

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»
(ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА)

УДК 517.587+512.622.63+512.622.26
Рег. № 20231184

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе,
д-р.пед.н., профессор
_____ Е.Я. Аршанский
« ____ » _____ 2025 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ КОНСТРУИРОВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ
ПОЛИНОМОВ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ И СИМВОЛЬНОГО
РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(заключительный)

договор с БРФФИ № Ф23М-003 от 02.05.2023 г.

Руководитель НИР,
старший преподаватель кафедры
инженерной физики

_____ М.М. Чернявский
« ____ » _____ 2025 г.

Витебск 2025

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
старший преподаватель кафедры
инженерной физики

_____ М.М. Чернявский
(введение, разделы 1,
2, 3.1, 5, 7 заключение)

Исполнители темы
стажёр младшего научного сотрудника
НИСа ВГУ имени П.М. Машерова

_____ Н.С. Грицкевич
(введение,
разделы 3.2, 4)

магистрант факультета математики
и информационных технологий

_____ Д.А. Китаров
(разделы 2, 3.2, 4, 6)

Нормоконтроль

_____ Т.В. Харкевич

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

РЕФЕРАТ

Отчет 56 с., 1 кн., 23 источн., 2 рис.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ, КРАТНЫЙ КОРЕНЬ, РЕЗУЛЬТАНТ, МЕТОД БЕРНУЛЛИ, КОМПОЗИЦИЯ ПОЛИНОМОВ

Объектом исследования являются аппроксимация функций комплексного аргумента экстремальными полиномами и алгоритмы нахождения решений алгебраических уравнений. Предметы исследования – метод построения экстремальных в чебышевской метрике полиномов, основанный на субдифференциальных конструкциях, и современные алгоритмы точного и приближенного решения алгебраических уравнений.

Цель работы – получение явного вида выражений экстремальных полиномов фиксированной степени для некоторых областей комплексной плоскости, а также развитие теории символьного решения алгебраических уравнений.

Получен явный вид экстремальных полиномов десятой и одиннадцатой степеней, наименее уклоняющихся от нуля на квадрате комплексной плоскости с центром в нуле.

Развит метод вычисления общего кратного корня двух полиномов и построения точных формул, выражающих значение кратного корня полинома в виде рациональной функции от коэффициентов.

Доказана аналитическая связь между структурами определителей Адамара, составленных из коэффициентов рядов Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$, и Вандермонда, составленных из корней полинома $P(z)$, что позволило разработать новый приближенный метод вычисления корней полинома, не требующий предварительной локализации корней.

Исследованы все случаи представления полиномов десятой и двенадцатой степеней в виде композиции полиномов меньших степеней, а также полиномы шестой степени, корни которых линейно связаны с корнями полиномов меньших степеней.

Результаты работы представляют интерес для специалистов в области прикладной математики, имеют как теоретическое, так и практическое значение; внедрены в учебный процесс кафедры математики и кафедры инженерной физики ВГУ имени П.М. Машерова.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Экстремальные в чебышевской метрике полиномы высоких степеней, заданные на квадрате комплексной плоскости.....	9
1.1 Построение полиномов десятой и одиннадцатой степеней, наименее уклоняющихся от нуля на квадрате комплексной плоскости.....	9
1.2 Исследование возможности построения экстремальных полиномов двенадцатой и тринадцатой степеней.....	14
2 Разработка метода типа Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена нахождения корней полиномов.....	17
3 Исследование структур частных производных от некоторых результатов многочленов.....	25
3.1 Случай наличия одного кратного корня кратности k	26
3.2 Вычисление корня кратности три при наличии других корней меньшей кратности.....	31
4 Исследование алгебраических полиномов высоких степеней, являющихся композициями полиномов меньших степеней.....	35
5 Построение экстремальных полиномов на прямоугольнике комплексной плоскости, являющихся аналогами полиномов Чебышева первого и второго рода.....	43
6 Аналитическое исследование полиномов шестой степени, корни которых представимы в виде линейной комбинации корней полиномов меньших степеней.....	47
7 Перспективы дальнейшего развития и практического использования полученных результатов.....	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	53
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	Ошибка! Закладка не определена.
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	Ошибка! Закладка не определена.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 512 с.
2. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М. : Астропресс-XXI, 2002. – 256 с.
3. Трубников, Ю.В. О численно-аналитическом методе построения экстремальных полиномов комплексного аргумента / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 18–36. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-18-36>
4. Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические заметки. – 2024. – Т. 116, вып. 1. – С. 91–108. <https://doi.org/10.4213/mzm14296>.
5. Лебедев, А.В. О методе Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена вычисления корней полиномов / А.В. Лебедев, Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 5. – С. 359–365. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-5-359-365>
6. Трубников, Ю.В. О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области / Ю.В. Трубников // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 2. – С. 45–56.
7. Чернявский, М.М. О численном методе нахождения экстремального полинома седьмой степени, определенного на квадрате комплексной плоскости / М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 74-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февр. 2022 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – С. 50–52.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

8. Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечных : в 2 т. / Л. Эйлер ; пер. с лат. Е.Л. Пацановского. – 2-е изд. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – Т. 1. – 315 с.

9. Чернявский, М.М. Актуальные алгоритмы построения точных формул для кратных корней полиномов / М.М. Чернявский // Второй Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования Республики Беларусь : сб. науч. тр. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В.М. Пашкевич (общ. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 202–203.

10. Грицкевич, Н.С. Исследование границ применимости рациональных формул для вычисления корня кратности 3 полинома произвольной степени / Н.С. Грицкевич, Д.А. Китаров // XVII Машеровские чтения : матер. Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 20 окт. 2023 г. : в 2 т. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2023. – Т. 1. – С. 10–12.

11. Лебедев, А.В. Дифференцирование результатов и общие кратные корни полиномов / А.В. Лебедев, Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 4. – С. 282–287. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-4-282-287>

12. Чернявский, М.М. Рациональные выражения для кратных корней полиномов / М.М. Чернявский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 2. – С. (в печати).

13. Chernyavsky, M.M. Differentiation of resultants and common roots of pairs of polynomials [Electronic resource] / M.M. Chernyavsky, A.V. Lebedev, Yu.V. Trubnikov // arXiv > math > arXiv:2404.08550. – 2024. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/2404.08550>. – Date of access: 02.03.2025.

14. Трубников, Ю. В. Сравнение и развитие современных подходов к получению рациональных формул для кратных корней полиномов [Электронный ресурс] / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Наука –

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

образованию, производству, экономике : материалы 76-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 1 марта 2024 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – С. 50–53. – Режим доступа: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/42299>. – Дата доступа: 25.03.2024.

15. Трубников, Ю. В. О получении рациональных формул для кратных корней полиномов без использования конструкций результатов [Электронный ресурс] / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов XI Междунар. науч. конф., посвящ. памяти В.А. Романькова, Омск, 15 марта 2024 г. / отв. за вып. И. П. Бесценный. – Омск : Изд-во Омского государственного университета, 2024. – С. 30–32. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

16. Чернявский, М.М. Актуальные алгоритмы построения точных формул для кратных корней полиномов / М.М. Чернявский // Второй Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования Республики Беларусь : сб. науч. тр. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В.М. Пашкевич (общ. ред.) [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 202–203.

17. Чернявский, М. М. Производные результатов и общие кратные корни пар полиномов / М. М. Чернявский // XIV Белорусская математическая конференция, посвящ. 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. – Минск : Беларуская навука, 2024. – Ч. 1. – С. 37–39.

18. Прасолов, В.В. Многочлены. / В.В. Прасолов. – 4-е изд., испр. – М. : МЦНМО, 2014. – 336 с.

19. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры : учебник / А.Г. Курош. – 19-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2013. – 432 с.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

20. Gelfand, I.M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants / I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky. – Boston : Birkhäuser, 1994. – 528 p.

21. Чернявский, М.М. Условия декомпозиции полинома двенадцатой степени на полиномы четвертой и третьей степеней / М.М. Чернявский, Д.А. Китаров // XVIII Машеровские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 25 окт. 2024 г. : в 2 т. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – Т. 1. – С. 60–62.

22. Трубников, Ю.В. О представимости полинома двенадцатой степени в виде композиции трех полиномов меньших степеней / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 77-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 28 февр. 2025 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2025. – С. 49–51.

23. Чернявский, М.М. Анализ корней триномиальных полиномов / М.М. Чернявский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 4. – С. 280–294. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-4-280-294>