



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ян, Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, О модулярности и алгебраичности решет-
ки кратно ω -композиционных классов Фиттинга,
Изв. вузов. Матем., 2023, номер 4, 76–88

<https://www.mathnet.ru/ivm9871>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-
гласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 176.60.213.13

25 ноября 2025 г., 09:09:33



Н. ЯН, Н.Н. ВОРОБЬЕВ, И.И. СТАСЕЛЬКО

О МОДУЛЯРНОСТИ И АЛГЕБРАИЧНОСТИ РЕШЕТКИ КРАТНО ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Аннотация. В настоящей работе найдены достаточные условия выполнимости модулярного равенства для семейств n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга ($n > 0$). Доказано, что решетка всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга алгебраична ($n \geq 0$).

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, ω -композиционный класс Фиттинга, ω -композиционная H -функция класса Фиттинга, n -кратно ω -композиционный класс Фиттинга, полная решетка классов Фиттинга, модулярная решетка, алгебраическая решетка.

УДК: 512.542

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-4-76-88

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию, принятую в [1]–[11].

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполняются следующие условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $M \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$, $G = MN$, причем $M, N \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}. \quad (1)$$

Следуя [11], [12], рассмотрим класс групп

$$CR_{\omega}(f) = \left(G \mid R^{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } C_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G)) \right).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = CR_{\omega}(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω -композиционным классом Фиттинга*, а f — *ω -композиционной функцией Хартли* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (по предложению Л.А. Шеметкова) или, более кратко, f — *ω -композиционная H -функция* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (см. [9], [10], [12]).

Всякий класс Фиттинга считается *0-кратно ω -композиционным*. При $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *n -кратно ω -композиционным*, если $\mathfrak{F} = CR_{\omega}(f)$, где все значения ω -композиционной H -функции f являются $(n-1)$ -кратно ω -композиционными классами Фиттинга (см. [9], [10], [13]). Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *тотально ω -композиционным*, если он является n -кратно ω -композиционным для всех целых неотрицательных n .

Поступила в редакцию 16.07.2022, после доработки 16.07.2022. Принята к публикации 21.12.2022.

Благодарности. Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (№ государственной регистрации 20210495).

Относительно включения $\subseteq$ множества всех ω -композиционных классов Фиттинга c_ω (см. [12]) и всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^n (см. лемму 5) образуют полные решетки.

Напомним, что решетка L называется *модулярной* [14], если для любых $x, y, z \in L$ имеет место импликация

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z),$$

называемая *модулярным законом*.

В 1986 году А.Н. Скиба [15] доказал, что решетка всех (локальных) формаций модулярна. Этот результат был развит во многих направлениях. Одно из направлений исследований посвящено поиску модулярных и дистрибутивных решеток классов. В частности, были найдены серии модулярных и дистрибутивных решеток формаций групп (см. [4], [9], [10], [15]–[33]).

В то же время мы не обладаем какой-либо существенной информацией о решетке классов Фиттинга. В частности, в настоящее время неизвестно, модулярна ли решетка всех классов Фиттинга (хотя бы в разрешимом случае) (см. [34], проблема 14.47). Вместе с тем в настоящей работе найдены достаточные условия выполнимости модулярного равенства для семейств n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ — n -кратно ω -композиционные классы Фиттинга ($n \geq 1$), x, y и f — минимальные ω -композиционные c_ω^{n-1} -значные H -функции классов $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Если $x \leq f$ и

$$x(a) \vee_\omega^{n-1} y(a) = S_n \{ G \mid G = G_{x(a)} G_{y(a)} \} \text{ для всех } a \in \text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(y), \text{ то} \\ (\mathfrak{X} \vee_\omega^n \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_\omega^n (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}).$$

Другим естественным направлением исследований стал поиск алгебраических решеток классов. Элемент c полной решетки L называется *компактным* [35], если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leq \sup_L X$ вытекает существование конечного подмножества $X_0 \subseteq X$ такого, что $c \leq \sup_L X_0$. Полная решетка называется *алгебраической*, если каждый ее элемент представим как точная верхняя грань некоторого множества компактных элементов.

Отметим, что вопрос об алгебраичности решетки всех насыщенных формаций конечных групп был впервые поставлен Б.И. Плоткиным в 1984 году на XVIII Всесоюзной алгебраической конференции (г. Москва) во время обсуждения совместного доклада Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы «Алгебра классов конечных групп». Такая задача была решена А.Н. Скибой в монографии [4]. В дальнейшем были найдены другие бесконечные серии алгебраических решеток формаций и классов Фиттинга и описаны их компактные элементы (см., например, [24], [27], [36]–[43]).

В настоящей работе доказана алгебраичность решетки всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга.

Теорема 2. Решетка всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^n ($n \geq 0$) является алгебраической.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим через символы $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{S}_\omega$ соответственно класс всех простых групп и класс всех разрешимых ω -групп, где ω — некоторое непустое множество простых чисел.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп. Обозначим через символ $(\mathfrak{X})$ пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$. В частности, символ (G) — класс всех групп, изоморфных

группе G ; $\mathcal{K}(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \mathcal{K}(G)$.

Если $\mathfrak{L}$ — класс простых групп, то $E\mathfrak{L}$ — класс всех групп, чьи композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{L}$. По определению все единичные группы принадлежат $E\mathfrak{L}$. Если A — простая группа, то $E(A)'$ — класс всех таких групп G , что $A \notin \mathcal{K}(G)$.

Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ через $\mathfrak{T}'$ обозначается множество $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{T}$. Для произвольного непустого класса простых групп $\mathfrak{L}$ через символ $\mathfrak{L}^+$ обозначим совокупность всех абелевых групп из $\mathfrak{L}$, а через символ $\mathfrak{L}^-$ — совокупность всех простых неабелевых групп из $\mathfrak{L}$ [10].

Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) — класс всех единичных групп, через символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех таких нормальных подгрупп N , что $G/N \in \mathfrak{F}$, и через $G_{\mathfrak{F}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы G . Мы используем символ $\mathfrak{S}_{cr}$ для обозначения класса всех таких групп G , что $C_G(H/K) = G$ для каждого главного p -фактора H/K группы G . Главный p -фактор группы G — это главный фактор группы G , имеющий порядок, равный степени простого числа p .

Пусть $\mathfrak{L}$ — класс простых групп, и A — простая группа. Очевидно, что $E\mathfrak{L}$, $E(A)'$, $\mathfrak{S}_{\omega}$ и $\mathfrak{S}_{cr}$ являются классами Фиттинга и формациями (см. [6], [44]). В частности, будем писать

$$O^{\mathfrak{L}}(G) = G^{E\mathfrak{L}}, \quad R^{\omega}(G) = G^{\mathfrak{S}_{\omega}}, \quad C_A(G) = G^{E(A)'}, \quad C_p(G) = G^{\mathfrak{S}_{cr}}.$$

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через символ $\text{Com}(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех таких абелевых простых групп A , что $A \cong H/K$, где H/K является композиционным фактором группы $G \in \mathfrak{X}$. В частности, пишут $\text{Com}(G)$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$.

Обозначим через $\pi(G)$ множество всех различных простых делителей порядка группы G . Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через символ $\pi(\mathfrak{X})$ обозначим объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$.

Для доказательства основных результатов нам понадобятся следующие известные факты.

Лемма 1 ([12], лемма 2.1). Пусть $N \trianglelefteq G$ и A — простая группа. Тогда

- 1) если $A \notin \mathcal{K}(G/N)$, то $C_A(G) = C_A(N)$;
- 2) если $G/N \in E\mathfrak{L}$, то $O^{\mathfrak{L}}(G) = O^{\mathfrak{L}}(N)$;
- 3) если $G/N \in \mathfrak{S}_{\omega}$, то $R^{\omega}(G) = R^{\omega}(N)$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ω -композиционных H -функций. Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такую ω -композиционную H -функцию f , что $f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Лемма 2 ([12], лемма 3.5). Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = CR_{\omega}(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = CR_{\omega}(f)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

Обозначим через символ $c_{\omega}^n \text{fit}(\mathfrak{X})$ пересечение всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

ω -Композиционная H -функция f называется c_{ω}^n -значной, если все ее значения принадлежат решетке c_{ω}^n .

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — непустая совокупность n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга. Положим

$$\vee_{\omega}^n(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c_{\omega}^n \text{fit} \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right).$$

В частности,

$$\mathfrak{F}_1 \vee_\omega^n \mathfrak{F}_2 = c_\omega^{\text{fit}}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — совокупность ω -композиционных c_ω^n -значных H -функций, где f_j — некоторая ω -композиционная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Тогда через символ $\vee_\omega^n(f_j \mid j \in J)$ обозначается такая ω -композиционная H -функция f , что

$$f(p) = c_\omega^{\text{fit}}\left(\bigcup_{j \in J} f_j(p)\right)$$

для всех $p \in \omega$. В частности,

$$(f_1 \vee_\omega^n f_2)(p) = c_\omega^{\text{fit}}(f_1(p) \cup f_2(p)),$$

если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_j(p) \neq \emptyset$. Если же $f_j(p) = \emptyset$ для всех $j \in J$, то предполагают, что $f(p) = \emptyset$.

Совокупность классов Фиттинга Θ называется *полной решеткой классов Фиттинга* [9], если классы $\emptyset$ и $\mathfrak{G}$ принадлежат Θ и пересечение любого множества классов из Θ снова принадлежит Θ .

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω -композиционных H -функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. По лемме 2 имеем $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ — ω -композиционная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда ω -композиционная H -функция f называется *минимальной ω -композиционной H -функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$* (см. [12]).

Обозначим через $\text{Supp}(f)$ множество $\{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq \emptyset\}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Согласно [1], [3] операцию S_n определяют следующим образом: $H \in S_n \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H вкладывается в качестве нормальной подгруппы в некоторую группу из класса $\mathfrak{X}$.

Лемма 3 ([12], теорема 1.2). Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ — классы Фиттинга, x, y и f — минимальные ω -композиционные H -функции классов $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Если $x \leq f$ и

$$x(a) \vee y(a) = S_n\{G \mid G = G_{x(a)}G_{y(a)}\} \text{ для всех } a \in \text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(y), \text{ то}$$

$$(\mathfrak{X} \vee_{\omega_c} \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega_c} (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}).$$

Здесь $\mathfrak{X} \vee_{\omega_c} \mathfrak{Y} = c_\omega^1 \text{fit}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) = c_\omega \text{fit}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})$, $x(a) \vee y(a) = \text{fit}(x(a) \cup y(a))$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем, учитывая ([12], замечание 3.3), мы полагаем $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ и $\omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{L}))$.

Лемма 4. Пусть g — такая ω -композиционная H -функция, что

$$g(a) = \begin{cases} \mathfrak{G}, & \text{если } a = \omega'; \\ \mathfrak{G}, & \text{если } a = p \in \omega. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{G} = CR_\omega(g)$ — тотально ω -композиционный класс Фиттинга.

Доказательство. Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ является n -кратно ω -композиционным для всех целых неотрицательных n . Проведем индукцию по n . Пусть $n = 1$. Покажем, что $\mathfrak{G} = CR_\omega(g)$. Включение $\mathfrak{G} \subseteq CR_\omega(g)$ очевидно. Обратно. Пусть $G \in CR_\omega(g)$. Так как все группы из $CR_\omega(g)$ являются конечными, то $G \in \mathfrak{G}$. Следовательно, $CR_\omega(g) \subseteq \mathfrak{G}$. Таким образом, $\mathfrak{G} = CR_\omega(g)$.

Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ утверждение верно. Согласно доказанному выше $\mathfrak{G} = CR_\omega(g)$. По индукции класс Фиттинга $\mathfrak{G} = g(a)$ $(n - 1)$ -кратно ω -композиционный для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следовательно, ω -композиционная H -функция g c_ω^{n-1} -значна. Значит, класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ n -кратно ω -композиционный. Рассуждая аналогично, можно показать, что класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ является $(n + 1)$ -кратно ω -композиционным и т. д. Таким образом, класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ является n -кратно ω -композиционным для всех целых неотрицательных n . Следовательно, $\mathfrak{G}$ — тотально ω -композиционный класс Фиттинга. $\square$

Лемма 5. *Совокупность всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^n является полной решеткой классов Фиттинга, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\bigwedge_\omega^n (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань и}$$

$$\bigvee_\omega^n (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — точная верхняя грань.}$$

Доказательство. Отметим, что совокупность всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^n частично упорядочена относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольное непустое множество n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга, f_i — ω -композиционная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Проведем индукцию по n . Пусть $n = 1$. Совокупность всех ω -композиционных классов Фиттинга c_ω является решеткой и, более того, полной решеткой (см. [12]).

Пусть теперь $n > 1$ и при $n - 1$ лемма верна. Применяя лемму 2, получаем $\mathfrak{F} = CR_\omega(f)$, где ω -композиционная H -функция f такова, что $f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$, $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. По индукции $f(a) \in c_\omega^{n-1}$, т. е. ω -композиционная H -функция f c_ω^{n-1} -значна. Значит, согласно определению класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является n -кратно ω -композиционным.

Таким образом, совокупность всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^n является решеткой классов Фиттинга, а для произвольного множества n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$

$$\bigwedge_\omega^n (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань и,}$$

как отмечено выше,

$$\bigvee_\omega^n (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \text{ — точная верхняя грань.}$$

Докажем теперь, что c_ω^n — полная решетка. Для этого достаточно показать, что класс всех групп $\mathfrak{G}$ является наибольшим элементом решетки c_ω^n . По лемме 4 класс Фиттинга $\mathfrak{G}$ является n -кратно ω -композиционным для всех целых неотрицательных n . Итак, c_ω^n — полная решетка классов Фиттинга, в которой наибольший элемент — класс всех групп $\mathfrak{G}$. $\square$

Группу G назовем *комонолитической* [9], если в G имеется такая нормальная подгруппа M (*комонолит группы G*), что G/M — простая группа и любая собственная нормальная подгруппа N группы G содержится в M .

Лемма 6. Пусть $\mathfrak{T}$ — непустой класс простых групп, и пусть f — такая ω -композиционная H -функция, что

$$f(a) = \begin{cases} E(\mathfrak{T}), & \text{если } a = \omega'; \\ E(\mathfrak{T}), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{T})); \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(\mathfrak{T})). \end{cases}$$

Тогда $E(\mathfrak{T}) = CR_\omega(f)$ — тотально ω -композиционный класс Фиттинга.

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{K}(E(\mathfrak{T})) = \mathfrak{T}$ и $\text{Com}(E(\mathfrak{T})) = \text{Com}(\mathfrak{T})$ (см., например, [41], лемма 2.6).

Докажем, что класс $E(\mathfrak{T})$ является n -кратно ω -композиционным классом Фиттинга для всех целых неотрицательных n . Проведем индукцию по n . Пусть $n = 1$. Покажем, что $E(\mathfrak{T}) = CR_\omega(f)$. Пусть $G \in E(\mathfrak{T})$. Поскольку $E(\mathfrak{T})$ является классом Фиттинга (см. [6], с. 126; [44], с. 497), то $R^\omega(G) \in E(\mathfrak{T}) = f(\omega')$, $C_p(G) \in E(\mathfrak{T}) = f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$. Значит, $G \in CR_\omega(f)$. Следовательно, $E(\mathfrak{T}) \subseteq CR_\omega(f)$.

Учитывая технику работы [10] (см. также [41], лемма 2.6), нетрудно убедиться, что $CR_\omega(f) \subseteq E(\mathfrak{T})$. Таким образом, $E(\mathfrak{T}) = CR_\omega(f)$.

Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ утверждение верно. Согласно доказанному выше $E(\mathfrak{T}) = CR_\omega(f)$. По индукции $E(\mathfrak{T}) = f(a)$ является $(n - 1)$ -кратно ω -композиционным классом Фиттинга для всех $a \in (\omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{T}))) \cup \{\omega'\}$. Заметим, что $\emptyset = f(a)$ по определению является $(n - 1)$ -кратно ω -композиционным классом Фиттинга для всех $a \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(\mathfrak{T}))$. Таким образом, $f(a)$ является $(n - 1)$ -кратно ω -композиционным классом Фиттинга для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Итак, $E(\mathfrak{T})$ по определению является n -кратно ω -композиционным классом Фиттинга. Рассуждая аналогично можно показать, что класс Фиттинга $E(\mathfrak{T})$ является $(n + 1)$ -кратно ω -композиционным и т. д. Следовательно, класс Фиттинга $E(\mathfrak{T})$ является n -кратно ω -композиционным для всех целых неотрицательных n . Значит, $E(\mathfrak{T})$ — тотально ω -композиционный класс Фиттинга. $\square$

Через $\mathfrak{T}^+$ обозначается класс всех простых абелевых групп, а через $\mathfrak{T}^-$ — класс всех простых неабелевых групп.

Лемма 7. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп и $\mathfrak{F} = c_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{X})$, где $n \geq 0$. Тогда

$$\text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(\mathfrak{F}).$$

В частности,

$$\omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T} = \text{Com}(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{T}^-$. По лемме 4 класс $\mathfrak{G}$ является наибольшим элементом решетки c_ω^n .

Используя рассуждения ([41], лемма 2.7), справедливо равенство $\text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(\mathfrak{T})$. По лемме 6 имеем $E(\mathfrak{T}) \in c_\omega^n$. Кроме того, $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{T}$. Значит, $\mathfrak{F} = c_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{X}) \subseteq E(\mathfrak{T})$. Снова, применяя рассуждения ([41], лемма 2.5, лемма 2.7) с учетом равенства $\text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(\mathfrak{T})$, получаем $\text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(\mathfrak{F})$. Отсюда

$$\omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})).$$

$\square$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω -композиционных c_ω^n -значных H -функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Так как по лемме 5 решетка всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^n является полной, то по лемме 2 имеем $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ — ω -композиционная c_ω^n -значная

H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда H -функция f называется *минимальной ω -композиционной c_ω^n -значной H -функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$* (см. [9]).

Лемма 8. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{X})$, где $n \geq 1$. Пусть $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$ и f — минимальная ω -композиционная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = c_\omega^{n-1} \text{fit}(R^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = c_\omega^{n-1} \text{fit}(C_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$;
- 4) $\mathfrak{F} = CR_\omega(h)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$;
- 5) $\omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$.

Доказательство 1)–3). Пусть t — такая ω -композиционная c_ω^{n-1} -значная H -функция, что

$$t(a) = \begin{cases} c_\omega^{n-1} \text{fit}(R^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = \omega'; \\ c_\omega^{n-1} \text{fit}(C_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = p \in \pi; \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi. \end{cases}$$

Покажем, что $t = f$. Пусть $\mathfrak{M} = CR_\omega(t)$. Сначала покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Пусть $T \in \mathfrak{X}$. Следовательно,

$$R^\omega(T) \in c_\omega^{n-1} \text{fit}(R^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = t(\omega'),$$

$$C_p(T) \in c_\omega^{n-1} \text{fit}(C_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = t(p)$$

для всех $p \in \pi$. Поэтому $T \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F} = c_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{X}) \subseteq c_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$.

Докажем обратное включение. Пусть f_1 — ω -композиционная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Покажем, что $t \leq f_1$. Пусть $N \in \mathfrak{X} \subseteq c_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{F} = CR_\omega(f_1)$. Тогда

$$R^\omega(N) \in f_1(\omega'), \quad C_p(N) \in f_1(p)$$

для всех $p \in \pi$. Поэтому

$$t(\omega') = c_\omega^{n-1} \text{fit}(R^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega'),$$

$$t(p) = c_\omega^{n-1} \text{fit}(C_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(p)$$

для всех $p \in \pi$. Следовательно, $t \leq f_1$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и $t = f$.

Докажем утверждение 4). Пусть h — такая ω -композиционная H -функция, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$. Заметим, что в силу своего строения H -функция h является c_ω^{n-1} -значной. Пусть $\mathfrak{H} = CR_\omega(h)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Если $G \in \mathfrak{F}$, то $R^\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и $C_p(G) \in f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$. Итак, $G \in \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонотическая группа с комонотом $R = G_\mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{H} = CR_\omega(h)$, то

$$R^\omega(G) \in h(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $G/R \in \mathfrak{S}_\omega$ и по лемме 1 имеем

$$R^\omega(G) = R^\omega(R) \in f(\omega').$$

Кроме того,

$$C_p(G) \in h(p) = f(p)$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Утверждение 5) теоремы верно в силу леммы 7. $\square$

Из леммы 8 вытекает

Лемма 9. Пусть f_1 и f_2 — минимальные ω -композиционные c_ω^{n-1} -значные H -функции n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

Доказательство. Пусть f_1 и f_2 — минимальные ω -композиционные c_ω^{n-1} -значные H -функции n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, $\pi_1 = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}_1))$, $\pi_2 = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}_2))$. По лемме 8

$$f_1(\omega') = c_\omega^{n-1}\text{fit}(R^\omega(K) \mid K \in \mathfrak{F}_1);$$

$$f_1(p) = c_\omega^{n-1}\text{fit}(C_p(K) \mid K \in \mathfrak{F}_1), \text{ если } p \in \pi_1; f_1(p) = \emptyset, \text{ если } p \in \omega \setminus \pi_1;$$

$$f_2(\omega') = c_\omega^{n-1}\text{fit}(R^\omega(K) \mid K \in \mathfrak{F}_2);$$

$$f_2(p) = c_\omega^{n-1}\text{fit}(C_p(K) \mid K \in \mathfrak{F}_2), \text{ если } p \in \pi_2; f_2(p) = \emptyset, \text{ если } p \in \omega \setminus \pi_2.$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}_1$. Тогда поскольку $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $C_p(A) \in (C_p(K) \mid K \in \mathfrak{F}_1) \subseteq (C_p(K) \mid K \in \mathfrak{F}_2)$. Значит,

$$f_1(p) = c_\omega^{n-1}\text{fit}(C_p(K) \mid K \in \mathfrak{F}_1) \subseteq c_\omega^{n-1}\text{fit}(C_p(K) \mid K \in \mathfrak{F}_2) = f_2(p)$$

для всех $p \in \pi_1$. Если же $p \in \omega \setminus \pi_1$, то $f_1(p) = \emptyset$, тем самым $f_1(p) \subseteq f_2(p)$.

Рассуждая аналогично, ввиду включения $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ и леммы 8 нетрудно показать, что

$$f_1(\omega') = c_\omega^{n-1}\text{fit}(R^\omega(K) \mid K \in \mathfrak{F}_1) \subseteq c_\omega^{n-1}\text{fit}(R^\omega(K) \mid K \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\omega').$$

Следовательно, $f_1 \leq f_2$.

Пусть $f_1 \leq f_2$, и пусть $G \in \mathfrak{F}_1 = CR_\omega(f_1)$. Тогда $R^\omega(G) \in f_1(\omega') \subseteq f_2(\omega')$, $C_p(G) \in f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$. Следовательно, $G \in CR_\omega(f_2) = \mathfrak{F}_2$. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. $\square$

Лемма 10. Пусть $n \geq 1$, f_i — минимальная ω -композиционная c_ω^{n-1} -значная H -функция n -кратно ω -композиционного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\bigvee_{i \in I}^{n-1}(f_i \mid i \in I)$ — минимальная ω -композиционная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \bigvee_{i \in I}^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Доказательство. Пусть

$$\pi = \omega \cap \pi\left(\bigcup_{i \in I} \text{Com}(\mathfrak{F}_i)\right) = \omega \cap \left(\bigcup_{i \in I} \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}_i))\right) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})).$$

Пусть $f = \bigvee_{i \in I}^{n-1}(f_i \mid i \in I)$, и пусть h — минимальная ω -композиционная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Если $p \in \omega \setminus \pi$, то $f_i(p) = \emptyset$ для любого $i \in I$. Следовательно, $f(p) = \emptyset$. Очевидно, что $h(p) = \emptyset$.

Пусть $p \in \pi$. Тогда существует такое $i_0 \in I$, что $f_{i_0}(p) \neq \emptyset$. Используя лемму 8, имеем

$$\begin{aligned} h(p) &= c_\omega^{n-1}\text{fit}\left(C_p(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right) = c_\omega^{n-1}\text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} c_\omega^{n-1}\text{fit}(C_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)\right) = \\ &= c_\omega^{n-1}\text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} f_i(p)\right) = (\bigvee_{i \in I}^{n-1}(f_i \mid i \in I))(p) = f(p). \end{aligned}$$

Более того, используя лемму 8, имеем

$$\begin{aligned} h(\omega') &= c_{\omega}^{n-1\text{fit}} \left(R^{\omega}(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = c_{\omega}^{n-1\text{fit}} \left(\bigcup_{i \in I} c_{\omega}^{n-1\text{fit}}(R^{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i) \right) = \\ &= c_{\omega}^{n-1\text{fit}} \left(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega') \right) = (\vee_{\omega}^{n-1}(f_i \mid i \in I))(\omega') = f(\omega'). \end{aligned}$$

Таким образом, $\vee_{\omega}^{n-1}(f_i \mid i \in I)$ — минимальная ω -композиционная c_{ω}^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee_{\omega}^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. $\square$

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ — n -кратно ω -композиционные классы Фиттинга ($n \geq 1$), x, y и f — минимальные ω -композиционные c_{ω}^{n-1} -значные H -функции классов $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Если $x \leq f$ и

$$\begin{aligned} x(a) \vee_{\omega}^{n-1} y(a) &= S_n \{ G \mid G = G_{x(a)} G_{y(a)} \} \text{ для всех } a \in \text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(y), \text{ то} \\ (\mathfrak{X} \vee_{\omega}^n \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} &= \mathfrak{X} \vee_{\omega}^n (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}). \end{aligned}$$

Доказательство. Проведем индукцию по n . Пусть $n = 1$. Тогда утверждение верно в силу леммы 3.

Пусть $n > 1$ и при $n-1$ утверждение верно. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ — n -кратно ω -композиционные классы Фиттинга, x, y и f — минимальные ω -композиционные c_{ω}^{n-1} -значные H -функции классов $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, причем $x \leq f$.

Покажем, что

$$(\mathfrak{X} \vee_{\omega}^n \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega}^n (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}).$$

Применяя лемму 2 и лемму 10, видим, что

$(x \vee_{\omega}^{n-1} y) \cap f$ — ω -композиционная c_{ω}^{n-1} -значная H -функция n -кратно ω -композиционного класса Фиттинга $(\mathfrak{X} \vee_{\omega}^n \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F}$ и

$x \vee_{\omega}^{n-1} (y \cap f)$ — ω -композиционная c_{ω}^{n-1} -значная H -функция n -кратно ω -композиционного класса Фиттинга $\mathfrak{X} \vee_{\omega}^n (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

По индукции $(x \vee_{\omega}^{n-1} y) \cap f = x \vee_{\omega}^{n-1} (y \cap f)$. Согласно лемме 9

$$(\mathfrak{X} \vee_{\omega}^n \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega}^n (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}).$$

$\square$

Лемма 11. Если решетка классов Фиттинга Θ является алгебраической, то ее компактными элементами являются в точности однопорожденные классы Фиттинга из Θ .

Доказательство. Пусть Θ — алгебраическая решетка классов Фиттинга. Понятно, что любой класс Фиттинга из Θ есть решеточное объединение своих однопорожденных подклассов Фиттинга из Θ , т. е. $\mathfrak{R} = \vee_{\Theta}(\Theta\text{fit}(G_i) \mid i \in I)$, где $\Theta\text{fit}(G_i)$ — подкласс класса Фиттинга $\mathfrak{R}$, $i \in I$.

Тогда в силу компактности элемента $\mathfrak{R}$ найдутся такие индексы $i_1, \dots, i_t \in I$, что

$$\mathfrak{R} = \Theta\text{fit}(G_{i_1}) \vee_{\Theta} \dots \vee_{\Theta} \Theta\text{fit}(G_{i_t}) = \Theta\text{fit}((G_{i_1}) \times \dots \times (G_{i_t})).$$

$\square$

Теорема 2. Решетка всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_{ω}^n ($n \geq 0$) является алгебраической.

Доказательство. Покажем сначала, что любой n -кратно ω -композиционный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является решеточным объединением (в решетке всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга) своих однопорожденных подклассов Фиттинга $\mathfrak{F}_i = c_\omega^n \text{fit}(G_i)$, где $i \in I$.

Пусть $\mathfrak{H} = c_\omega^n \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in c_\omega^n \text{fit}(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq c_\omega^n \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Обратно. Так как $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Индукцией по n докажем, что каждый однопорожденный n -кратно ω -композиционный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = c_\omega^n \text{fit}(G)$ является компактным элементом в решетке всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{F} = c_\omega^n \text{fit}(G) \subseteq \mathfrak{M} = \vee_\omega^n (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_\omega^n \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$, где $\mathfrak{F}_i$ — n -кратно ω -композиционный класс Фиттинга.

При $n = 0$ утверждение верно в силу ([42], теорема 1).

Пусть $n > 0$. Предположим, что однопорожденные $(n - 1)$ -кратно ω -композиционные классы Фиттинга являются компактными элементами в решетке всех $(n - 1)$ -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^{n-1} . Пусть f_i — минимальная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, m — минимальная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{M}$, f — минимальная c_ω^{n-1} -значная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 8 $f(\omega') = c_\omega^{n-1} \text{fit}(R^\omega(G))$, $f(p) = c_\omega^{n-1} \text{fit}(C_p(G))$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$, $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(G))$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 9 имеем $f \leq m$. По лемме 10 $m = \vee_\omega^{n-1} (f_i \mid i \in I)$. Значит, для каждого $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$ найдутся такие индексы $i_1, \dots, i_t; j_1, \dots, j_r \in I$, что

$$C_p(G) \in f_{i_1}(p) \vee_\omega^{n-1} \dots \vee_\omega^{n-1} f_{i_t}(p), \quad R^\omega(G) \in f_{j_1}(\omega') \vee_\omega^{n-1} \dots \vee_\omega^{n-1} f_{j_r}(\omega').$$

Поскольку множество $\pi(\text{Com}(G))$ конечно, то из последнего вытекает

$$G \in \mathfrak{F}_{i_1} \vee_\omega^n \dots \vee_\omega^n \mathfrak{F}_{i_t} \vee_\omega^n \mathfrak{F}_{j_1} \vee_\omega^n \dots \vee_\omega^n \mathfrak{F}_{j_r}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{i_1} \vee_\omega^n \dots \vee_\omega^n \mathfrak{F}_{i_t} \vee_\omega^n \mathfrak{F}_{j_1} \vee_\omega^n \dots \vee_\omega^n \mathfrak{F}_{j_r}.$$

Итак, решетка всех n -кратно ω -композиционных классов Фиттинга c_ω^n является алгебраической. Ввиду леммы 11 компактными элементами решетки c_ω^n являются в точности однопорожденные классы Фиттинга из c_ω^n . $\square$

Авторы благодарят рецензента за благожелательные замечания, которые позволили существенно улучшить изложение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шеметков Л.А. *Формации конечных групп*, Соврем. алгебра (Наука, М., 1978).
- [2] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем*, Соврем. алгебра (Наука, М., 1989).
- [3] Doerk K., Hawkes T.O. *Finite Soluble Groups*, De Gruyter Expo. Math. 4 (De Gruyter, Berlin-New York, 1992).
- [4] Скиба А.Н. *Алгебра формаций* (Беларуская навука, Минск, 1997).
- [5] Guo W. *The Theory of Classes of Groups*, V. 505, *Mathematics and Its Applications* (Science Press / Kluwer Academic Publishers, Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London, 2000).
- [6] Ballester-Bolínches A., Ezquerro L.M. *Classes of Finite Groups*, V. 584, *Mathematics and Its Applications* (Springer, Dordrecht, 2006).
- [7] Монахов В.С. *Введение в теорию конечных групп и их классов : учеб. пособие* (Выш. шк., Минск, 2006).

- [8] Guo W. *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups* (Springer, Berlin, 2015).
- [9] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп*, Матем. тр. **2** (2), 114–147 (1999).
- [10] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп*, Украинск. матем. журн. **52** (6), 783–797 (2000).
- [11] Ведерников В.А., Сорокина М.М. *Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп*, Дискретн. матем. **13** (3), 125–144 (2001).
- [12] Yang N., Vorob'ev N.N., Filimonova A.R. *On the modularity property of the lattice of partially composition Fitting classes*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **146**, 43–55 (2021).
- [13] Воробьев Н.Т. *О предположении Хюкка для радикальных классов*, Сиб. матем. журн. **37** (6), 1296–1302 (1996).
- [14] Салий В.Н. *Решетки с единственными дополнениями*, Соврем. алгебра (Наука, М., 1984).
- [15] Скиба А.Н. *О локальных формациях длины 5*, в сб.: *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп*, Наука и техн., Минск, 135–149 (1986).
- [16] Воробьев Н.Н. *Алгебра классов конечных групп* (ВГУ им. П.М. Машерова, Витебск, 2012).
- [17] Ballester-Bolinchas A., Shemetkov L.A. *On Lattices of p -Local Formations of Finite Groups*, Math. Nachr. **186** (1), 57–65 (1997).
- [18] Chi Z., Safonov V.G., Skiba A.N. *On n -multiply σ -local formations of finite groups*, Comm. Algebra **47** (3), 957–968 (2019).
- [19] Reifferscheid S. *A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups*, J. Group Theory **6** (3), 331–345 (2003).
- [20] Safonov V.G. *On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups*, Algebra Colloq. **15** (1), 119–128 (2008).
- [21] Safonov V.G. *On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups*, Comm. Algebra. **35** (11), 3495–3502 (2007).
- [22] Шабалина И.П. *О решетке τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций конечных групп*, Весці НАН Беларусі, Сер. фіз.-матэм. навук (1), 28–30 (2003).
- [23] Щербина В.В., Сафонов В.Г. *О подрешетках решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп*, Научн. ведомости БелГУ. Сер. Матем. и Физика **51** (1), 64–87 (2019).
- [24] Щербина В.В., Сафонов В.Г. *О некоторых свойствах решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп*, Научн. ведомости БелГУ. Сер. Матем. и Физика **51** (2), 227–244 (2019).
- [25] Shemetkov L.A., Skiba A.N., Vorob'ev N.N. *On lattices of formations of finite groups*, Algebra Colloq. **17** (4), 557–564 (2010).
- [26] Shemetkov L.A., Skiba A.N., Vorob'ev N.N. *On laws of lattices of partially saturated formations*, Asian-Eur. J. Math. **2** (1), 155–169 (2009).
- [27] Tsarev A.A. *On the lattice of all totally composition formations of finite groups*, Ric. Mat. **68** (2), 693–698 (2019).
- [28] Tsarev A.A., Vorob'ev N.N. *Lattices of composition formations of finite groups and the laws*, J. Algebra Appl. and Appl. **17** (5), 1850084-1–1850084-17 (2018).
- [29] Tsarev A.A., Vorob'ev N.N. *On a question of the theory of partially composition formations*, Algebra Colloq. **21** (3), 437–447 (2014).
- [30] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. *О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга*, Матем. заметки **67** (5), 662–673 (2000).
- [31] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н., Царев А.А. *Тождества решеток частично композиционных формаций*, Сиб. матем. журн. **52** (5), 1011–1024 (2011).
- [32] Воробьев Н.Н., Царев А.А. *О модулярности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций*, Украинск. матем. журн. **62** (4), 453–463 (2010).
- [33] Жизневский П.А. *О модулярности и индуктивности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций конечных групп*, Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины (1), 185–191 (2010).
- [34] *Unsolved Problems in Group Theory*, The Kourovka Notebook **20**, ed. by Khukhro E.I., Mazurov V.D. (Russian Acad. Sci., Siberian Branch, Univ. Lincoln, Sobolev Inst. Math., Novosibirsk, 2022).
- [35] *Общая алгебра*, Т. 2, Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А. и др., под общ. ред. Скорнякова Л.А., Справ. матем. б-ка (Наука, М., 1991).
- [36] Tsarev A.A. *Algebraic lattices of partially saturated formations of finite groups*, Afr. Mat. **31** (3–4), 701–707 (2020).

- [37] Сафонов В.Г. *Об алгебраичности решетки τ -замкнутых тотально насыщенных формаций*, Алгебра и логика **45** (5), 620–626 (2006).
- [38] Шабалина И.П. *Алгебраичность решетки τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций*, Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18 (1), 59–67 (2002).
- [39] Щербина В.В. *Алгебраичность решетки τ -замкнутых тотально ω -насыщенных формаций конечных групп*, Уфимск. матем. журн. **12** (1), 83–91 (2020).
- [40] Tsarev A.A., Kukharev A.V. *Algebraic lattices of solvably saturated formations and their applications*, Bol. Soc. Mat. Mex., III **26** (3), 1003–1014 (2020).
- [41] Щербина В.В. *О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп*, Прикл. матем. & физика **52** (1), 18–32 (2020).
- [42] Камозина О.В. *О неоднопорожденных n -кратно ω -верных классах Фиттинга конечных групп*, Матем. заметки **79** (3), 396–408 (2006).
- [43] Камозина О.В. *Алгебраические решетки n -кратно Ω -расслоенных классов Фиттинга*, Дискрет. матем. **18** (2), 139–145 (2006).
- [44] Каморников С.Ф., Шеметков Л.А. *О корадикалах субнормальных подгрупп*, Алгебра и логика **34** (5), 493–513 (1995).

Наньин Ян

Яньнанский университет,

г. Уси, 214122 КНР,

e-mail: yangny@jiangnan.edu.cn

Николай Николаевич Воробьев

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,

Московский просп., 33, г. Витебск, 210038 Беларусь,

e-mail: vornic2001@mail.ru

Игнат Игоревич Стаселько

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,

Московский просп., 33, г. Витебск, 210038 Беларусь,

e-mail: mars17906@mail.ru

N. Yang, N.N. Vorob'ev, and I.I. Staselka

On modularity and algebraicity of the lattice of multiply ω -composition Fitting classes

Abstract. In this paper it was found the sufficient conditions for the modularity equality for the collections of n -multiply ω -composition Fitting classes ($n > 0$). It was proved that the lattice of all n -multiply ω -composition Fitting classes is algebraic ($n \geq 0$).

Keywords: finite group, Fitting class, ω -composition Fitting class, ω -composition H -function of a Fitting class, n -multiply ω -composition Fitting class, complete lattice of Fitting classes, modular lattice, algebraic lattice.

Nanying Yang

Jiangnan University,

Wuxi, 214122 P. R. China,

e-mail: yangny@jiangnan.edu.cn

Nikolay Nikolaevich Vorob'ev

Vitebsk State University named after P.M. Masherov,
33 Moskovsky Ave., Vitebsk, 210038 Belarus,
e-mail: vornic2001@mail.ru

Ihnat Iharavich Staselka

Vitebsk State University named after P.M. Masherov,
33 Moskovsky Ave., Vitebsk, 210038 Belarus,
e-mail: mars17906@mail.ru