

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДИРАКА

С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Bramka@rambler.ru, Yurchuk@bsu.by

Рассмотрим задачу Коши

$$L_\gamma(u) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta_x u(x, t) + \gamma \delta(x_0, t_0) u = f(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $\delta(x_0, t_0)$ — δ -функция Дирака, сосредоточенная в точке (x_0, t_0) , $\delta(x_0, t_0)u = u(x_0, t_0)$ и Δ_x — оператор Лапласа по пространственным переменным x_i , $i = \overline{1, n}$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть функции f и φ непрерывны и удовлетворяют условиям

$$|f(x, t)| \leq c \exp\{h\|x\|^2\}, \quad |\varphi(x)| \leq c \exp\{h\|x\|^2\}, \quad c > 0,$$

$$|f(x, t) - f(x', t)| \leq B\|x - x'\|^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

где $h < 1/(4T)$, а $\gamma \neq -1/t_0$. Тогда для каждой такой f и φ задача Коши (1), (2) имеет единственное классическое решение, которое представимо формулой

$$u(x, t) = v(x, t) - \gamma \frac{v(x_0, t_0)}{1 + \gamma t_0} t.$$

Здесь функция

$$v(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-r^2/(4t)} dz + \int_0^t \frac{d\tau}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z, \tau) e^{-r^2/(4(t-\tau))} dz,$$

где $r = \|x - z\| = \sqrt{|x_1 - z_1|^2 + \dots + |x_n - z_n|^2}$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, является решением задачи Коши (1), (2) при $\gamma = 0$.

МАКСИМАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.М. Бородин

Витебский госуниверситет, Витебск, Беларусь

sirius722@rambler.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается неавтономное гиперболическое уравнение

$$\partial_t^2 u + \varepsilon \partial_t u = \Delta u - f(t, u) - g(x), \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$, $f(t, u) \in C^{0,1}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Предполагается, что выполнены условия:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, u) &= \tilde{f}(u), \quad \tilde{f}(u) \in C^1(\mathbb{R}), \\ f(t, u)u &\geq -C, \quad f'_u(t, u) \geq -C, \\ |f'_u(t, u)| &\leq C(u^2 + 1), \quad |\tilde{f}'(u)| \leq C(|u|^\alpha + 1) \quad (0 \leq \alpha < 2), \\ |f(t, u) - \tilde{f}(u)| &\leq k(t)(|u|^3 + 1), \end{aligned}$$

где $C > 0$, $k(t) \in C([0; +\infty))$, $k(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Уравнение (1) порождает в пространстве $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}, t \geq \tau \geq 0\}$:

$$S_{t,\tau} : y_0 \rightarrow y(t),$$

где $y_0 = (u_0, p_0) \in E$, $y(t) = (u(t), \partial_t u(t))$, $u(t)$ — решение уравнения (1) с начальными условиями $u|_{t=\tau} = u_0$, $\partial_t u|_{t=\tau} = p_0$.

Максимальным аттрактором семейства $\{S_{t,\tau}\}$ назовем компактное в E множество $\mathfrak{M}$, притягивающее при $t \rightarrow +\infty$ траекторию $S_{t,0}B$ любого ограниченного в E множества B и содержащееся в любом другом компактном множестве, обладающем таким же свойством притяжения.

Автономное уравнение

$$\partial_t^2 v + \epsilon \partial_t v = \Delta v - \tilde{f}(v) - g(x), \quad v|_{x \in \partial\Omega} = 0,$$

порождает в E полугруппу операторов $\{S_t, t \geq 0\}$ (см. [1]). Предположим, что $\{S_t\}$ имеет конечное число стационарных точек; пусть $y_i = (z_i, 0)$ — какая-либо из них. Обозначим через $M^H(y_i)$ совокупность всех точек $y \in E$, через которые проходят траектории $S_t y_0$, продолжаемые для всех $t \leq 0$ и удовлетворяющие условию: $S_t y_0 \rightarrow y_i$ в E при $t \rightarrow -\infty$. Пусть $M = \bigcup_i M^H(y_i)$.

Теорема. Семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}\}$, отвечающее уравнению (1), имеет максимальный аттрактор $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M} \subset \bigcup_i M^H(z_i)$ и $S_t \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \quad \forall t \geq 0$.

Литература

1. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений*. М.: Наука, 1989. 294 с.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

ilnur_garipov@mail.ru, mavly72@mail.ru

В настоящее время активно изучаются задачи с интегральными условиями. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения была рассмотрена в работе [1]. Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя и с нелокаль-