**И. В. ГАЛУЗО**, доцент кафедры инженерной физики Витебского государственного университета имени П. М. Машерова, кандидат педагогических наук, доцент
**В. М. КАРЕЛИНА**, студентка III курса Витебского государственного университета имени П. М. Машерова

# МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ – НЕСТАНДАРТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается весьма узкий класс нестандартных заданий на основе магических квадратов и их модификаций, получивших в последнее время довольно широкую популярность. Учитель и ученик всегда сталкиваются с огромным перечнем оригинальных задач: от простейших учебных и до олимпиадных. Описывается роль подобных заданий в учебном процессе. Рассматривается история возникновения магических квадратов, их классификация и некоторые методы их создания и решения. Увлечённым математикой школьникам будет полезно узнать об этом классе задач.

Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая делать его немного занимательным.

***Блез Паскаль*** (1623–1662),
один из выдающихся европейских математи ков и физиков

Я не знаю ничего более прекрасного в арифметике, чем эти числа, называемые некоторыми планетными, а другими — магическими.

***Пьер де Ферма*** (1501–1665),
французский математик, один из создателей теории чисел

Логическое мышление – это, прежде всего, способность рассуждать.

Каждый человек постоянно сталкивается с множеством задач, решение которых требует от него способности к логическому мышлению. Мыслительному процессу всегда свойственны доказательность и рассудительность, а целью его является получение обоснованного вывода из имеющихся предпосылок.

По сути, процесс логического мышления в начальный момент всегда состоит из сформулированного условия проблемы, затем следует её решение и, наконец, практическое действие в реализации задуманного. Умение логически мыслить помогает человеку быстро находить правильные и нужные решения в самых разных ситуациях, начиная с решения задач на любом школьном занятии и далее приобретённые навыки экстраполируются на любые уровни, не говоря уже о встречаемых бытовых ситуациях. Замечено, что школьникам с развитой логикой легче учиться, понимать и запоминать материал по разным предметам, быстро и грамотно решать различные учебные и практические задачи [3].

Умение решать нестандартные задачи приобретается практикой. Задачи такого типа могут предлагаться учащимся на уроках по любому предмету как «гимнастика ума», например, во время организационного момента.

Мир математики многообразен и не так скучен, как может показаться на первый взгляд. Числовые забавы могут завлечь и развлечь, ничуть не меньше, чем компьютерные игры. Умное и умелое обращение с цифрами даёт возможность каждому попасть в удивительный мир математики [12].

## ЧТО ПОНИМАЮТ ПОД МАГИЧЕСКИМИ КВАДРАТАМИ?

Тема магических квадратов достаточно интересна, так как они известны ещё с глубокой древности, имеют богатую историю развития, а вычисление магического квадрата даже сегодня представляет собой весьма непростую вычислительную задачу, часто требующую знания специфических алгоритмов.

Магические квадраты часто ещё называют волшебные, числовые, логические, священные, загадочные, таинственные, совершенные и др., в зависимости от того, какое им авторы придают содержание, свойства и построение. В простейшем случае — это квадратная таблица, ячейки которой заполнены числами таким образом, что сумма чисел одновременно в каждой строке, каждом столбце и на больших диагоналях одинакова. Сумма чисел в каждом направлении называется константой квадрата. Простейший, пожалуй, самый древний и известный, магический квадрат (с количеством строк и столбцов 3 × 3) представлен на рисунке 1 [5].

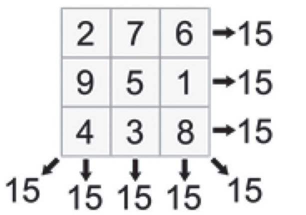



*Рисунок 1* — Магический квадрат третьего порядка с константой М = 15

Как видим, магические квадраты состоят из ячеек, образующими строки, столбцы и диагонали. Легко убедиться, что общая сумма чисел в заданных направлениях одинакова. Количество строк или столбцов определяет их порядок. В данном случае магический квадрат образован сеткой ячеек 3 × 3. Об этом факте обычно говорят — квадрат «порядка 3» с заданной константой М = 15.

В чём видится польза решения логических задач с магическими квадратами? Педагоги и психологи сформулировали основные функции при использовании любых видов творческих заданий:

***1. Развитие концентрации внимания.*** Это может быть полезным упражнением для тех, кто испытывает трудности с концентрацией внимания. Решение в подборе и расстановке чисел магического квадрата требует сосредоточенности и внимательности.

***2. Развитие навыков техники устного счёта,*** что закладывается ещё в младших классах. Это полезное упражнение для любого возраста, совмещённое с улучшением логического мышления.

***3. Учиться справляться с неприятностями и развивать терпение.*** Решение магического квадрата может быть сложным и казаться невыполнимым. Работа над решением квадрата может помочь преодолеть психическое состояние, вызванное неуспехом в удовлетворении интеллектуальной потребности (подавить состояние фрустрации). Настроить на победу над самим собой и достойно принять поражение.

***4. Развитие коммуникативных навыков.*** Решение магического квадрата может быть выполнено совместно в творческом коллективе (в группе), что может способствовать развитию коммуникативных навыков и способности работать в команде.

Таким образом, успешное выполнение творческих заданий может способствовать повышению личной самооценки и уверенности в своих силах. Магические квадраты учителем могут использоваться как инструмент для выработки навыков визуализации и фокусировки мыслительного процесса учащихся на конкретной задаче или цели. В конечном счёте подобные задания (ребусы, кроссворды, ключворды, филворды, судоку и др.) в процессе их решения способствуют приобретению навыков и умений анализа, сравнения и обобщения информации, что полезно в современном быстро меняющемся мире. Развивать логическое мышление ребёнка так же важно, как давать ему новые знания. Ведь если знания — это инструменты, то логика — это умение ими пользоваться. Именно навыки логического анализа, способность мыслить и находить нестандартные решения выделяют по-настоящему одарённых и талантливых детей [9; 13].

## ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Следует напомнить, что в древности отношение человека ко всей окружающей его природе было совершенно иным, нежели сейчас. Современный человек привык делить природу на живую и неживую, а зверей считать «братьями меньшими». Далёкие предки мыслили прямо противоположным образом. В их понимании, ничего мёртвого в мире нет, а всё окружение человека (деревья, животные, всевозможные предметы и даже природные явления) — непременно всё полно жизни и наделено волей, разумом и чувствами. По данным представлениям всё сущее одухотворено как и люди. Поэтому окружение человека не просто наделялось человеческими качествами, но более того, им приписывалось особое могущество и сверхъестественные свойства. Отсюда закономерно следует, что окружённые религиозным почитанием, звери занимали важное место в мировоззрении людей прошлого и соответственно могли играть первостепенную роль во взглядах человека на Вселенную [6].

Наивное представление о трёх слонах (китах и других существах), поддерживающих своими спинами Землю, пожалуй, известно каждому школьнику. Это давно стало символом незыблемой и нерушимой опоры. Здесь видим, в данном случае сохранились следы древнейших картин мироздания, когда-то созданной в своём представлении человечеством. Имеется в виду чрезвычайно архаичная концепция, отождествлявшая часть Вселенной или всю её целиком с какими-либо животными (рис. 2). Небосвод поддерживается слонами, стоящими на гигантской черепахе, плавающей в безбрежном океане.

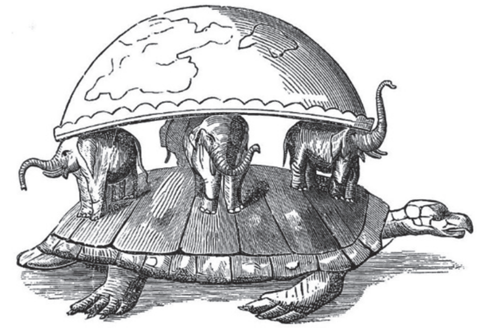
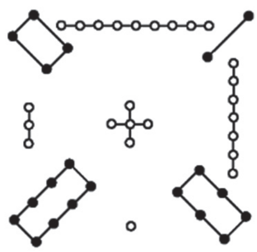


*Рисунок 2* — Одно из многих средневековых мифических изображений Вселенной

Существует, пожалуй, самое древнее предание о возникновении магического квадрата. По китайским легендам необычная черепаха выплыла на берег Жёлтой реки Хуанхэ около нескольких тысяч лет назад. На панцире этой черепахи был начертан таинственный узор, напоминающий форму квадрата. Существуют и другие предположения, что загадочный узор из точек принесла людям не черепаха, а какие-то другие животные.

На магическом квадрате Ло Шу («послание реки Ло») точки были нанесены упорядоченно — это привело древних философов к мысли о том, что точки на панцире черепахи содержат в себе некоторую тайну бытия. Суть всех версий сводится к одному: точечный узор складывался таким образом, что можно было разглядеть числа от 1 до 9 (рис. 3).

а



б

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

в

*Рисунок 3* — Современный амулет в виде мифической черепахи (а); расшифровка на панцире черепахи в виде точек (б) и цифровой квадрат (в)

Практически у всех народов Земли и на всех континентах существуют мифы не только о священной черепахе, но и других животных. В индийских, восточных, европейских сюжетах черепаха — больше, чем обычное животное. Древние сказания о сотворении Вселенной повествуют, что мир произошёл от пяти животных, однако, первым из которых и есть черепаха.

Проведём беглый математический анализ данного квадрата. Поставим перед собой следующую задачу.

Какими способами можно расставить все однозначные числа в ячейках таблицы 3 × 3 так, чтобы те не повторялись, а суммы чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям получились одинаковыми?

Итак, перед нами девять однозначных чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 (среди этих чисел нет нуля и соответственно 10, т. е. числа не повторяются). Чтобы решить эту задачу, вначале нужно определить, какое число будет стоять в центре таблицы, так как это число должно входить во все столбцы, строки и диагонали. Для этого найдём среднее арифметическое всех однозначных чисел: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. Тогда 45 делим на количество чисел (а их у нас 9) и получаем 5. Таким образом, это число должно входить в состав диагоналей и находиться в центре таблицы.

Сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали должна быть M = 15. Отнимем от 15 центральное число: 15 – 5 = 10. Сумма двух противоположных чисел должна быть равна 10, т. е. имеются варианты: 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6. По углам таблицы располагаются чётные числа: 2 – 4 – 6 – 8, а между чётными числами располагаются нечётные числа: 1 – 3 – 7 – 9. Всего получается восемь возможных вариантов расстановки чисел в квадратах Ло Шу (рис. 4).

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 | | 4 | 9 | 2 | | 6 | 7 | 2 | | 8 | 3 | 4 |
| 7 | 5 | 3 | | 3 | 5 | 7 | | 1 | 5 | 9 | | 1 | 5 | 9 |
| 6 | 1 | 8 | | 4 | 3 | 8 | | 8 | 3 | 4 | | 6 | 7 | 2 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 3 | 8 | | 2 | 7 | 6 | | 6 | 1 | 8 | | 8 | 1 | 6 |
| 9 | 5 | 1 | | 9 | 5 | 1 | | 7 | 5 | 3 | | 3 | 5 | 7 |
| 2 | 7 | 6 | | 4 | 3 | 8 | | 2 | 9 | 4 | | 4 | 9 | 2 |

*Рисунок 4* — Варианты магических квадратов Ло Шу 3 × 3 с константой 15

Закрывая несколько строк, столбцов или ячеек можно получать варианты заданий разной сложности по восстановлению спрятанных цифр.

Пример заданий приводится на рисунке 5.

Решить магический квадрат — это значит заполнить пустые ячейки так, чтобы сумма чисел по любой горизонтали, по вертикалям и диагоналям была одинаковой. В первом квадрате Ло Шу одна диагональ легко просчитывается; во втором квадрате необходимо понять, что в центре должна стоять цифра 5. Таким образом, получился алгоритм решения логического квадрата 3 × 3 с константой 15.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | | | 8 |
| | 5 | | | 7 | | |
| | | | | | | |

*Рисунок 5* — Варианты задач с квадратами 3 × 3 и с константой 15

В Китае число 15 имеет особое значение. В древнем китайском календаре совмещены лунные и солнечные циклы. Лунный год основан на лунных циклах, где каждый месяц начинается с новой Луны, а полная Луна приходится на пятнадцатый день каждого месяца. Солнечный год разделён на 24 периода (сезона), где каждый период эквивалентен смещению Солнца на 15° вдоль эклиптики и длится 15 дней.

Символика магического квадрата у древних китайцев получила и такое объяснение. Цифра 5 в середине таблицы означала Землю, а вокруг неё в строгом равновесии располагались огонь (2 и 7), вода (1 и 6), дерево (3 и 8), металл (4 и 9) [7].

В древности магическим квадратам приписывали различные мистические свойства. Если надо было решиться на какое-то опасное дело (путешествие, участие в военных действиях), то квадраты с магическими целями рисовали на бумажке и хранили у себя. Позже появились специально изготовленные амулеты (обереги), выгравированные на серебре. [8].

Новую трактовку простейшего магического квадрата предложил знаменитый математик Пифагор Самосский (ок. 570–500 гг. до н. э.). Пифагор считается основоположником нумерологии. Учёный и его последователи верили, что миром правят числа, даже человеческая сущность зависит от чисел, ведь дата рождения — это не что иное, как число. Магический квадрат Пифагор разделил на 3 уровня: материальный, души и разума. Цифры даты рождения вписывались в ячейки квадрата в определённом порядке, а затем полученная комбинация цифр уже будет рассказывать о заложенных природой способностях человека. Эксперименты, проводимые в наше время, с сотнями участников продемонстрировали, что достоверную связь между цифрами и реальной жизнью человека проследить невозможно.

Попутно заметим, что Пифагор и его последователи представляли космос в шарообразной и строго симметричной форме: сверху — полусфера неба, снизу — полусфера Тартара, а между ними — Земля и некое загадочное «Противоземлие» (Аид). Позже, один из пифагорейцев, Аристарх Самосский (ок. 310–230 до н. э.), догадался, что в центре должно располагаться Солнце, а не Земля (такое предположение было высказано за семнадцать веков до Коперника). Вокруг Земли вращаются небесные сферы в виде геометрических звучащих тел. Для пифагорейцев космос — это единый, но подвижный музыкально-числовой инструмент. Каждое тело в космосе якобы издаёт музыкальные звуки, но не слышимые человеком.

В отличие от древних пифагорейцев Кеплер также одно время считал, что и Земля издает своё звучание. Его расчёты показывали, что угловая скорость Земли меняется между наиболее удалённой от Солнца точкой орбиты и ближайшей точкой на полтона, т. е. получается соотношение 16 : 15 от ноты ми до ноты фа. Ясно, что к космическим звуковым эффектам эта закономерность не имеет никакого отношения и не приводит к вибрации окружающего пространства как в обычных музыкальных инструментах.

В своей книге «Тайна мира» («Mysterium Cosmographicum»), в 1596 г. Иоганн Кеплер предположил, что существует математическая связь между пятью платоновыми телами (совершенными многогранниками) и шестью открытыми к тому времени планетами Солнечной системы. Согласно этой модели в сферу орбиты Сатурна можно вписать куб, в который вписывается сфера орбиты Юпитера. В неё, в свою очередь, вписывается тетраэдр, описанный около сферы орбиты Марса. В сферу орбиты Марса вписывается додекаэдр, в который вписывается сфера орбиты Земли, а она описана около икосаэдра, в который вписана сфера орбиты Венеры. Сфера Венеры описана около октаэдра, в который вписывается сфера Меркурия. Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 6). Расхождение между моделью и реальными размерами орбит (порядка нескольких процентов) Кеплер объяснял «влиянием материи» [2].

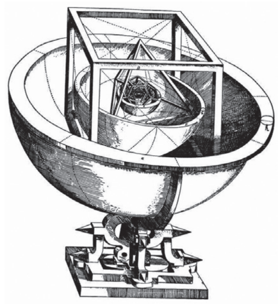


*Рисунок 6* — Модель Кеплера Солнечной системы в виде «Космического кубка» из платоновых тел

## КЛАССИФИКАЦИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Нами чуть ранее с помощью рисунка 1 рассмотрен простейший числовой квадрат (нормальный или классический), но иногда встречаются особые случаи квадратов, не подчиняющихся правилу равенства сумм ячеек по направлениям и диагоналям или у них есть другие свойства — при решении квадратов в условии задания специально оговариваются особенности в отличие от классических или требуется их найти.

Разработаны более сложные классические квадраты с другими сетками чисел, например $4 \times 4$, $5 \times 5$ и другие до $n \times n$.

С давних пор математики стремились решить две основные задачи, связанные с магическими квадратами: описать всевозможные магические квадраты и найти общий метод их построения. Все задачи о теории квадратов до сих пор не решены. Отчасти это связано с тем, что с увеличением числа n количество магических квадратов стремительно растет. Например, доказано, что для $n = 4$ (с константой 34) существует 880 различных магических квадратов, для $n = 5$ (с константой 65) — уже около четверти миллиона, а для больших значений n их общее число не найдено.

Для наиболее простых случаев значения магических констант приведены в таблице 1, хотя встречаются и более расширенные таблицы.

*Таблица 1* — Значения магических констант для некоторых квадратов

| **n** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ... | 16 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **M** | – | 15 | 34 | 65 | 111 | 175 | 260 | 369 | 505 | 671 | 870 | 1105 | ... | 2056 | ... |

Классический магический квадрат заполняется целыми числами от 1 до $n^2$. Такие квадраты существуют для всех порядков, за исключением $n = 2$.

Квадрат размером $2 \times 2$ должен был бы состоять из чисел 1, 2, 3, 4, а его постоянная была бы равна 5. Такой квадрат не существует, так как чтобы квадрат стал магическим, надо представить число 5 в виде суммы двух заданных чисел шестью различными способами, но это сделать невозможно. Ведь таких комбинаций всего лишь две: $1 + 4$ и $2 + 3$. Как ни расставляй числа в клетках таблицы, их сумма будет равна 5 либо в каждой строке, либо в обоих столбцах, либо по диагоналям, но никак не одновременно.

Таблицу 1 можем расширить с указанием магических констант. Магическая константа нормального квадрата зависит только от $n$ и определяется формулой: $M = \dfrac{n\left(n^2+1\right)}{2}$.

Существует единственный магический квадрат $3 \times 3$, так как остальные магические квадраты $3 \times 3$ получаются из него либо перестановкой строк или столбцов, либо путём поворота исходного квадрата на 90° или на 180°. Правила построения магических квадратов делятся на три категории в зависимости от того, каков порядок квадрата. Квадраты могут быть:

- нечётные, т. е. состоять из нечётного числа клеток;
- чётно-чётные, т. е. порядок равен удвоенному чётному;
- чётно-нечётные, т. е. порядок равен удвоенному нечётному.

Как мы уже видели, традиционные магические квадраты — это самая простая форма, в которой числа расположены так, чтобы суммы строк, столбцов и диагоналей были равны. В этих квадратах часто используются последовательные целые числа, начинающиеся с единицы. Традиционные магические квадраты могут быть любого порядка ($3 \times 3$, $4 \times 4$ и т. д.), а их конструкция может варьироваться от простых правил размещения чисел до сложных алгоритмов для больших размеров [10].

Ассоциативные магические квадраты — это особый тип, в котором каждая пара чисел, симметрично расположенных относительно центра или попарно рядом расположенных, в сумме даёт одно и то же значение. По диагоналям и углам квадрата числа также дают в сумме 34 (рис. 7). Это дополнительное ограничение усложняет построение ассоциативных магических квадратов, но и одновременно упрощают их решение.

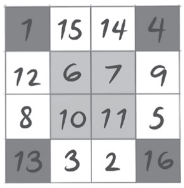



*Рисунок 7* — Пример ассоциативного квадрата четвёртого порядка ($4 \times 4$, с постоянной равной 34)

Без рассмотрения примеров квадратов обратим внимание на то, что иногда встречаются более ложные так называемые бимагические, мультимагические и латинские квадраты.

Бимагические квадраты — это те, в которых не только сумма чисел в каждой строке, столбце и диагонали одинакова, но и сумма квадратов этих чисел тоже одинакова.

Мультимагические квадраты расширяют эту концепцию дальше, требуя, чтобы даже более высокие степени (кубы, четвёртые степени и т. д.) также давали согласованные суммы. Эти типы квадратов сложны и редки, часто для их построения требуются передовые математические методы.

Латинские квадраты — разновидность неправильных математических квадратов, заполненные n различными символами таким образом, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречались все n символов (каждый по одному разу) [11; 14].

## МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим ещё один древнейший из дошедших до нас квадратов — четвёртого порядка, который был обнаружен в индийском городе Кхаджурахо по записям датируемым XI или XII веком (рис. 8).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 1 | 14 |
| 2 | 13 | 8 | 11 |
| 16 | 3 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 15 | 4 |

*Рисунок 8* — Магический квадрат $4 \times 4$ Кхаджурахо

Этот магический квадрат относится к разновидности так называемых ассоциативных (или «дьявольских») квадратов. Выявлено, что помимо обычных свойств, в этом квадрате магические свойства остаются, если над ним производить различные преобразования, например: 1) поворот; 2) отражение; 3) перестановку строки сверху вниз и наоборот; 4) зачёркивание столбца справа или слева и переписывая его с противоположной стороны.

Если из таких одинаковых ассоциативных квадратов выложить мозаику (каждый квадрат должен вплотную примыкать к своим соседям), то получится своеобразный паркет, в котором числа, стоящие в любой группе клеток $4 \times 4$, будут образовывать квадрат. Числа в четырёх клетках, следующих последовательно одна за другой, как бы они ни были расположены — по вертикали, по горизонтали или по диагонали, — в сумме всегда дают постоянную квадрата.

Китайский математик Ян Хуэ̆й (Yáng Huī, 1238–1298) занялся проблемой методов построения магических квадратов. Его исследования потом были продолжены другими китайскими математиками. Рассматривались магические квадраты не только третьего, но и больших порядков.

Европейцев с удивительными числовыми квадратами познакомил византийский писатель и языковед Мануил Мосхопулос (прим. 1265–1316). Его работа, основанная на арабских источниках, была первым специальным сочинением на эту тему и содержала примеры магических квадратов разного порядка, составленных самим автором [1].

Подсчитано, что существует 48 ассоциативных квадратов $4 \times 4$ с точностью до поворотов и отражений. Если принять во внимание ещё и симметрию относительно торических параллельных переносов, то остаётся только три существенно различных ассоциативных квадрата $4 \times 4$ (рис. 9).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 13 | 12 |
| 14 | 11 | 2 | 7 |
| 4 | 5 | 16 | 9 |
| 15 | 10 | 3 | 6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 7 | 14 |
| 8 | 13 | 2 | 11 |
| 10 | 3 | 16 | 5 |
| 15 | 6 | 9 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 11 | 14 |
| 12 | 13 | 2 | 7 |
| 6 | 3 | 16 | 9 |
| 15 | 10 | 5 | 4 |

*Рисунок 9* — Истинные различные магические квадраты Кхаджурахо

Заметим, что для $n = 3$ (квадрат Ло Шу), если не учитывать повороты и симметрии, то существует истинный всего один квадрат.

Для $n = 4$ и 5 существуют соответственно 880 и 275 305 224 магических квадратов, но уже для $n = 6$ точное значение неизвестно.

Отметим, что в XVI–XV1I вв. составлением магических квадратов многие занимались с таким же увлечением, с каким сегодня придумывают и разгадывают кроссворды. Обычно художники даты создания своих работ подписывают в незаметном месте картины или на обороте своего рисунка, чтобы зафиксировать дату создания и авторство. Оригинальным способом пометил свою гравюру на медной пластине в начале XVI в. знаменитый немецкий художник Альбрехт Дюрер (1471–1528). Он изобразил магический квадрат на заднем плане своей знаменитой гравюры «Меланхолия» (рис. 10). В ячейках квадрата рядом расположены два числа 15 и 14 (акцент в рамке проставлен нами). Это и есть дата завершения работы художником над гравюрой — 1514 год.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

*Рисунок 10* — Фрагмент картины А. Дюрера «Меланхолия»

Астрологи эпохи Возрождения связывали магические квадраты четвёртого порядка с Юпитером. Такие квадраты считались действенным средством от меланхолии. Вот поэтому название гравюры Дюрера созвучно с изображением магического квадрата именно четвёртого порядка.

Существует простой способ построения таких квадратов. Стоит лишь разграфить квадрат, разделить его на 16 клеток и в каждую из них по порядку вписать числа от 1 до 16, а затем поменять местами числа, расположенные на главных диагоналях симметрично относительно центра, и симметричный магический квадрат готов. Дюрер переставил у своего квадрата два средних столбца (что не повлияло на свойства квадрата) так, что числа в двух средних клетках нижней строки уже стали указывать дату создания гравюры.

Ещё один способ применения магических квадратов изобрёл Клод Брэгдон (1866–1946), известный американский архитектор. Он обнаружил, что соединив одну за другой клетки магических квадратов ломаными линиями, мы в большинстве случаев получим своеобразный узор. Подобные узоры можно получить, соединяя клетки только с чётными или только с нечётными числами. Образец такого узора, выполненный на основе квадрата Дюрера, при последовательном соединении ячеек, показан на рисунке 11.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

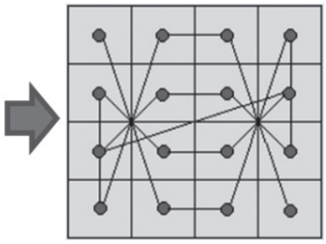


*Рисунок 11* — Узор, полученный с помощью магического квадрата Дюрера

Полученные таким способом «магические линии» Брэгдон использовал как образцы рисунков для тканей, книжных обложек, архитектурных украшений и декоративных заставок.

Но есть ещё один оригинальный магический квадрат, не менее интересный, чем дьявольский, разработал выдающийся американский учёный, общественный деятель и дипломат Бенджамин Франклин (1706–1790). Он составил квадрат 16 × 16, который помимо постоянной суммы 2056 во всех строках, столбцах и диагоналях имел ещё одно дополнительное свойство. Если вырезать из листа бумаги квадрат 4 × 4 ячейки и уложить этот лист на большой квадрат так, чтобы 16 клеток большего квадрата попали в эту прорезь, то сумма чисел, появившихся в этой прорези, куда бы мы её не положили, будет одна и та же — 2056 (см. таблицу 1). Самым ценным в этом квадрате является то, что его довольно просто превратить в идеальный магический квадрат [4; 9].

Используя современные компьютерные технологии представляется возможным создавать различные магические квадраты и другие головоломки. Например, онлайн-генератор развивающих заданий для детей робот Чики-Пуки (https://chikipooki.com/ru/math-puzzles/magic-square.html), создаёт задания с квадратами 3 × 3, 4 × 4 и 5 × 5. Квадраты с заданиями можно сразу же распечатать на бумаге для учеников. Можно также добавить лист с ответами для удобства проверки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В наше время магические квадраты продолжают привлекать к себе внимание любителей математических игр и развлечений. Необычные квадраты стали рассматриваться как один из математических курьёзов, но для их успешного решения требуются не столько специальные знания, сколько смекалка и умение подмечать числовые закономерности. Решение таких задач послужит прекрасной «гимнастикой для ума».

Многие известные математики и любители нестандартных задач занимались этими вопросами на протяжении веков. Абсолютно все убеждались, что случайный перебор цифр отнимает много времени, хотя и позволяет тренировать свои вычислительные навыки, однако существуют специальные приёмы и алгоритмы, помогающие ускорить заполнение магических квадратов (метод Рауз-Болла, метод террас, качелей и другие) [15].

Понять удивительную красоту, содержащуюся в магических квадратах не всякому дано, но один раз осознав стройность чисел можно получить огромное удовольствие.

В XIX и XX вв. интерес к магическим квадратам вспыхнул с новой силой. Их стали исследовать с помощью методов высшей алгебры и операционного исчисления. Магические квадраты в настоящее время нашли практическое применение, например, для коррекции ошибок, возникающих при передаче информации, а также в новейших технологиях создания цифровых изображений [16].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

**1.** *Баше, К. Г.* Игры и задачи, основанные на математике / К. Г. Баше. – СПб., М. : М. О. Вольф, 1877. – 244 с.

**2.** *Белый, Ю. А.* Иоганн Кеплер / Ю. А. Белый. – М. : Наука, 1971. – 295 с.

**3.** *Галузо, И. В.* Неожиданная математика: учить логическому мышлению с помощью «магических» квадратов / И. В. Галузо // Материалы 77-й Региональной научно-практической конференции 28 февраля 2025 г. – Витебск, ВГУ имени П. М. Машерова, 2025. – С. 242–245.

**4.** *Гарднер, М.* Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1999. – 447 с.

**5.** *Гуревич, Е. Я.* Тайна древнего талисмана / Е. Я. Гуревич. – М. : Наука, 1969. – 151 с.

**6.** *Евсюков, В. В.* Мифы о Вселенной / В. В. Евсюков. – Новосибирск : Наука, 1988. – 154 с.

**7.** *Еремеев, В. Е.* Символы и числа «Книги перемен» / В. Е. Еремеев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Ладомир, 2005. – 600 с.

**8.** *Кобзев, А. И.* Учение о символах и числах в китайской классической философии / А. И. Кобзев. – М. : Наука, 1994. – 432 с.

**9.** *Кордемский, Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский – М. : ГИФМЛ, 1958. – 576 с.

**10.** *Макарова, Н. В.* Волшебный мир магических квадратов / Н.В. Макарова. – М. : Наука, 2005. – 180 с.

**11.** *Манзон, Б. А.* Сборник занимательных математических задач, игр и головоломок / Манзон Б. А. – Симферополь : Крымиздат, 1954. – 56 с.

**12.** *Морозов, А. В.* Креативная педагогика и психология : учебное пособие / А. В. Морозов, Д. В. Чернилевский. – М. : Академический Проект, 2020. – 560 с.

**13.** *Перельман, Я. И.* Занимательная арифметика: Загадки и диковинки в мире чисел / Я. И. – М. : Астрель, 1953. – 255 с.

**14.** *Постников, М. М.* Магические квадраты / М. М. Постников. – М., Наука. – 2010. – 88 с.

**15.** *Серегин, Г. М.* Магические квадраты на внеклассных занятиях и уроках математики : учебно-методическое пособие / Г. М. Серегин. – Новосибирск : Изд-во НИПКиПРО, 2020. – 52 с.

**16.** *Чебраков, Ю. В.* Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ / Ю. В. Чебраков – СПб. : СПб гос. техн. ун-т, 1995. – 370 с.