Определение. Пара неотрицательных функций $u(x,t), v(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ называется нижним (верхним) решением задачи (1), если в (1) заменить все знаки = на ≤(≥).

Теорема 1(принцип сравнения). Пусть $\overline{u}(x,t), \overline{v}(x,t)$ и $\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t)$ – неотрицательные верхнее и нижнее решение задачи (1). Если min(p,q,m,n)<1, то дополнительно потребуем, чтобы $\overline{u}(x,t) > 0, \overline{v}(x,t) > 0$ или $\underline{u}(x,t) > 0, \underline{v}(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_T$. Тогда, если $\overline{u}(x,0) \geq \underline{u}(x,0), \overline{v}(x,0) \geq \underline{v}(x,0)$, то $\overline{u}(x,t) \geq \underline{u}(x,t), \overline{v}(x,t) \geq \underline{v}(x,t)$ в $\overline{Q}_T$.

Теорема 2. Для малых значений T задача (1) имеет решение в Q_T.

Теорема 3. Пусть задача (1) имеет решение в Q_T с неотрицательными начальными данными при min(pq, pn, qm, mn)≥1 и с положительными начальными данными при условии нетривиальности функций $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ по y, соответственно. Тогда решение задачи (1) единственно в Q_T.

Теорема 4. Пусть min(pq, pn, qm, mn)<1, $u_0(x)\equiv 0$, $v_0(x) \equiv 0$ и $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ нетривиальны по y. Допустим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1. $c_1(x,0)>0$, $c_2(x,0)>0$ для некоторого $x_0 \in \Omega$ при pq<1;
2. $c_1(x,0)>0$ для некоторого $x_0 \in \Omega$, $k_2(x,y_1,t)>0$ для любого $x \in \partial\Omega$ и некоторого $y_1 \in \partial\Omega$ при pn<1;
3. $c_2(x,0)>0$ для некоторого $x_0 \in \Omega$, $k_1(x,y_2,t)>0$ для любого $x \in \partial\Omega$ и некоторого $y_2 \in \partial\Omega$ при qm<1;
4. $k_1(x,y_3,t)>0$, $k_2(x,y_4,t)>0$ для любого $x \in \partial\Omega$ и некоторых $y_3, y_4 \in \partial\Omega$ при mn<1.

Тогда максимальное решение задачи (1) строго положительно для $x \in \overline{\Omega}$ на все временном отрезке своего существования.

Теорема 5. Пусть выполнены условия Теоремы 4 при $u_0(x)\neq 0$ или $v_0(x)\neq 0$. Предположим также, что $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ – неубывающие функции относительно t на отрезке $0\leq t\leq t_0$ для некоторого t_0. Тогда неотрицательное решение задачи (1) единственно.

Список литературы

1. Gladkov A.L., Kim K.I. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, vol. 19, no.1, P. 39–49.
2. Xiang Z.Y., Hu X.G., Mu C.L. Neumann problem for reaction-diffusion systems with nonlocal nonlinear sources // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, vol. 61, no.7, P. 1209–1224.

ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Прохожий
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Во многих прикладных задачах возникают нелинейные параболические уравнения. Особый интерес для исследования представляют так называемые уравнения с неявным вырождением. Ярким представителем уравнений такого класса служит уравнение ньютоновской политропической фильтрации

$$u_t = \Delta(|u|^{m-1}u), \tag{1}$$

где $m > 1$. Оно является параболическим при $u \neq 0$ и вырождается при $u = 0$. Уравнение (1) описывает, например, нестационарное течение сжимаемой ньютоновской жидкости в пористой среде (фильтрацию) при политропическом режиме ([1]), где величина $u(x,t) \geq 0$ пропорциональна плотности жидкости. Выяснилось также, что уравнение (1) возникает в физике атмосферы и океана ([2]), математической биофизике ([3]), а при наличии младших членов представляет интерес для синэнергетики, изучающей общие законы самоорганизации нелинейных сред ([4]). Если в рассматриваемой среде присутствуют конвекция (перенос) и абсорбция (поглощение), то в качестве модельного уравнения возникает следующее нелинейное параболическое уравнение:

$$u_t = a(u^m)_{xx} + b(u^n)_x - cu^p, \qquad (2)$$

где $m > 1 > p > 0$, $n > 1$, a, b, c – положительные постоянные. В полуплоскости $(x,t) \in S = \mathbf{R} \times (0,+\infty)$ для уравнения (2) рассмотрим задачу Коши с начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad (3)$$

где $u_0(x)$ – неотрицательная непрерывная функция, которая может расти на бесконечности.

Как хорошо известно, в силу вырождения уравнения (2) при $u = 0$ задача Коши (2), (3) может не иметь классического решения даже при гладких начальных данных. Поэтому рассматриваются обобщенные решения этой задачи.

Качественное поведение обобщенных решений задачи Коши (2), (3) для многомерного случая с $b = 0$ изучалось в [5]. Случай $n = (m + p)/2$ в терминах теории управления рассматривался в [6].

Целью настоящего исследования является исследование условий, при которых в каждой точке $x \in \mathbf{R}$ обобщенное решение задачи Коши (2), (3) обращается в ноль за конечное время. Эти условия зависят от соотношения показателей m, n, p.

Материал и методы. Для получения основных результатов использовались методы параболической регуляризации, монотонности дифференциальных операторов, построения суперрешений, исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, принципы максимума и Хольмгрена.

Результаты и их обсуждение. Для иллюстрации рассмотрим случай $n < (m + p)/2$. Определим класс $\mathbf{K}$ неотрицательных функций, удовлетворяющих в произвольной полосе $S_T = (-\infty,+\infty) \times [0,T]$ неравенству

$$\varphi(x,t) \leq M(\alpha + x^2)^k, \quad 0 \leq k < 1/(m-1). \qquad (3)$$

Постоянные $M > 0$, $\alpha \geq 0$ и k в (3) могут зависеть от T и функции $\varphi(x,t)$.

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbf{K}$. *Тогда в* S *существует обобщенное решение задачи Коши (1), (2)* $u(x,t) \in \mathbf{K}$. *Обобщенное решение единственно в классе функций* $\mathbf{K}$.

Теорема 2. *Пусть для начальной функции выполнено неравенство*

$$u_0(x) \leq A|x|^{2/(m-p)} + \beta(|x|), \qquad (4)$$

где $\lim\limits_{|x|\to\infty} \beta(|x|)/|x|^{2/(m-p)} = 0$, *и* $0 \leq A < \left\{c(m-p)^2/[2m(m+p)]\right\}^{1/(m-p)}$. *Тогда в любой точке* $y \in \mathbf{R}$ *обобщенное решение задачи Коши (1), (2) из класса* $\mathbf{K}$ *обращается в ноль за конечное время.*

Для других соотношений показателей доказаны аналогичные теоремы.

Показана определенная точность полученных результатов.

Заключение. Полученные результаты могут найти применение в теории фильтрации, теории теплопроводности, миграции популяций и в многих других областях естествознания.

Список литературы

1. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 212 с.
2. Баренблатт, Г.И. Летающие блюдца и микроструктура океана: математическая теория / Г.И. Баренблатт, А.С. Монин // Успехи мат. наук. – 1982. – Т. 37, №4. – С. 125–126.
3. Gurtin, M.E. On the diffusion of biological populations / M.E. Gurtin, R.C. MacCamy // Math. Biosc. – 1977. – V. 33. – P. 35–49.
4. Курдюмов, С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации / С.П. Курдюмов // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. – М.: Наука, 1982. – С. 217–243.
5. Гладков, А.Л. О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями / А.Л. Гладков // Мат. сборник. – 2000, Т. 191, №3. – С. 25–42.
6. Храмцов, О.В. Относительная стабилизация одного нелинейного вырождающегося параболического уравнения / О.В. Храмцов // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, №12. – С. 1650–1654.

О ЛОКАЛЬНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ФИТТИНГА

М.Г. Семенов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Локальный метод изучения конечных групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [2]. Напомним, что классом Фиттинга называют класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений. Всякое отображение $f : \{\textit{простые числа}\} \to \{\textit{классы Фиттинга}\}$ называется функцией Хартли или *H*-функцией. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [3], если $\mathfrak{F} = \bigcap_p f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. В таком случаем говорят, что класс $\mathfrak{F}$ определяется *H*-функцией *f*. Функцию Хартли *f* называют: *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого простого *p*; *полной*, если $f(p)\mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех простых *p*. В работе [3] Н.Т. Воробьевым установлено, что каждый локальный класс Фиттинга определяется полной внутренней функцией Хартли. Кроме того, в работе [3] доказано, что каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера.

Наши исследования посвящены применению локального метода для множеств Фиттинга. Непустое множество $\mathcal{F}$, состоящее из подгрупп группы *G*, называют множеством Фиттинга [1] *G*, если для него справедливы следующие утверждения: (1) если $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $N \in \mathcal{F}$; (2) если $H, K \in \mathcal{F}$ и $H, K \trianglelefteq HK$, то $HK \in \mathcal{F}$; (3) если $S \in \mathcal{F}$, то $S^x \in \mathcal{F}$ для всех $x \in G$.

Основная цель настоящей работы – определение локальных множеств Фиттинга и изучение взаимосвязи между локальными множествами Фиттинга и множествами Фишера группы *G*.

Определение 1. *Произведением* $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы *G* на класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ назовем множество $\{H \le G : H / H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$.

Нами доказаны следующие свойства для произведений, определенных выше.