О локальном задании σ-множества Хартли[1]

Караулова Т.Б.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

Воробьёв Н.Т.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
ntvorobyov@mail.ru

В работе рассматриваются конечные группы. В терминологии и обозначениях мы следуем [1].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу, которую называют $\mathfrak{F}$-радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется множеством Фиттинга G [2], если выполняются следующие условия:

(1) если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если $S \in \mathcal{F}$, $T \in \mathcal{F}$, $S \trianglelefteq ST$ и $T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Понятие $\mathcal{F}$-радикала группы G для множества Фиттинга G определяется аналогично, как и понятие $\mathfrak{F}$-радикала для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Заметим, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество подгрупп $\{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\}$ группы G, которое является множеством Фиттинга G, хотя обратное в общем случае неверно [1]. Такое множество Фиттинга обозначают $Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ и называют следом класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в группе G.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Через $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$– множество всех простых делителей группы G. Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \bigcap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

[1] Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция – 2025».

Всякое отображение вида $h : \sigma \to$ {множества Фиттинга группы G} называется σ-функцией Хартли группы G или H_σ-функцией G. Если h – H_σ-функция, то символом $\Pi = Supp(h)$ обозначают носитель h, т. е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $h(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Пусть $LFS_\sigma(f) = \{S \leq G : S = 1$ или $S \neq 1$ и $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(S)\}$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно, символом $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ обозначен $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$-корадикал группы S – наименьшая нормальная подгруппа S, факторгруппа по которой σ_i-замкнута.

Множество Фиттинга группы G называется σ-локальным, если $\mathcal{F} = LFS_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, то $\mathcal{F}$ называют локальным множеством Фиттинга G.

Пусть $\mathcal{F}$ – σ-локальное множество Фиттинга группы G. Тогда H_σ-функция h называется:

(1) приведенной, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathcal{F}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$;

(2) полной, если $h(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i} = h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;

(3) полной приведенной, если h является одновременно полной и приведенной H_σ-функцией.

Пусть $HS_\sigma(h) = \{S \leq G : S = 1$ или $S \neq 1$ и $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(S)\}$. Множество Фиттинга $\mathcal{H}$ назовем σ-множеством Хартли, если $\mathcal{H} = HS_\sigma(h)$ для некоторой H_σ-функции h.

Основной результат работы следующая

Теорема. *Каждое σ-множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G можно определить полной приведенной H_σ-функцией f такой, что*

$$f(\sigma_i) = Tr_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \bigcap \Big(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \Big)$$

для каждого $\sigma_i \in \Pi$.

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin; New York : Walter de Gruyter, 1992.

[2] Л. А. Шеметков. О подгруппах π-разрешимых групп. В кн. : Конечные группы. Минск : Наука и техника, 1975.