том тогда и только тогда, когда существует такое подпространство V_0 из V, что $\mathrm{pr}_1\alpha = \ker\alpha \oplus V_0$, $\mathrm{pr}_2\alpha = \mathrm{coker}\alpha \oplus V_0$ и $(x,x) \in \alpha$, если $x \in V_0$.

Теорема. Если Γ – полугруппа линейных отношений из I степени n, то длина любой цепи в $\Gamma^{\mathcal{D}}$ не превосходит n.

Доказательство. Пусть Δ – прямоугольная полугруппа линейных отношений. Для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ имеем:

$\mathrm{rank}\alpha = \mathrm{rank}(\alpha\beta\alpha) \le \mathrm{rank}\beta = \mathrm{rank}(\beta\alpha\beta) \le \mathrm{rank}\alpha$

Таким образом, ранги всех линейных отношений в прямоугольной полугруппе линейных отношений совпадают. Поэтому можно определить ранг прямоугольной полугруппы Δ: $\mathrm{rank}\,\Delta = \mathrm{rank}\alpha$ для любого $\alpha \in \Delta$.

Пусть теперь Γ – идемпотентная полугруппа линейных отношений из I степени n. Рассмотрим такие прямоугольные компоненты $\Delta_0, \Delta \in \Gamma^{\mathcal{D}}$, что $\Delta_0 < \Delta_1$. Если $\alpha \in \Delta_0$, $\beta \in \Delta_1$, то линейное отношение $\gamma = \beta\alpha\beta \in \Delta_0$ служит нулем для β. Из равенства $\gamma\beta = \beta\gamma = \gamma$ вытекают включения $\mathrm{pr}_2\gamma \subseteq \mathrm{pr}_1\beta$, $\ker\beta \subseteq \ker\gamma$. Поскольку $\gamma \ne \beta$, очевидно, что эти включения строгие. Поэтому

$\mathrm{rank}\,\Delta_0 = \mathrm{rank}\,\gamma = \dim(\mathrm{pr}_2\gamma) < \mathrm{rank}\,\beta = \mathrm{rank}\,\Delta_1$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. Любая идемпотентная полугруппа линейных отношений из I есть конечная полурешетка прямоугольных полугрупп.

Список литературы

1. Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Сб.переводов. Математика. – 1963. – №7:6. – С. 1–12.
2. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т.48, №3. – С.34–37.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.И. Никитин

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Рассматривается следующая система нелинейных уравнений с нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p,\ v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q,\ x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \int_\Omega k_1(x,y,t)v^m(y,t)dy,\ x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial n} = \int_\Omega k_2(x,y,t)u^n(y,t)dy,\ x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, m, n – положительные константы, Ω – ограниченная область в R^n, $n \ge 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\vec{n}$ - внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$, а $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ – неотрицательные непрерывные функции.

Пусть $Q_T = \Omega x(0,T)$.

Определение. Пара неотрицательных функций u(x,t),v(x,t) $\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$ называется нижним (верхним) решением задачи (1), если в (1) заменить все знаки = на ≤(≥).

Теорема 1(принцип сравнения). Пусть $\overline{u}(x,t), \overline{v}(x,t)$ и $\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t)$ – неотрицательные верхнее и нижнее решение задачи (1). Если min(p,q,m,n)<1, то дополнительно потребуем, чтобы $\overline{u}(x,t) > 0, \overline{v}(x,t) > 0$ или $\underline{u}(x,t) > 0, \underline{v}(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_T$. Тогда, если $\overline{u}(x,0) \geq \underline{u}(x,0), \overline{v}(x,0) \geq \underline{v}(x,0)$, то $\overline{u}(x,t) \geq \underline{u}(x,t), \overline{v}(x,t) \geq \underline{v}(x,t)$ в $\overline{Q}_T$.

Теорема 2. Для малых значений T задача (1) имеет решение в Q_T.

Теорема 3. Пусть задача (1) имеет решение в Q_T с неотрицательными начальными данными при min(pq, pn, qm, mn)≥1 и с положительными начальными данными при условии нетривиальности функций $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ по y, соответственно. Тогда решение задачи (1) единственно в Q_T.

Теорема 4. Пусть min(pq, pn, qm, mn)<1, $u_0(x)\equiv0$, $v_0(x)\equiv0$ и $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ нетривиальны по y. Допустим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1. $c_1(x,0)>0$, $c_2(x,0)>0$ для некоторого $x_0 \in \Omega$ при pq<1;

2. $c_1(x,0)>0$ для некоторого $x_0 \in \Omega$, $k_2(x,y_1,t)>0$ для любого $x\in \partial\Omega$ и некоторого $y_1\in \partial\Omega$ при pn<1;

3. $c_2(x,0)>0$ для некоторого $x_0 \in \Omega$, $k_1(x,y_2,t)>0$ для любого $x\in \partial\Omega$ и некоторого $y_2\in \partial\Omega$ при qm<1;

4. $k_1(x,y_3,t)>0$, $k_2(x,y_4,t)>0$ для любого $x\in \partial\Omega$ и некоторых y_3, $y_4\in \partial\Omega$ при mn<1.

Тогда максимальное решение задачи (1) строго положительно для $x\in \overline{\Omega}$ на все временном отрезке своего существования.

Теорема 5. Пусть выполнены условия Теоремы 4 при $u_0(x)\neq0$ или $v_0(x)\neq0$. Предположим также, что $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ – неубывающие функции относительно t на отрезке $0\leq t\leq t_0$ для некоторого t_0. Тогда неотрицательное решение задачи (1) единственно.

Список литературы

1. Gladkov A.L., Kim K.I. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, vol. 19, no.1, P. 39–49.
2. Xiang Z.Y., Hu X.G., Mu C.L. Neumann problem for reaction-diffusion systems with nonlocal nonlinear sources // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, vol. 61, no.7, P. 1209–1224.

ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Прохожий
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Во многих прикладных задачах возникают нелинейные параболические уравнения. Особый интерес для исследования представляют так называемые уравнения с неявным вырождением. Ярким представителем уравнений такого класса служит уравнение ньютоновской политропической фильтрации

$$u_t = \Delta(|u|^{m-1}u), \qquad (1)$$