2. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Vol. 30, № 1.– S. 67-72.
3. Blessenohl, D. Uber normale Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W.Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd.148, № 1. – S.1–8.
4. Cusack, E. The join of two Fitting classes /E. Cusack// Math. Z. – 1979. – Vol.167. – S.37-47.
5. Lockett, P. The Fitting class F^* / P.Lockett// Math. Z. –1974. – Vol. 137– 131-136 p.

СТРОЕНИЕ ПОЛУГРУПП ИДЕМПОТЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. Наумик
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть *V* – *n*-мерное векторное пространство над произвольным полем *F*. Бинарное отношение $a \in V \times V$ между элементами множества *V* называется линейным, если оно является подпространством пространства $V \oplus V$. Множество *LR(V)* всех линейных отношений пространства *V* является, как известно [1], полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений.

Цель работы – описать строение полугрупп идемпотентов линейных отношений. Наряду с описанием конгруэнций [2], описание строения полугрупп идемпотентов линейных отношений является актуальной задачей в теории полугрупп линейных отношений.

Результаты и их обсуждение. Напомним, что полугруппа называется идемпотентной (используется также термин «связка»), если она удовлетворяет тождеству $x^2 = x$. Многообразие всех идемпотентных полугрупп обозначим буквой *I*, а многообразие всех идемпотентных полугрупп, удовлетворяющих дополнительному тождеству $W_1 = W_2$, обозначим через $I\,[W_1 = W_2]$.

Как известно, на каждой идемпотентной полугруппе из *I* отношение $\alpha \le \beta$, вводимое условием $\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$, определяет порядок. Мы всегда будем именно в этом смысле писать знак неравенства между элементами идемпотентной полугруппы из *I*. Очевидно, что идемпотентная полугруппа из *I* коммутативна только в том случае, когда соответствующее упорядоченное множество является нижней полурешеткой. Поэтому всюду далее полугруппы из многообразия $I\,[xy = yx]$ мы, как обычно, называем полурешетками. Еще один важный класс составляют полугруппы идемпотентов, порядок на которых совпадает с равенством. Это в точности вполне простые полугруппы идемпотентов. Они составляют многообразие $I\,[xyx = x]$ и называются прямоугольными. Частными случаями прямоугольных являются сингуляторные полугруппы (или полугруппы правых нулей), образующие многообразие $I\,[xy = x]$. Две данные полугруппы мы будем называть разноименными сингуляторными, если одна из них правосингуляторная, а другая левосингуляторная. Термин «прямоугольная» объясняется хорошо известным фактом: полугруппа тогда и только тогда прямоугольная, когда она изоморфна прямому произведению разноименных сингуляторных полугрупп.

Важную роль полурешеток и прямоугольных полугрупп во многом определяет следующий известный результат. Пусть Γ – произвольная идемпотентная полугруппа из *I*. Отношение $\mathcal{D}$, удовлетворяющее для $\alpha, \beta \in \Gamma$ условию

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \alpha\beta\alpha = \alpha \wedge \beta\alpha\beta = \beta$$

Является конгруэнцией на Γ. Фактор-полугруппа $\Gamma/\mathcal{D}$, обозначаемая в дальнейшем через $\Gamma^{\mathcal{D}}$, есть полурешетка, а классы конгруэнтности суть максимальные прямоугольные полугруппы в Γ. Эти классы называются прямоугольными компонентами полугруппы Γ.

Переходя к рассмотрению идемпотентных полугрупп линейных отношений из *I*, напомним, что линейное отношение α векторного пространства *V* является идемпотен-

Репозиторий ВГУ

том тогда и только тогда, когда существует такое подпространство V_0 из V, что $\mathrm{pr}_1\alpha = \ker\alpha \oplus V_0$, $\mathrm{pr}_2\alpha = \mathrm{coker}\alpha \oplus V_0$ и $(x, x) \in \alpha$, если $x \in V_0$.

<u>Теорема.</u> Если Γ – полугруппа линейных отношений из I степени n, то длина любой цепи в $\Gamma^{\mathcal{D}}$ не превосходит n.

<u>Доказательство.</u> Пусть Δ – прямоугольная полугруппа линейных отношений. Для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ имеем:

$\mathrm{rank}\alpha = \mathrm{rank}(\alpha\beta\alpha) \le \mathrm{rank}\beta = \mathrm{rank}(\beta\alpha\beta) \le \mathrm{rank}\alpha$

Таким образом, ранги всех линейных отношений в прямоугольной полугруппе линейных отношений совпадают. Поэтому можно определить ранг прямоугольной полугруппы Δ: $\mathrm{rank}\,\Delta = \mathrm{rank}\alpha$ для любого $\alpha \in \Delta$.

Пусть теперь Γ – идемпотентная полугруппа линейных отношений из I степени n. Рассмотрим такие прямоугольные компоненты $\Delta_0, \Delta \in \Gamma^{\mathcal{D}}$, что $\Delta_0 < \Delta_1$. Если $\alpha \in \Delta_0$, $\beta \in \Delta_1$, то линейное отношение $\gamma = \beta\alpha\beta \in \Delta_0$ служит нулем для β. Из равенства $\gamma\beta = \beta\gamma = \gamma$ вытекают включения $\mathrm{pr}_2\gamma \subseteq \mathrm{pr}_1\beta$, $\ker\beta \subseteq \ker\gamma$. Поскольку $\gamma \ne \beta$, очевидно, что эти включения строгие. Поэтому

$\mathrm{rank}\,\Delta_0 = \mathrm{rank}\,\gamma = \dim(\mathrm{pr}_2\gamma) < \mathrm{rank}\,\beta = \mathrm{rank}\,\Delta_1$. Отсюда следует утверждение теоремы.

<u>Теорема 2.</u> Любая идемпотентная полугруппа линейных отношений из I есть конечная полурешетка прямоугольных полугрупп.

Список литературы

1. Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Сб.переводов. Математика. – 1963. – №7:6. – С. 1–12.
2. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т.48, №3. – С.34–37.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.И. Никитин

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Рассматривается следующая система нелинейных уравнений с нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p,\ v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q,\ x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \int_\Omega k_1(x,y,t)v^m(y,t)dy,\ x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial n} = \int_\Omega k_2(x,y,t)u^n(y,t)dy,\ x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, m, n – положительные константы, Ω – ограниченная область в R^n, $n \ge 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\vec{n}$ - внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$, а $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ – неотрицательные непрерывные функции.

Пусть $Q_T = \Omega x(0,T)$.

Репозиторий ВГУ