Министерство образования Республики Беларусь
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»
(ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА)

УДК 512.542 (047.31)
Рег.№ 20230508

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе,
профессор

____________Е.Я. Аршанский
"   " ____________ 20___ г.

О Т Ч Е Т
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(заключительный)
Грант аспирантов, докторантов и студентов
Министерства образования Республики Беларусь

Ответственный исполнитель,
аспирант ___________________ Е. Д. Волкова

Нормоконтроль ___________________ Т.В. Харкевич

Витебск 2023

РЕФЕРАТ

Отчет 15 с., 1 кн., 25 источников, 1 прил.

σ-РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА, КЛАСС ФИТТИНГА, σ-КЛАСС ХАРТЛИ, ИНЪЕКТОР, СОПРЯЖЕННОСТЬ

Объект исследования – классы Фиттинга, определяемые локально разбиениями множеств простых чисел и инъекторы для таких классов.

Цель работы – развитие обобщенного локального метода и его применение при исследовании радикалов и структурных свойств инъекторов в теории классов Фиттинга.

Методы исследования – σ-метод исследования классов Фиттинга, где σ – разбиение множества простых чисел; методы теории конечных групп и их классов, в частности, методы локализации в теории классов Фиттинга

Полученные результаты и их новизна – доказано существование и сопряженность $\mathfrak{H}$-инъекторов в σ-разрешимой группе G и описана их характеризация в терминах радикалов, доказано существование и сопряженность $\mathfrak{H}$-инъекторов для случая, когда σ-класс Хартли определен постоянной H_σ-функцией и группа G в общем случае не является σ-разрешимой. Все результаты являются новыми.

Область применения результатов – материалы, результаты и выводы данного исследования могут быть рекомендованы к широкому применению в исследованиях по теории групп, проводимых в Белорусском, Витебском, Гомельском, Брестском, Московском государственном университете, Брянском университете имени И. Г. Петровского, а также институтах математики НАН Беларуси, СО РАН, Школе математических наук Университета Науки и Технологий Китая, Цзяннаньском университете, Тюбингенском университете (Германия), Наваррском университете (Испания). Полученные результаты исследований могут быть внедрены в учебный процесс кафедры математики учреждения образования «ВГУ имени П.М. Машерова» при чтении спецкурсов по теории классов групп для студентов математических специальностей, а также для написания курсовых, дипломных проектов и магистерских диссертаций.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

В настоящем отчёте о НИР применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. В терминологии и обозначениях мы следуем [1].

$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел;

p, q, r – простые числа;

1 – единичный элемент и единичная группа;

π – некоторое множество простых чисел;

π' – дополнение некоторого множества простых чисел π во множестве всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$;

$\pi(n)$ – множество всех простых чисел, делящих натуральное число n;

π-*число* n – такое натуральное число n, что $\pi(n) \subseteq \pi$;

$|G|$ – порядок группы G;

$\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей порядка группы G;

$\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$;

$\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$;

$\sigma(G) = \sigma(|G|)$;

$F_\sigma(G)$ – σ-фиттингова подгруппа G, т.е. произведение всех нормальных σ-нильпотентных подгрупп группы G;

$C_G(H)$ – централизатор подгруппы H в группе G;

$A \times B$ – прямое произведение групп A и B;

Группу G называют:

π-*группой*, если G – группа, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$;

нильпотентной, если все её силовские подгруппы нормальны;

разрешимой, если существует такой главный ряд группы $G = G_t \supseteq G_{t-1} \supseteq \cdots \supseteq G_0 = 1$, в котором каждый главный фактор – элементарная абелева примарная группа;

σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$;

σ-*нильпотентной*, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$;

σ-*разрешимой*, если каждый главный фактор G σ-примарен.

Класс групп – совокупность групп, содержащая вместе с каждой своей группой G и все ей изоморфные группы.

Напомним следующие общепринятые обозначения классов групп:

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ и др. – классы групп;

$\mathfrak{E}$ – класс всех групп;

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ-нильпотентных групп;

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп;

$\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп;

$\mathfrak{S}_{\pi'}$ – класс всех разрешимых π'-групп;

$\mathfrak{S}_\sigma$ – класс всех σ-разрешимых групп;

$\emptyset$ – пустой класс групп и пустое множество;

(1) – класс всех единичных групп;

Класс Фиттинга – класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно взятия подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

$G_\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$-*радикал* группы G, т. е. произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга.

V – $\mathfrak{F}$-*инъектор* группы G, если $V \leq G$ и для каждой субнормальной подгруппы K группы G пересечение $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы K.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то группу G называют $\mathfrak{F}$-скованной, если $C_G(G_\mathfrak{F}) \leq G_\mathfrak{F}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

3. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

4. Skiba, A. N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.

5. Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

6. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

7. Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

8. Ballester-Bolinches, A. Finite Groups with σ-Subnormal Schmidt Subgroups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, X. Yi // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2022. – Vol. 45. – P. 2431–2440.

9. Ferrara, M. σ-Subnormality in locally finite groups / M. Ferrara, M. Trombetti // J. Algebra. – 2023. – Vol. 614 (15). – P. 867–897.

10. Sylow, M. L. Theoremes sur les groupes de substitutions / M. L. Sylow // Math. Ann. – 1872. – Vol. 5. – P. 584–594.

11. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.

12. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – P. 337–339.

13. Anderson, W. Injectors in finite solvable groups / W. Anderson // J. Algebra. – 1975. – № 36. – P. 333–338.

14. Шеметков, Л. А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л. А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

15. Монахов, В.С. Существование разрешимых инъекторов в конечных группах / В. С. Монахов // Докл. АН Беларуси. – 1992. – Т. 36, № 6. – С. 494–496.

16. Liu, Y. Description of F-injectors of Finite Soluble Groups / Y. Liu, W. Guo, N. T. Vorob’ev // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.

17. Yang, N. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

18. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. in Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.

19. Forster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Forster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32, № 4. – P. 293–297.

20. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – № 56. – P. 516–532.

21. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

22. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л. А. Шеметков // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 5–13.

23. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. – 2000. – № 3 (16). – P. 186–187.

24. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

25. Fisher B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Grouppen / B. Fisher. – Habilitationsschreft, Universität Frankfurt am Mainz, 1966.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Перечень публикаций исполнителя НИР

Статьи в научных журналах

1. Воробьев, Н. Т. Инъекторы конечных σ-разрешимых групп / Н. Т. Воробьев, Е. Д. Волкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 75–84.

2. Волкова, Е. Д. О существовании и сопряженности инъекторов в конечных группа / Е. Д. Волвока // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта імя П.М. Машэрава. – 2023. – № 2 (119). – С. 12-17.

Материалы конференций

3. Воробьев, Н.Т. О проблеме существования и сопряженности инъекторов π-разрешимых конечных групп / Н. Т. Воробьев, Е. Д. Волкова // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 75-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 3 марта 2023 г / Витеб. гос. ун-т; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2023. – С. 31–33.

Тезисы докладов

4. Волкова, Е.Д. О характеризации инъекторов в конечной группе / Е. Д. Волкова // XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната №18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 г. – С. 47-49.