Заключение. Полученные результаты могут найти применение в теории фильтрации, теории теплопроводности, миграции популяций и в многих других областях естествознания.

Список литературы

1. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 212 с.
2. Баренблатт, Г.И. Летающие блюдца и микроструктура океана: математическая теория / Г.И. Баренблатт, А.С. Монин // Успехи мат. наук. – 1982. – Т. 37, №4. – С. 125–126.
3. Gurtin, M.E. On the diffusion of biological populations / M.E. Gurtin, R.C. MacCamy // Math. Biosc. – 1977. – V. 33. – P. 35–49.
4. Курдюмов, С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации / С.П. Курдюмов // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. – М.: Наука, 1982. – С. 217–243.
5. Гладков, А.Л. О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями / А.Л. Гладков // Мат. сборник. – 2000, Т. 191, №3. – С. 25–42.
6. Храмцов, О.В. Относительная стабилизация одного нелинейного вырождающегося параболического уравнения / О.В. Храмцов // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, №12. – С. 1650–1654.

О ЛОКАЛЬНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ФИТТИНГА

М.Г. Семенов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Локальный метод изучения конечных групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [2]. Напомним, что классом Фиттинга называют класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений. Всякое отображение $f:\{простые\ числа\} \to \{классы\ Фиттинга\}$ называется функцией Хартли или *H*-функцией. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [3], если $\mathfrak{F} = \bigcap_p f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. В таком случаем говорят, что класс $\mathfrak{F}$ определяется *H*-функцией *f*. Функцию Хартли *f* называют: *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого простого *p*; *полной*, если $f(p)\mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех простых *p*. В работе [3] Н.Т. Воробьевым установлено, что каждый локальный класс Фиттинга определяется полной внутренней функцией Хартли. Кроме того, в работе [3] доказано, что каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера.

Наши исследования посвящены применению локального метода для множеств Фиттинга. Непустое множество $\mathcal{F}$, состоящее из подгрупп группы *G*, называют множеством Фиттинга [1] *G*, если для него справедливы следующие утверждения: (1) если $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $N \in \mathcal{F}$; (2) если $H, K \in \mathcal{F}$ и $H, K \trianglelefteq HK$, то $HK \in \mathcal{F}$; (3) если $S \in \mathcal{F}$, то $S^x \in \mathcal{F}$ для всех $x \in G$.

Основная цель настоящей работы – определение локальных множеств Фиттинга и изучение взаимосвязи между локальными множествами Фиттинга и множествами Фишера группы *G*.

Определение 1. *Произведением* $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы *G* на класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ назовем множество $\{H \le G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$.

Нами доказаны следующие свойства для произведений, определенных выше.

Репозиторий ВГУ

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и X – класс Фиттинга. Тогда:*

1) произведение $\mathcal{F} \circ \mathsf{X}$ является множеством Фиттинга группы G;

2) $(G / G_{\mathcal{F}})_{\mathsf{X}} = G_{\mathcal{F} \circ \mathsf{X}} / G_{\mathcal{F}}$;

3) если X_1 и X_2 – классы Фиттинга, то $(\mathcal{F} \circ \mathsf{X}_1) \circ \mathsf{X}_2 = \mathcal{F} \circ (\mathsf{X}_1 \mathsf{X}_2)$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ – множества Фиттинга группы G. Тогда:*

1) если X – радикальный гомоморф, то из $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ следует $\mathcal{F}_1 \circ \mathsf{X} \subseteq \mathcal{F}_2 \circ \mathsf{X}$;

2) если X – формация Фиттинга, то $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \circ \mathsf{X} = \mathcal{F}_1 \circ \mathsf{X} \cap \mathcal{F}_2 \circ \mathsf{X}$;

3) если X_1 и X_2 – классы Фиттинга, то $\mathcal{F} \circ (\mathsf{X}_1 \cap \mathsf{X}_2) = \mathcal{F} \circ \mathsf{X}_1 \cap \mathcal{F} \circ \mathsf{X}_2$.

Определим локальные функции и локальные множества Фиттинга следующим образом:

Определение 2. *Локальной функцией* будем называть отображение $f : \{простые\ числа\} \to \{множева\ Фиттинга\ группы\ G\}$ для некоторой группы *G*.

Определение 3. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы *G* будем называть *локальным*, если $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'}$ для некоторой локальной функции *f*.

В таком случае будем говорить, что множество Фиттинга группы *G* определяется функцией *f*.

Определение 4. Пусть *f* – локальная функция, определяющая множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы *G*. Тогда *f* назовем:

1) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathcal{F}$ для каждого простого *p*;

2) *полной*, если $f(p) \circ \mathsf{N}_p = f(p)$ для всех простых *p*.

Лемма 3. *Каждое локальное множество Фиттинга группы G определяется полной внутренней локальной функцией.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – локальное множество Фиттинга группы *G* и $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'}$. Определим локальную функцию φ следующим образом: $\varphi(p) = f(p) \cap \mathcal{F}$. Ввиду леммы 2, имеем

$$\bigcap_p \varphi(p) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'} = \bigcap_p (f(p) \cap \mathcal{F}) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'} = \bigcap_p (f(p) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'} \cap \mathcal{F} \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'}) =$$

$$= \bigcap_p f(p) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'} \cap \bigcap_p \mathcal{F} \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'} = \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} \circ \bigcap_p \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'}) = \mathcal{F}$$

Пусть теперь $\psi(p) = \varphi(p) \circ \mathsf{N}_p$. Очевидно, что ψ - полная локальная функция, определяющая множество Фиттинга $\mathcal{F}$. Покажем, что ψ является внутренней локальной функцией. Пусть $H \in \psi(p) = \varphi(p) \circ \mathsf{N}_p$. Тогда $H \in \varphi(p) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'}$. Пусть *q* – некоторое простое число, отличное от *p*. Тогда $\mathsf{N}_p \subseteq \mathsf{E}_{q'}$ и, следовательно, $H^{\mathsf{E}_{q'}} \subseteq H^{\mathsf{N}_p} \in \varphi(p) \subseteq \mathcal{F}$. Значит, $(H^{\mathsf{E}_{q'}})^{\mathsf{N}_q \mathsf{E}_{q'}} \in \varphi(q)$ и $(H^{\mathsf{E}_{q'}})^{\mathsf{N}_q \mathsf{E}_{q'}} = H^{\mathsf{N}_q \mathsf{E}_{q'} \mathsf{E}_{q'}} = H^{\mathsf{N}_q \mathsf{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Тогда $H / H_{\varphi(q)} \cong H / H^{\mathsf{N}_q \mathsf{E}_{q'}} / H_{\varphi(q)} / H^{\mathsf{N}_q \mathsf{E}_{q'}} \in \mathsf{N}_q \mathsf{E}_{q'}$. Итак, мы показали, что $H \in \varphi(p) \circ \mathsf{N}_p \mathsf{E}_{p'}$ для всех простых *p*. Следовательно, $H \in \mathcal{F}$.

Репозиторий ВГУ

Лемма доказана.

Определение 5 [1]. Множество Фиттинга группы G называется *множеством Фишера*, если из того, что $K \trianglelefteq L \in \mathscr{F}$ и H/K – нильпотентная p-подгруппа L/K (p – простое число), всегда следует $H \in \mathscr{F}$.

Основным результатом является

Теорема 1. *Каждое локальное множество Фиттинга группы G является множеством Фишера.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ – локальное множество Фиттинга группы G и $\mathscr{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$. Покажем, что произведение $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фишера для произвольного простого p.

Пусть $K \trianglelefteq L \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ и H/K – нильпотентная q-подгруппа L/K. Рассмотрим 2 случая:

1) $q \neq p$.

В этом случае $H/K \in \mathfrak{E}_{p'}$. Из того, что $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фиттинга, следует $K \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$. Значит,

$$H \in (f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \mathfrak{E}_{p'} = f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}.$$

2) $q = p$.

Пусть $P \in Syl_p(H)$. Заметим, что $L / L_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, $P \leq L_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p}$. Тогда $[K, P] \leq K \cap L_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} = K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p}$. Значит, $K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P \leq KP = H$. Ввиду того, что $K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P / K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p$, имеем $K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_p = f(p) \circ \mathfrak{N}_p$. Так как $K / K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$, то

$$H / K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P = KP / K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P = K K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P / K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P \cong$$

$$\cong K / K \cap K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} P = K / K_{f(p)\circ \mathfrak{N}_p} (K \cap P) \in \mathfrak{E}_{p'}.$$

Значит, $H \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$.

Итак, мы показали, что для любого простого p множество Фиттинга $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фишера. Следовательно, $\mathscr{F}$ является множеством Фишера.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter De Gruyter: Berlin-New York, 1992. – 891 p.
2. Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
3. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Мат. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2 – С. 161–168.

Репозиторий ВГУ