Эксперименты показали, что восприятие информации зависит от формы её подачи:

– только текстовые ответы воспринимались как «справочная система»;

– добавление голоса увеличило вовлечённость обучающихся на 20%;

– использование анимированного образа преподавателя повысило интерес к занятиям в 1,5 раза.

Особое внимание уделялось интеграции в АСУ. В ходе тестирования система позволила обучающимся обращаться к цифровому клону не только во время занятий, но и в любое удобное время. Это значительно снизило нагрузку на преподавателей, особенно в периоды подготовки к экзаменам и зачётам.

Таким образом, структура работы цифрового клона оказывает прямое влияние на структуру учебного процесса:

– база знаний обеспечивает корректность ответов;

– голосовой модуль придаёт индивидуальность;

– визуализация создаёт эффект личного присутствия;

– интеграция в интерфейс АСУ обеспечивает удобство и доступность.

Результаты внедрения показывают значительный потенциал использования цифрового клона в образовании. Однако остаются задачи по дальнейшему совершенствованию: улучшение точности удержания контекста беседы, ускорение генерации видеороликов и повышение реалистичности визуализации.

Заключение. Разработанный цифровой клон преподавателя предоставляет уникальные возможности для автоматизации образовательного процесса и интерактивного взаимодействия с обучающимися. Внедрение искусственного интеллекта в сферу обучения открывает новые горизонты для персонализированного образования, делая процесс более доступным, интересным и эффективным. Цифровой клон может применяться в таких областях, как дистанционное обучение, подготовка к экзаменам, интерактивные консультации, а также для поддержки обучающихся с особыми образовательными потребностями, создавая эффект живого присутствия преподавателя и обеспечивая непрерывный доступ к знаниям.

1. Обзор открытых моделей LLaMA 2: возможности и ограничения [Электронный ресурс] // Habr, РФ. – Режим доступа: https://habr.com/ru/articles/746988/. Дата доступа: 09.09.2025.

2. FAISS – библиотека для быстрого поиска по векторным представлениям [Электронный ресурс] // Facebook AI Research, США. – Режим доступа: https://github.com/facebookresearch/faiss. – Дата доступа: 09.09.2024.

3. Coqui TTS: синтез речи с открытым исходным кодом [Электронный ресурс] // Coqui.ai, Германия. Режим доступа: https://coqui.ai. – Дата доступа: 10.09.2025.

4. Распознавание речи с помощью Vosk [Электронный ресурс] // Alpha Cephei, РФ. Режим доступа: https://alphacephei.com/vosk/. – Дата доступа: 09.09.2025.

5. Горлушкина Н. Н., Насыров Н. Ф., Липина О. А. Цифровой двойник преподавателя как инструмент управления процессом формирования индивидуальных заданий для обучающихся //2021. № 2. С. 49-55.// [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovoy-dvoynik-prepodavatelya/viewer. – Дата доступа: 09.09.2025.

АНАЛИЗ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ КРАТНОСТЕЙ 4 И 5

Левошкин Е.А.[1], Китаров Д.А.[2],

[1]студент 1 курса, [2]магистрант ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Чернявский М.М., ст. преподаватель

Ключевые слова. Полином, кратный корень, точные формулы, рациональные выражения, система компьютерной алгебры.

Keywords. Polynomial, multiple root, exact formulas, rational expression, computer algebra system.

Получение явных формул, выражающих значения общих (а также кратных) корней полиномов через коэффициенты, до конца XX века представляло собой трудную задачу, поскольку в большинстве своем требовало объемных аналитических промежуточных вычислений, не поддававшихся ручному счету.

Относительно новым подходом в данном направлении является выражение значения общего единственного корня, а также кратного корня (и определенных комбинаций кратных корней, если кратный корень не единственный) в терминах частных производных от некоторых результантов и дискриминантов. Данное направление сейчас активно развивается благодаря использованию систем компьютерной алгебры для символьных вычислений и вывода требуемых формул [1–3].

Цель работы – провести анализ структур частных производных порядка s от результантов вида $R\left(f, f^{(k)}\right)$, где f – многочлен степени n, имеющий корень кратности s $(2 \le s < n)$, для выявления аналитических условий, при которых рациональные выражения (формулы) для вычисления данного кратного корня не дадут результата.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента, имеющие корень кратности 4 и выше. Методы исследования – методы алгебры с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2023.

Результаты и их обсуждение. М.М. Чернявским по аналогии с результатами, отраженными в работе [3], доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $z_1 = z_2 = \ldots = z_s = w$ *– корень кратности, как минимум,* s $(2 \le s < n)$ *для полинома* $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \ne 0)$. *Тогда для результанта* $R := R\left(f, f^{(k)}\right)$, *где* $f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j z^{n-k-j}$, $1 \le k < s$ *имеют место следующие равенства:*

1) *для* $1 \le r < s$

$$\frac{\partial^r R}{\partial b_{j_r} \ldots \partial b_{j_1}} = 0 \qquad \left(j_k = 0, 1, \ldots, n-k\right); \tag{1}$$

2)
$$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \ldots \partial b_{j_1}} = a_0^{n-k} s!\, w^{s(n-k)-(j_s+\ldots+j_1)} \cdot \prod_{i=s+1}^{n} g_i \qquad \left(j_k = 0, 1, \ldots, n-k\right), \tag{2}$$

где
$$g_i \equiv f^{(k)}(z_i) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j z_i^{n-k-j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ –} \tag{3}$$

значение k-й производной $f^{(k)}$ *многочлена* f *на его i-м корне* (z_i, $i = 1, \ldots, n$ *– корни* f).

Если $s = n$, *т.* е. $f(z) = a_0 (z - w)^n$, *то для* $r < n$ *выполняется равенство* (1) *и*

$$\frac{\partial^n R}{\partial b_{j_n} \ldots \partial b_{j_1}} = a_0^{n-k}\, n! \cdot w^{n(n-k)-(j_n+\ldots+j_1)} \qquad \left(j_k = 0, 1, \ldots, n-k\right).$$

Следствием из этой теоремы является обоснование некоторых семейств рациональных формул (на основе анализа выражений (2)), выражающих значение корня многочлена $f(z)$ кратности s (при условии, что другие корни имеют меньшую кратность).

Полученные результаты**.** Из выражения (2) следует, что для корня кратности s $(2 \le s < n)$ справедливы отношения:

$$\frac{\partial^s R\left(f, f^{(s-1)}\right)}{\partial b_{j_s} \ldots \partial b_{j_1}} : \frac{\partial^s R\left(f, f^{(s-1)}\right)}{\partial b_{l_s} \ldots \partial b_{l_1}} = w^{(l_s+\ldots+l_1)-(j_s+\ldots+j_1)} \qquad \left(j_k, l_k = 0, 1, \ldots, n-k\right), \tag{4}$$

т. е., подбирая индексы так, что $\left(l_s + \ldots + l_1\right) - \left(j_s + \ldots + j_1\right) = 1$, получим аналитические выражения для вычисления рассматриваемого корня кратности s $(2 \le s < n)$. Согласно выражениям (2) и (3), отношения частных производных (4) не дадут значения w в случае, когда

$$\prod_{i=s+1}^{n} g_i = \prod_{i=s+1}^{n} f^{(s-1)}(z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

В ходе выполнения задания этапа проекта изучались полиномы степеней $n = 6,7,8$ (со старшим коэффициентом, равным единице), имеющих корень кратности $s = 4,5$.

Для полинома шестой степени, имеющего корень кратности 4, возможны следующие ситуации $\left(z_1 \neq z_5,\ z_1 \neq z_6,\ z_5 \neq z_6\right)$:

1) $f(z) = (z - z_1)^4 (z - z_5)(z - z_6)$; 2) $f(z) = (z - z_1)^4 (z - z_5)^2$.

С помощью матпакета для случая 1) находим

$$f^{(3)}(z_5) = 48(z_1 - z_5)(3z_1 - 5z_5 + 2z_6); \quad f^{(3)}(z_6) = 48(z_1 - z_6)(3z_1 + 2z_5 - 5z_6).$$

Таким образом, при $z_1 = \dfrac{5z_5}{3} - \dfrac{2z_6}{3}$ и при $z_1 = \dfrac{5z_6}{3} - \dfrac{2z_5}{3}$ формулы (4) окажутся несправедливыми, что проверено на конкретных числовых примерах.

Для случая (2) $f^{(3)}(z_5) = 144(z_1 - z_5)^2$, т. е. рациональные выражения (4) дают гарантированное значение $z_1 = w$ при любых соотношениях между корнями z_1 и z_5.

Далее аналогично рассмотрим полином седьмой степени, имеющий корень кратности 4. Для него возможны следующие представления:

$$1)\ f(z) = (z - z_1)^4 (z - z_5)(z - z_6)(z - z_7); \quad 2)\ f(z) = (z - z_1)^4 (z - z_5)^2 (z - z_7).$$

Для случая 1) в матпакете находим:

$$f^{(3)}(z_5) = 48(z_5 - z_1)\left(2z_1^2 - 10z_1z_5 + 3z_1z_6 + 3z_1z_7 + 10z_5^2 - 5z_5z_6 - 5z_5z_7 + 2z_6z_7\right),$$

$$f^{(3)}(z_6) = 48(z_6 - z_1)\left(2z_1^2 + 3z_1z_5 - 10z_1z_6 + 3z_1z_7 - 5z_5z_6 + 2z_5z_7 + 10z_6^2 - 5z_6z_7\right),$$

$$f^{(3)}(z_7) = 48(z_7 - z_1)\left(2z_1^2 + 3z_1z_5 + 3z_1z_6 - 10z_1z_7 + 2z_5z_6 - 5z_5z_7 - 5z_6z_7 + 10z_7^2\right),$$

откуда следует, что произведение (5) обращается в нуль при

$$z_6 = -\frac{2z_1^2 - 10z_1z_5 + 3z_1z_6 + 10z_5^2 - 5z_5z_6}{3z_1 - 5z_5 + 2z_6},$$

$$z_7 = -\frac{2z_1^2 + 3z_1z_5 - 10z_1z_6 - 5z_5z_6 + 10z_6^2}{3z_1 + 2z_5 - 5z_6},$$

$$z_5 = -\frac{2z_1^2 - 10z_1z_6 + 3z_1z_7 + 10z_6^2 - 5z_6z_7}{3z_1 - 5z_6 + 2z_7}.$$

Для случая 2) $f^{(3)}(z_6) = -48(-z_5 + z_1)^2 (2z_1 - 5z_5 + 3z_7)$, откуда заключаем, что выражения (4) не дадут результата при $z_1 = \dfrac{5z_5}{2} - \dfrac{3z_7}{2}$.

Похожие результаты получены для полиномов восьмой степени, имеющих корни кратности четыре, а также для полиномов шестой, седьмой и восьмой степеней, имеющих корень кратности пять.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф25М-063).

Заключение. Таким образом, в терминах корней полиномов шестой, седьмой и восьмой степеней, имеющих корень кратности 4 или 5, доказаны явные аналитические условия связи между корнями, при выполнении которых семейства рациональных выражений (4) не дают значения кратного корня.

1. Чернявский, М. М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1. – С. 13-25. – URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/26638 (дата обращения: 14.09.2025).

2. Лебедев, А. В. Дифференцирование результантов и общие кратные корни полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 4. – С. 282–287. – URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/44242 (дата обращения: 14.09.2025).

3. Чернявский, М. М. Рациональные выражения для кратных корней полиномов / М. М. Чернявский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 2. – С. 95–100. –URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/48077 (дата обращения: 14.09.2025).