.

Пусть нужно решить неравенство $|f(x)|>g(x)$ **(1)**

Т.к. $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{если} \quad f(x) \ge 0 \\ -f(x), \text{если} \quad f(x) < 0 \end{cases}$, то неравенство (1) равносильно следующей совокупности систем неравенств : $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases} \end{array} \right.$

Пример 1. Решить неравенство $\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right| > 1$.

Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$\begin{cases} \frac{2x+3}{3x-2} \ge 0 \\ \frac{2x+3}{3x-2} > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{2x+3}{3x-2} < 0 \\ -\frac{2x+3}{3x-2} > 1 \end{cases}$

Далее имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3x-2} \geq 0 \\ \dfrac{2x+3}{3x-2} > 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{2x+3}{3x-2} < 0 \\ \dfrac{2x+3}{3x-2} < -1 \end{cases}$$

Первое неравенство каждой из систем является следствием второго, а поэтому оба первых неравенства можно опустить. В результате получим совокупность

$$\frac{2x+3}{3x-2} > 1 \text{ или } \frac{2x+3}{3x-2} < -1$$

Решая неравенства этой совокупности, находим:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+3-3x+2}{3x-2} > 0 \\ \dfrac{2x+3+3x-2}{3x-2} < 0 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{-x+5}{3x-2} > 0 \\ \dfrac{5x+1}{3x-2} < 0 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-5}{3(x-\frac{2}{3})} < 0, \\ \dfrac{5(x+\frac{1}{5})}{3(x-\frac{2}{3})} < 0 \end{array} \right.$$

Итак, получаем ответ : $(-\frac{1}{5};\frac{2}{3})\bigcup(\frac{2}{3};5)$

Пример 2. Решить неравенство $|3\text{-}x|+|2x\text{-}4|\text{-}|x+1|>2x+4$

Выражения, стоящие под модулем, обращаются в нуль при $x=3$, $x=2$, $x=-1$. Рассмотрим знаки подмодульных выражений на каждом из интервалов, образованном разбиением координатной прямой этими точками.

	I	II	III	IV
3-x	+	+	+	-
2x-4	-	-	+	+
x+1	-	+	+	+
		1	2	3

Получим 4 случая. Рассмотрим решение данного неравенства на каждом из интервалов, учитывая знаки, с которыми раскрывается каждый модуль.

I случай.

$x \leq -1 \Rightarrow |x+1|=-x-1$; $|2x-4|=-2x+4$; $|3-x|=3-x$.

Неравенство примет вид:

$3-x+4-2x+x+1>2x+4$

$x < 1$

Учитывая интервал, получим $x \leq -1$

II случай.

$-1 < x < 2 \Rightarrow |x+1|=x+1$; $|2x-4|=-2x+4$, $|3-x|=3-x$

Получим:

3-x-2x+4-x-1>2x+4

-6x>-2

$x < \frac{1}{3}$

Учитывая интервал, получим $-1 < x < \frac{1}{3}$

III случай.

$2 \le x \le 3 \Rightarrow |x+1|=x+1$; $|2x-4|=2x-4$; $|3-x|=3-x$

Неравенство примет вид:

3-x-4+2x-x-1>2x+4

-2x>6

x< -3

Учитывая интервал, получим $\varnothing$.

IV случай.

$x > 3 \Rightarrow |x+1|=x+1$; $|2x-4|=2x-4$; $|3-x|=x-3$

x-3+2x-4-x-1>2x+4

0x>12

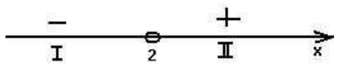
Нет решений.

Объединяя решения каждого случая, запишем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{3})$

Пример 3. Решить неравенство $|3-|x-2|| \le 1$

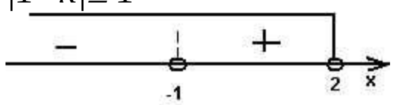
Когда есть модуль в модуле, начинать раскрытие надо с внутреннего. $x-2=0$ при $x=2$.



I случай. $x \le 2$. Тогда $|x-2|=2-x$. Имеем

$|3-(2-x)| \le 1$

$|1+x| \le 1$



а) $x \le -1$ $-1-x \le 1$

$-x \le 2$

$x \ge -2$

Учитывая интервал, $x \in [-2;-1]$

б) $-1 \le x \le 2$ $1+x \le 1$

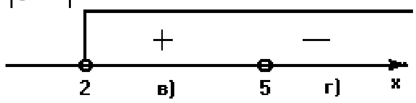
$x \le 0$

Учитывая интервал, $x \in [-1;0]$

II случай. $x \ge 2$ Тогда $|x-2|=x-2$. Имеем

$|3\text{-}(x\text{-}2)|\leq 1$

$|5\text{-}x|\leq 1$



в) $2\leq x \leq 5$. Тогда $|5\text{-}x|=5\text{-}x$

$5\text{-}x\leq 1$

$\text{-}x\leq \text{-}4$

$x\geq 4$

Учитывая интервал : $x\in[4;5]$

г) $x\geq 5$. Тогда $|5\text{-}x|=x\text{-}5$

$x\text{-}5\leq 1$

$x\leq 6$

Учитывая интервал : $x\in[5;6]$

Объединяя все решения, получим ответ:

$x\in$[-2;0]U[4;6]

Пример 4. Решить неравенство $|2x\text{-}1|\leq|3x+1|$

Возведя обе части в квадрат, получим неравенство $(2x\text{-}1)^2\leq (3x+1)^2$, равносильное данному.

Решая последнее неравенство, находим

$4x^2\text{-}4x+1\leq 9x^2+6x+1$

$x^2+2x\geq 0$

$x(x+2)\geq 0$

Ответ: $(-\infty;-2]U[0;+\infty)$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

I. Решить неравенства:

1. $$\frac{(x-5)^2(x-1)^3(x^2-4)}{(2-x)(x+8)^{98}}\leq 0$$

2. $$\frac{(x-5)^2(x-1)^3(x^2-4)}{(2-x)(x+8)^{98}}> 0$$

3. $$\frac{2x^2-2x^3+5}{3x-x^3}\leq 2$$

4. $$\frac{x^{28}(x-9)^5(x+2)(x^{24}+1)}{x-3}\leq 0$$

5. $\frac{x^2-3x-18}{x^2-13x+42} \le 0$

6. $\frac{x^2-3x-18}{x^2-13x+42} > 0$

7. $\frac{(x-3)^2(7-x)^3(x+2)^{66}}{(9-x^2)(x+2)^2(x+4)^4} \le 0$

8. $\frac{(6-x)^8(8-4x)^3}{(2-x)^{15}(36-x^2)} \ge 0$

9. $\frac{(x^{28}+45)\cdot(28-4x)^7}{(x-9)^{33}\cdot(49-x^2)x^{14}} < 0$

10. $(9-5x)^4+(9-5x)^2-24<0$

11. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \le 3$

12. $(x^2-5x-8)(x^2-5x-12) \ge 12$

II. Решить неравенства:

1. $|2x+3|>2x+3$, $|2x+3|\ge 2x+3$, $|2x+3|<2x+3$, $|2x+3|\le 2x+3$
2. $|1-4x|<5-2x$
3. $|x-2|\ge x-1$
4. $|2x-1|\le |3x+1|$
5. $|2x-1|> |x+2|$
6. $||x-1|+x|<3$
7. $x^2-5x+9>|x-6|$
8. $|x^2-9|(x^2-7x+10)<0$
9. $|| x^2-3x+2|-1|>x-2$
10. $\frac{5}{|x+2|+2} > |x+2|-2$
11. $|2x-1|\le|x+1|+1$
12. $|x+2|>|3x-6|+2$
13. $|x^3-1|>1-x$
14. $\frac{|x-2|-|x+4|}{|x|-|x-2|} \ge 0$

7. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

7.1 Иррациональные уравнения

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать, что, во-первых, значения корней с четными показателями и их подкоренных выражений неотрицательны, во-вторых, значения подкоренных выражений и самих корней с нечетными показателями могут быть любым действительным числом.

Возведение в степень

Основным методом решения уравнений, содержащих радикалы, является возведение, возможно даже неоднократное, обеих частей уравнения в соответствующую степень.

При решении уравнений методом равносильных преобразований полезно использовать следующие **равносильности**:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x), n \in N. \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \left(\text{или} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \right)$

3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x), n \in N$

Пример 1.

$$\sqrt{1+3x} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3x = (1-x)^2, \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0, \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 5, \end{array} \right. \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Ответ: 0.

Пример 2.

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} = \sqrt{4+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{3+x} = 4+x, \\ 4+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3+x} = -x-2, \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \leq 0, \\ x \geq -4. \\ 3+x = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le -2, \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \\ -4 \le x \le -2. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$

Пример 3.

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)^2=7^2 \Leftrightarrow x+2+2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+1}+x+1=49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \\ \sqrt{(x+2)(x+1)} = 23 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1, \\ 23 - x \ge 0, \\ (x+2)(x+1) = (23-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 23, \\ x = \dfrac{527}{49} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{527}{49}$$

Замечание. Возведение в квадрат обеих частей исходного уравнения не нарушило равносильность, так как они положительны на ОДЗ уравнения ($x \ge -1$).

Ответ: $\dfrac{527}{49}$.

Пример 4.

$$\sqrt{x+7}\sqrt{3x-2} = 3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+7 \ge 0, \\ 3x-2 \ge 0, \\ x-1 \ge 0, \\ x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$

Возведя обе части исходного уравнения в квадрат и приведя подобные члены, получим следствие исходного уравнения:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}, \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Корень $x_1 = -\frac{1}{3}$ не входит в ОДЗ исходного уравнения.

Корень $x_2=2$ принадлежит ОДЗ и при подстановке обращает исходное уравнение в истинное равенство.

Ответ: 2.

Метод замены переменной

Пример.

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+5x-2=t, \\ \sqrt{t}-\sqrt{t-7}=1 \end{cases}$$

Решаем последнее уравнение, переписав его в виде

$$\sqrt{t}=1+\sqrt{t-7} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ t=1+t-7+2\sqrt{t-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ 2\sqrt{t-7}=6 \end{cases} \Leftrightarrow t=16$$

Возвращаемся к первому уравнению системы

$2x^2+5x-2=16$ Его корни: $x_1=2$, $x_2=-\frac{9}{2}$

Проверка не нужна, так как не нарушалась равносильность.

Ответ: $-\frac{9}{2}$; 2.

Частные приемы решения

Пример 1.

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$$

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 5, \\ x\leq 1 \end{cases}$

Нет действительных значений x, при которых функция $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}$ имеет смысл. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Поиск ОДЗ упростил решение, то есть нет необходимости возводить в квадрат обе части исходного уравнения.

Ответ: нет решений.

Пример 2.

$$\sqrt{(x-1)^2(x-4)}=|x-1|\sqrt{16-x^2}$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} (x-1)^2(x-4)\geq 0, \\ 16-x^2\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4. \end{array}\right.$

Легко проверить, что 1 и 4 являются корнями уравнения. Снова решение фактически ограничилось поиском ОДЗ.

Ответ: 1; 4.

7.2 Иррациональные неравенства

По определению арифметического корня из числа a:

выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$;

выражение $\sqrt{a}$ всегда неотрицательно, т.е. $\sqrt{a} \geq 0$;

равенство $(\sqrt{a})^2 = a$ верно при любом $a \geq 0$.

Приведем ряд равносильных преобразований для освобождения от радикалов

В общем случае (n∈N) можно записать:

$$1)\quad \sqrt[2n]{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

$$2)\quad \sqrt[2n+1]{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) < \varphi^{2n+1}(x)$$

$$3)\quad \sqrt[2n]{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > \varphi^{2n}(x), \\ \mathrm{f(x)} \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > \varphi^{2n}(x), \\ \varphi(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

В первой системе можно опустить неравенство f(x)≥0, так как оно является следствием 3-го неравенства этой системы.

$$4)\quad \sqrt[2n+1]{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) > \varphi^{2n+1}(x)$$

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{5x - x^2 - 6} < 3 + 2x$$

Это неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 5x - x^2 - 6 \geq 0 \\ 3 + 2x > 0 \\ 5x^2 + 7x + 15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \leq 0 \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Множеством решений исходного неравенства является отрезок [2 ; 3].

Ответ: [2 ; 3]

Пример 2. Решить неравенство $3\sqrt{6 + x - x^2} > 4x - 2$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6+x-x^2\ge 0,\\ 4x-2<0,\end{cases}\\ \begin{cases}4x-2\ge 0,\\ 9(6+x-x^2)>16x^2-16x+4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)(x+2)\le 0,\\ x<\dfrac{1}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2},\\ x^2-x-2<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2\le x\le 3,\\ x<\dfrac{1}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2},\\ (x-2)(x+1)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}\le x<2\end{array}\right.$$

Объединяя множество решений первой и второй систем неравенств, получаем множество решений исходного неравенства в виде промежутка.

Ответ: [-2 ;2).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

I. Решить уравнение:

1. $\sqrt{3-x}=-3+x$
2. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$
3. $\sqrt{3-\sqrt{2+x}}=\sqrt{5+x}$
4. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$
5. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$
6. $\sqrt{x^2-3x}\sqrt{2x-4}=3-x$
7. $\sqrt{|x-8|}=x-2$
8. $x=1-\sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$
9. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$
10. $(9-x^2)\sqrt{2+x}=0$
11. $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=10$

12*. $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$

II. Решить неравенство:

1. $\sqrt{x+2}<x$
2. $\sqrt{16-x}<x+4$
3. $\sqrt{5x+6}\le -x$
4. $\sqrt{3x+4}>x$

5. $\sqrt{x^2-3x+2} \geq x+3$

6. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<2$

7. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-4}>\sqrt{x+2}$

8. $\sqrt{15-x^2-2x}>-\sqrt{7}$

9. $(x-2)\sqrt{x+1} \geq 0$

10. $(x-3)\sqrt{(2-x)(x-5)} \geq 0$

11. Найти середину промежутка $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}>-1$

12. Найти середину промежутка $\sqrt{3x+18} \leq \sqrt{6-x}$

13. Найти число целых решений неравенства
$$\sqrt{4x-x^2}<4-x$$

14. Найти наибольшее целое отрицательное решение
$$\sqrt{2x^2+5x-6}>\sqrt{-x-3}$$

15. Найти число целых решений неравенства $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9$

16. Решить неравенство $\frac{\sqrt{15x-17+2x^2}}{10-x} \geq 0$

17. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x+20}}{x}-1<0$

18. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2x^2-5x+8}}{3-x} \geq 1$

19. Решить неравенство $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x} \geq 0$

8. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

8.1 Показательные уравнения

Свойства степени

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \qquad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$a^m b^m = (ab)^m; \quad \frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m; \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}; \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Показательным называется уравнение, содержащее переменную в показателе степени.

Сведение уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Решить уравнение $5^{x^2-3} = 0{,}2^{8-3x}$

Решение. Так как $0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, преобразуем уравнение к виду

$5^{x^2-3} = 5^{3x-8}$ Полученное уравнение равносильно уравнению

$x^2 - 3 = 3x - 8$. Далее имеем: $x^2 - 6x + 8 = 0$, откуда $x = 2$ или $x = 4$.

Ответ: 2; 4.

Метод введения новой переменной

Решить уравнение $4^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$.

Решение. Заметим, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, и запишем уравнение в виде: $2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$. Введем новую переменную t, где $t = 2^x$. Тогда уравнение примет вид: $t^2 + 2t - 24 = 0$. Решив это уравнение, получим: $t = 4$ или $t = -6$. Но $t = 2^x$, значит, $2^x = 4$ или $2^x = -6$. Из первого уравнения находим, что $x = 2$, а второе уравнение решений не имеет, так как $2^x > 0$ при любых значениях x.

Ответ: 2.

8.2 Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма и (или) в основании логарифма.

Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида $\log_a f(x) = n$, равносильное системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^n. \end{cases}$

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример 1: Решите уравнение $\log_2(x - 7) = \log_2(11 - x)$.

Решение: $\begin{cases} x - 7 > 0, \\ 11 - x > 0, \\ x - 7 = 11 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 7, \\ x < 11, \\ 2x = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 > 7, \\ 9 < 11 \\ x = 9 \end{cases}$

Ответ: $x = 9$

Пример 2: Решить уравнение $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=lg100$
Решение:

$$\lg(x-9)\cdot(2x-1)=lg100$$

$$\begin{cases} x-9>0, \\ 2x-1>0 \\ (x-9)\cdot(2x-1)=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>9, \\ x>\dfrac{1}{2} \\ 2x^2-19x-91=0 \end{cases}$$

Корнями уравнения $2x^2-19x-91=0$ являются $x_1=13, x_2=-3{,}5$
Выполним проверку корней:

1) $x_1=13$: $\begin{cases} 13>9, \\ 13>0{,}5 \end{cases} \Rightarrow$ корень подходит
2) $x_2=-3{,}5$: $\begin{cases} -3{,}5>9, \\ -3{,}5>0{,}5 \end{cases} \Rightarrow$ корень не подходит

Ответ: x=13

Пример 3: $\log_{x+3}(2x^2+5x+3)=2$
Решение: $\log_{x+3}(2x^2+5x+3)=\log_{x+3}(x+3)^2$

$$\log_{x+3}(2x^2+5x+3)=\log_{x+3}(x^2+6x+9)$$

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ x^2+6x+9>0, \\ 2x^2+5x+3=x^2+6x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2, \\ x\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: x = 3

Пример 4: $0{,}8^{\log_{0,8}(6x-4)}=14$
Решение:
$0{,}8^{\log_{0,8}(6x-4)}=14$, ОДЗ: $6x-4>0, x>\frac{4}{6}$
Используя свойство логарифма:$a^{\log_a b}=b$ имеем:

$$6x-4=14, x=3, \Rightarrow 3>\frac{4}{6}$$

Ответ: x = 3

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

I. Решите уравнение:

1) $2^{x^2}=8^{x+6}$ 2) $3^{x^2+13x}=81^{x-5}$
3) $\frac{2}{3}^{1-x}=1{,}5^{\frac{1-4x}{2}}$ 4) $24^{(x-2)(x+2)}=2^{9x}\cdot 3^{3x}$
5) $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$ 6) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=12^x+12^{x+1}$
7) $\left(\frac{1}{9}\right)^x+8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-9=0$ 8) $4^x-3\cdot 2^x+2=0$;

9) $4 \cdot 25^{x-2} + 6 \cdot 10^{x-1} - 4^{x+1} = 0$
10) $(2\sqrt{3} - \sqrt{11})^x + (2\sqrt{3} + \sqrt{11})^x = 46$

II. Решите уравнение:
1) $\log_3(x^2 - 8x) = 2$ 2) $\log_2(x^2 + 1{,}875x) = -2$
3) $\log_3(x^2 - 4x - 12) = \log_3(12 - 2x)$
4) $2\log_2(-x) = 2 + \log_2(x + 8)$
5) $\log_2\left(2+\log_3\left(3+x\right)\right)=0$ 6) $\lg_2\left(3+2\log_2\left(1+x\right)\right)=0$
7) $3\log_3 x+3\log_x 3=10$ 8) $3\log_7 x-2\log_x 7=1$
9) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$
10) $\log_{2x-3}(x^3 + 7x^2 + 14x + 9) = 2$

9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

9.1 Показательные неравенства

Решение показательных и логарифмических неравенств основано на свойстве **монотонности** функций **$y=a^x$** и **$y=\log_a x$** *(***a>0, a≠1***)* и правилах **равносильного перехода** от неравенства к одному неравенству, системе неравенств или совокупности систем неравенств.

С помощью методов решения показательных уравнений показательное неравенство сводится к простейшему виду:

$$\boldsymbol{a^{f(x)} > b} \quad \left(\boldsymbol{a^{f(x)} < b}\right).$$

Полученное неравенство записываем в виде $\boldsymbol{a^{f(x)} > a^{log_a b}}$
и делаем выводы:
1. если $a > 1$, то $f(x) > log_a b$, решаем это неравенство;
2. если $0 < a < 1$, то $f(x) < \log_a b$, решаем это неравенство.

Аналогично и при решении неравенства $a^{f(x)} < b$.

Пример. Решить неравенство $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} < 5^{x+1} - 5^{x+2}$

Решение. Упрощаем и выносим за скобки.

$$2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^3 - 2^x \cdot 2^4 < 5^x \cdot 5 - 5^x \cdot 5^2 \iff$$
$$2^x(4 - 8 - 16) < 5^x(5 - 25) \iff 2^x \cdot (-20) < 5^x \cdot (-20).$$

Сокращаем на -20: $2^x > 5^x$ и, деля на $5^x > 0$, получаем
$\frac{2^x}{5^x} > 1$ - простейшее неравенство.

Далее, $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^0$ Отсюда $x < 0,$ т.к. $\frac{2}{5} < 1$.

Ответ: $(-\infty, 0)$.

9.2 Логарифмические неравенства

Рассмотрим равносильные переходы, позволяющие избавиться от логарифмов для неравенств, содержащих сложные функции:

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

I. Решите неравенство:

1) $0{,}5 \cdot 2^{x-4} < 8^{x+1}$ 2) $\frac{1}{9} \cdot 3^{10-3x} \cdot 81^{x+1} > 27 \cdot 9^{3-x}$

3) $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5} > 2^{4x-6}$ 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$

5) $2^{3-x} + 2^{2-x} + 2^{1-x} < \frac{28}{9} \cdot 3^{1-x}$

6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{5x-3} > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4-2x}$ 7) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{x^2+9x+20}{x+5}} > 1$

8) $4 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x - 2 < 0$ 9) $3 \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x - 3 < 0$

10) $(x^2 + 2x + 1)^{x-1} \geq 1$ 11) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{x^2-4x-5} \leq \left(ctg^2\frac{\pi}{3}\right)^{x^2-4x-5}$

II. Решите неравенство:

1) $\log_{0,6}(5 - 2x) \leq \log_{0,6}(2 + x)$ 2) $\log_{0,5}(0{,}25x + 1{,}25) < 2$

3) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 5x) \leq \log_{\sqrt{3}}(15 - 3x)$

4) $\log_3(x^2 + 3 - 2) \leq 2\log_3(x + 2)$

5) $2\log_2(2x+7) \geq 5 + \log_2(x+2)$ 6) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x - 4 \leq 0.$

7) $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 \leq 0.$ 8) $2\log_2(x+5) \leq 3 + \log_2(x+11)$

9) $\log_{x+4}(x^2 + 10x + 25) > 0$ 10) $\log_2 x - \log_x 32 \leq 4$

11) $(0{,}5)^{\log_3(x^2+6x-7)} \geq 0{,}25$

12) $(x^3 - 6x^2 + 5x)\log_{0,5}(4x^2 - 3x) < 0$

10. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Системой уравнений и (или) **неравенств** x, y, … z

$f_1(x, y, ..., z) = 0, ..., f_n(x, y, ..., z) = 0$ (1)

$g_1(x, y, ... z) \vee 0, ..., g_m(x, y, ..., z) \vee 0$ (2)

(символ $"\vee"$ может означать любой из знаков $">", "<", "\geq", \leq"$)

называется предложение: «Верны все равенства (1) и (или) неравенства (2)».

Совокупностью уравнений и (или) **неравенств** называется предложение: «Верно хотя бы одно из равенств (1) и (или) неравенств (2)».

По определениям, множеством решений *системы* является пересечение множеств решений всех уравнений и (или) неравенств, входящих в систему; множеством решений *совокупности* является *объединение* множеств решений всех уравнений и (или) неравенств, входящих в совокупность при условии, что все уравнения и (или) неравенства определены (для совокупности последнее условие не всегда требуют).

Рассмотрим правила равносильного перехода для системы с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0 \\ F_2(x; y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Аналогичные правила справедливы и для систем с большим числом уравнений.

1. Если изменить порядок следования системы (*), то полученная система будет равносильна системе (*).
2. Если одно из уравнений системы (*) заменить на равносильное ему уравнение, то полученная система уравнений будет равносильна системе (*).
3. Для любых α и β, где $\alpha \neq 0$ равносильны следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0 \\ F_2(x; y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot F_1(x, y) + \beta \cdot F_2(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

4. Пусть одно из уравнений системы таково, что в левой части стоит одна из неизвестных, например x, а в правой части – функция относительно y. Тогда говорят, что неизвестная x выражена через неизвестную y, т.е. x = R(y).

$$\begin{cases} x = R(y) \\ F_2(x; y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R(y) \\ F_2(R(y); y) \end{cases} = 0$$

5. Если обе части уравнения $F_2(x;y) = P_2(x;y)$ ни при каких значениях (x;y) одновременно не обращаются в нуль, то следующие системы равносильны:

$$\begin{cases} F_1(x;y) = P_1(x;y) \\ F_2(x;y) = P_2(x;y) \end{cases}; \quad \begin{cases} F_1(x;y) = P_1(x;y) \\ F_1(x;y) \cdot F_2(x;y) = P_1(x;y) \cdot P_2(x;y) \end{cases};$$

$$\begin{cases} F_1(x;y) = P_1(x;y) \\ \frac{F_1(x;y)}{F_2(x;y)} = \frac{P_1(x;y)}{P_2(x;y)} \end{cases}.$$

Пусть даны системы двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0 \\ F_2(x;y) = 0 \end{cases} (1) \qquad \begin{cases} P_1(x;y) = c_1 \\ P_2(x;y) = c_2 \end{cases} (2)$$

Если множество решений системы (1) представляет собой подмножество множества решений системы (2), то система (2) называется *следствием* системы (1).

Нелинейные системы уравнений и методы их решения

Для систем алгебраических уравнений основными методами решения являются метод подстановки, метод сложения и метод введения новых переменных.

Метод подстановки

Пример. Найдите все значения x и y, являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24, \\ -2\left(\log_x \frac{1}{2}\right)^3 + y = 8 \end{cases}$$

Решение. Введем замену переменных, учитывая, что $\log_x 8 = 3\log_x 2$ и $\log_x \frac{1}{2} = -\log_x 2$.

Тогда, введя новую переменную $z = \log_x 2\,, z \neq 0$, перепишем исходную систему

$$\begin{cases} 6z + 3y = 24 \\ 2z^3 + y = 8\,. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение полученной системы на 3 и вычитая результат из первого уравнения системы, получаем уравнение относительно z и находим $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 0$ причем решение z_3 является посторонним $z \neq 0$. Далее, используя формулу замены переменной, находим значения $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.

Подставляя полученные значения x, например, в первое уравнение исходной системы, находим соответствующие значения $y_1 = 6, y_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{(2;6),\left(\frac{1}{2};10\right)\right\}$.

Метод разложения на множители

Нередко для понижения степени уравнений, входящих в систему, используется прием разложения одного из уравнений на множители и замена исходной системы уравнений равносильной ей совокупностью более простых систем уравнений.

Пример. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим многочлен $x^2 + 3xy + 2y^2$. Приравняем его к нулю и решим полученное уравнение как квадратное относительно x. Получим $x_1 = -y, x_2 = -2y$, то есть $x^2 + 3xy + 2y^2 = (x + y)(x + 2y)$. Тогда второе уравнение исходной системы примет вид:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = (x+y)(x+2y) + 2(x+2y) = (x+2y)(x+y+2) = 0$$

Исходная система равносильна совокупности двух систем.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Решим эти системы, используя метод подстановки.

Ответ: $\left\{(0;0);(2;-1);\left(-\frac{10}{7};-\frac{4}{7}\right)\right\}$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Решить системы линейных неравенств

1.1 $\begin{cases} 3x - 4{,}5 < 7{,}5 - x \\ 5 - 2x > 3{,}5 - x \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} (2x - 0{,}75) \cdot 3 < 5x - 0{,}25 \\ 4x - \frac{12}{5} < 6x + 3{,}6 \end{cases}$

2. Решить системы рациональных неравенств

2.1 $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}x^2 + x - 6\right)(x^2 + 7x + 6) \le 0 \\ \frac{2x-3}{3x+3} < 1 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} \frac{x^2+2x-15}{x-3} > \frac{x^2+4x-1}{x+1} \\ \frac{2x-18}{x-5} > 3 \end{cases}$

3. Решить системы неравенств со знаком модуля

3.1 $\begin{cases} |3x + 2| + |2x - 3| \le 11 \\ \frac{7}{x^2-5x+6} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} \frac{1}{|x|-6} > \frac{1}{|x|+10} \\ \frac{6}{|x|+10} > \frac{5}{|x|+11} \end{cases}$

4. Решить иррациональные неравенства, сводящиеся к системе или совокупности

4.1 $\frac{\sqrt{9x-18-x^2}}{2x-10} \ge \frac{\sqrt{9x-18-x^2}}{x-3}$ 4.2 $\frac{(6x-x^2-9)\sqrt{8-2x-x^2}}{(3-x)(x+2)} \le 0$

4.3 $\sqrt{12 + 4x - x^2}\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} < \sqrt{12 + 4x - x^2}\sqrt[3]{4x^2 - 8x}$

5. Решить логарифмические и показательные неравенства, сводящиеся к системе или совокупности

5.1 $(x^3 - 6x^2 + 5x)\log_{0,5}(4x^2 - 3x) < 0$

5.2 $\log_{x-4}(x^2 - 4x + 4) \cdot \log_{x+4}(x^2 - 3x + 3) > 0$

5.3 $|x - 4|^{x^2+8x+12} < |x - 4|^0$

ОТВЕТЫ

2. Числовые последовательности

1) 2; 2) 20; 3) 76; 4) 585; 5) -4; 6) 61376; 7) 8; 8) 6; 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 13) q=1, d=0; 15) 1, 2, 4.

3. Целые, рациональные и иррациональные числа. Делимость чисел. Корень степени n. Арифметический корень

1.4) 9. 2.а) $\frac{13}{99}$; б) $1\frac{2}{15}$; в) $3\frac{214}{999}$; г) $\frac{39}{300}$. 3.а) 2,(3); б) 0,(714285); в) 1,41(6).

5. Уравнения. Корни уравнений. Уравнения-следствия и равносильные уравнения. Понятие рациональных уравнений

3.1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1, $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$; 5) $1\frac{2}{3}$; 6) -3.

6. Неравенства с переменными

1.1) $(-\infty;-8) \cup (-8;-2] \cup [1;2) \cup (2;+\infty)$; 2) (-2; 1); 3) $(-\sqrt{3};0) \cup (\sqrt{3};+\infty)$; 4) $(-\infty;-2] \cup (3;9] \cup \{0\}$.

7. Иррациональные уравнения и неравенства

1) 3; 2)7; 3) -2; 4) 2; 7) 4; 10) -2, 3.

8. Показательные и логарифмические уравнения

1.1) 3, 6; 2) -5, -4; 3) $\frac{1}{2}$; 9) 2.

9. Показательные и логарифмические неравенства

1.1) $(-4;\ +\infty)$; 2) $(-4;\ +\infty)$; 3) (-3; 1); 4) $(3;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;1)$; 7) $(-\infty;\ -5) \cup (-5;-4)$.

2.1) $(-\infty;1]$; 2) $(-4;\ +\infty)$; 3) [-3;5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогановский, Н.М. Элементарная математика. В 2-х книгах. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Мн.: Дизайн ПРО 2000. – 580 с., ил.

2. Централизованное тестирование. Математика: полный сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний Министерства образования республики Беларусь. – Мн.: Аверсэв, 2021. – 229 с.

3. Литвиненко, В.И., Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия / В.И. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.:ABF, 1995. – 352 с.

4. Веременюк, В.В. Практикум по математике: подготовка к тестированию и экзамену / В.В. Веременюк, В. В. Кожушко. – 8-е изд. – Минск: Тетра-Системс, 2009. – 176 с.

5. Централизованный экзамен. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Респ. Ин-т контроля знаний М-ва образования Республики Беларусь. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2025. – 48 с.: ил.

6. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.

7. Игнатович, И.К. Математика: интенсивный курс подготовки к централизованному тестированию / И.К. Игнатович. – Минск: Новое знание, 2011. – 616 с.: ил.

8. Мамонова, Г.Г. Математика. Подготовка к тестированию: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования / Г.Г. Мамонова. – 8-е изд., стер. – Минск: Новое знание, 2014. – 686 с.

Учебное издание

ПРАКТИКУМ
ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

Методические рекомендации

В 2 частях

Часть 1

Составители:
АЛИЗАРЧИК Лилия Львовна
ЛЯТОС Александра Игоревна

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.В. Рудницкая*

Подписано в печать 15.12.2025. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,80. Тираж 30 экз. Заказ 147.

Издатель и полиграфическое исполнение — учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.