О СВОЙСТВЕ МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТКИ π-НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.В. Марцинкевич
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

В теории разрешимых классов Фиттинга известна теорема Лауша [2] о том, что решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга модулярна. Напомним, что решетка классов Фиттинга называется модулярной, если для любых классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$, таких, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, справедливо $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

Определение. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным, если в любой конечной разрешимой группе её $\mathfrak{F}$-инъекторы являются в ней нормальными подгруппами.

В классе $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых π-групп π-нормальные классы впервые изучались Дёрком и Хоуксом [1], где установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π-нормальным в точности тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$.

В случае, когда $\pi = P$ класс $\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}$ классу всех разрешимых групп, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным [3].

Расширяя понятие π-нормальности на случай произвольных конечных групп, введем

Определение. Пусть π – непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовём π-нормальным или нормальным в классе $\mathfrak{E}_\pi$ всех конечных π-групп, в точности тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}_\pi$.

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда наименьший из классов Фиттинга, содержащий их объединение $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$ обозначают $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. Такой класс называют решеточным объединением $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ [4].

Заметим, что если $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}^*$ – наименьший из классов Фиттинга содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ [5]. Следует отметить, что классом Локетта называют класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ [1, с.681].

Основной результат нашей работы, представляет следующая

Теорема. Пусть π – непустое множество простых чисел. Решетка всех π-нормальных классов Фиттинга является модулярной.

Следствие 1. Решетка всех разрешимых π-нормальных классов Фиттинга является модулярной.

Следствие 2 [2]. Решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга является модулярной.

Список литературы

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T.Hawkes. – Berlin-N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891p.

2. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Vol. 30, № 1.– S. 67-72.
3. Blessenohl, D. Uber normale Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W.Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd.148, № 1. – S.1–8.
4. Cusack, E. The join of two Fitting classes /E. Cusack// Math. Z. – 1979. – Vol.167. – S.37-47.
5. Lockett, P. The Fitting class F^* / P.Lockett// Math. Z. –1974. – Vol. 137– 131-136 p.

СТРОЕНИЕ ПОЛУГРУПП ИДЕМПОТЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. Наумик
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть *V* – *n*-мерное векторное пространство над произвольным полем *F*. Бинарное отношение $a \in V \times V$ между элементами множества *V* называется линейным, если оно является подпространством пространства $V \oplus V$. Множество *LR(V)* всех линейных отношений пространства *V* является, как известно [1], полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений.

Цель работы – описать строение полугрупп идемпотентов линейных отношений. Наряду с описанием конгруэнций [2], описание строения полугрупп идемпотентов линейных отношений является актуальной задачей в теории полугрупп линейных отношений.

Результаты и их обсуждение. Напомним, что полугруппа называется идемпотентной (используется также термин «связка»), если она удовлетворяет тождеству $x^2 = x$. Многообразие всех идемпотентных полугрупп обозначим буквой *I*, а многообразие всех идемпотентных полугрупп, удовлетворяющих дополнительному тождеству $W_1 = W_2$, обозначим через $I\,[W_1 = W_2]$.

Как известно, на каждой идемпотентной полугруппе из *I* отношение $\alpha \le \beta$, вводимое условием $\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$, определяет порядок. Мы всегда будем именно в этом смысле писать знак неравенства между элементами идемпотентной полугруппы из *I*. Очевидно, что идемпотентная полугруппа из *I* коммутативна только в том случае, когда соответствующее упорядоченное множество является нижней полурешеткой. Поэтому всюду далее полугруппы из многообразия $I\,[xy = yx]$ мы, как обычно, называем полурешетками. Еще один важный класс составляют полугруппы идемпотентов, порядок на которых совпадает с равенством. Это в точности вполне простые полугруппы идемпотентов. Они составляют многообразие $I\,[xyx = x]$ и называются прямоугольными. Частными случаями прямоугольных являются сингуляторные полугруппы (или полугруппы правых нулей), образующие многообразие $I\,[xy = x]$. Две данные полугруппы мы будем называть разноименными сингуляторными, если одна из них правосингуляторная, а другая левосингуляторная. Термин «прямоугольная» объясняется хорошо известным фактом: полугруппа тогда и только тогда прямоугольная, когда она изоморфна прямому произведению разноименных сингуляторных полугрупп.

Важную роль полурешеток и прямоугольных полугрупп во многом определяет следующий известный результат. Пусть *Г* – произвольная идемпотентная полугруппа из *I*. Отношение $\mathcal{D}$, удовлетворяющее для $\alpha, \beta \in \Gamma$ условию

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \alpha\beta\alpha = \alpha \wedge \beta\alpha\beta = \beta$$

Является конгруэнцией на *Г*. Фактор-полугруппа $\Gamma/\mathcal{D}$, обозначаемая в дальнейшем через $\Gamma^{\mathcal{D}}$, есть полурешетка, а классы конгруэнтности суть максимальные прямоугольные полугруппы в *Г*. Эти классы называются прямоугольными компонентами полугруппы *Г*.

Переходя к рассмотрению идемпотентных полугрупп линейных отношений из *I*, напомним, что линейное отношение α векторного пространства *V* является идемпотен-