ОТКРЫТОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ ГРУППЫ ЛИ $SL(2,\boldsymbol{R})$ С МАКСИМАЛЬНОЙ ГРУППОЙ ИЗОМЕТРИЙ

Старовойтов А.К.,

студент 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

Ключевые слова. Группа Ли, алгебра Ли, экспоненциальное отображение, лоренцева метрика, изометрия.

Keywords. Lie group, Lie algebra, Lorentzian metric, similarity, exponential mapping isometry.

Цель данной работы – на одном отрытом подмногообразии трехмерной группы Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$ построить левоинварантную лоренцеву метрику, при которой это подмногообразие имеет максимальную группу изометрий.

Материал и методы. Рассматривается трёхмерная группа Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$ и его открытое подмногообразие G_1, состоящее из гиперболических элементов. Используются методы линейной алгебры и дифференциальной геометрии.

Результаты и их обсуждение. В работе [1] были найдены формулы, по которым действует экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ в соответствующую ей группу Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$ относительно естественных координат. Оказалось, что это отображение не является ни инъективным, ни сюръективным. Однако, часть $\mathcal{G}_1$ алгебры Ли, состоящая из элементов,

$$U=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих условию $-\det U = u_1^2 + u_2 u_3 < 0$, отображается взаимнооднозначно на соответствующую часть $\mathcal{G}_1$ группы Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$, состоящую из гиперболических элементов

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},\ \det X = 1,$$

удовлетворяющих неравенству $x_{11}+x_{22}>2$ (рисунок 1).

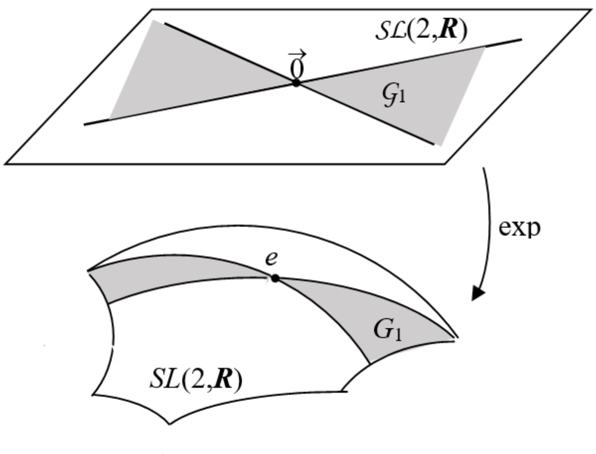

Рисунок 1

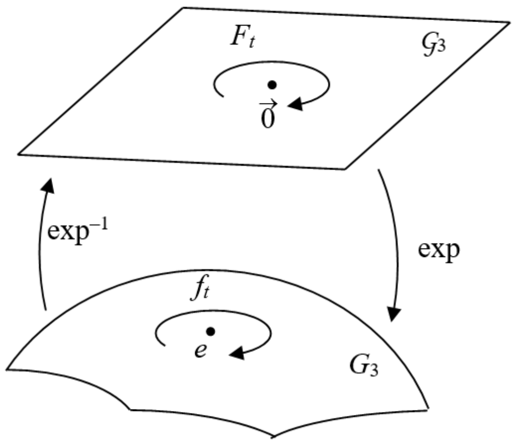

Рисунок 2

В работе [2] были выписаны формулы трёх однопараметрических групп автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ в разных базисах. Все эти группы являются одновременно изометриями относительно лоренцева скалярного произведения только при условии, что конусы параболических векторов в алгебре Ли и изотропных векторов совпадают. Тем самым, алгебра Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ имеет максимальную группу автоизометрий в том и только в том случае, когда указанные конусы совпадают.

Пусть $F_t: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ – однопараметрическая группа автоизометрий алгебры Ли $\mathcal{G}$. Мы строим однопараметрическую группу изометрий соответствующей группы Ли G с помощью экспоненциального отображения по следующей формуле

$$f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1}: G \to G.$$

Это правило проиллюстрировано на рисунке 2.

Данное правило работает, если группа Ли является односвязной и экспоненциальное отображение является биективным. По этому же правилу мы строим однопараметрическую группу подобий группы Ли, оставляющую неподвижным единичный элемент, если $F_t: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ есть однопараметрическая группа автоподобий.

Однако, как было показано в работе [3] оно работает и при построении группы автоподобий для неодносвязной группы Ли $SE(2)\times R^+$, при отсутствии биективности экспоненциального отображения.

Поскольку ограничение экспоненциального отображения на множество $\mathcal{G}_1$ является биекцией, мы можем перенести с помощью экспоненциального отображения координаты с множества $\mathcal{G}_1$ на открытое подмногообразие G_1. Назовем такие координаты простейшими. В этих координатах формулы изометрий подмногообразие G_1 совпадают с формулами автоизометрий алгебры Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$, выписанными в работе [2].

Легко убедиться, что не существует элементов в подмногообразии G_1 (кроме единичного), при левых сдвигах на которые оно является инвариантным. Поэтому перечисленные в работе [2] однопараметрические группы, и только они являются изометриями. Тем самым, мы доказали теорему.

Теорема. *Открытое подмногообразие G_1 группы Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$, состоящее из гиперболических элементов, обладает максимальной группой изометрий относительно левоинвариантной лоренцевой метрики тогда и только тогда, когда конус параболических векторов в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ совпадает с конусом изотропных векторов для лоренцевого скалярного произведения*.

Заключение. В данной работе мы нашли условие на левоинвариантную лоренцеву метрику, при котором открытое многообразие G_1 группы Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$, состоящее из гиперболических элементов, допускает максимальную группу изометрий. Используя разработанную ранее Шпаковой Ю.А. рабочую книгу Excel (см. работу [4]) мы планируем следующим шагом вычислить тензор кривизны полученного подмногообразия.

1.Старовойтов, А.К. Свойства экспоненциального отображения алгебры Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$ / М.Н. Подоксенов, А.К. Старовойтов // Математическое и компьютерное моделирование : сборник материалов XII Международной научной конференции (Омск, 14 марта 2025 г.). – Омск : Изд-во ОмГУ им. Ф.М. Достоевского, 2025. – С. 27–30.

2. Старовойтов, А.К. Алгебра Ли $\mathcal{SL}(2,R)$ с максимальной группой автоизометрий / М.В. Линкевич // Молодость. Интеллект. Инициатива : Материалы XIII Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов, Витебск, 25 апреля 2025 г. / Витеб. гос. ун-т – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2025. – Т. 1. – С. 65–66.

3. Подоксёнов, М.Н. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(2)\times R^+$ / М.Н. Подоксёнов, Ю.А. Шпакова // Математические структуры и моделирование. – 2023. – № 1(65). – С. 46–54.

4. Подоксёнов, М.Н. Тензор кривизны самоподобных лоренцевых многообразий некоторых четырёхмерных групп Ли / М.Н. Подоксёнов, Ю.А. Шпакова // Математические структуры и моделирование. – 2023. – № 3(67). – С. 16–22.