

22.1
И19

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

ИВАНИШКО
Ия Александровна

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ,
СВЯЗАННЫЕ С ЛОКАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ,
НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ.
ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

УДК 517.5
И19
И19

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — математический анализ



Минск, 2010

22.161.06.034
И 19

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель — **Кротов Вениамин Григорьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математических
методов теории управления
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Антоневич Анатолий Борисович**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры функционального анализа
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета.

Кореновский Анатолий Александрович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
механико-математического факультета
Одесского национального университета
имени И.И.Мечникова;



Опонирующая организация — Учреждение образования "Гомельский
государственный университет имени
Франциска Скорины".

Защита состоится 11 июня 2010 г. в 12.00 часов на заседании совета
по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном
университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8
(юридический факультет), ауд. 407, тел. (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке
Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан " 3 " мая 2010 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор

Н.В. Лазакович

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Возможность измерения гладкости функций и построения на этой основе их классификации имеет большое значение для многих разделов математики. Исторически первой и достаточно тонкой характеристикой гладкости был, по-видимому, модуль непрерывности функции, возникающий в количественном анализе свойства равномерной непрерывности. Впоследствии такие характеристики становились все разнообразнее и усложнялись. При построении шкал функциональных пространств в классическом случае евклидова пространства использовались такие специфические конструкции как алгебраические структуры на $\mathbb{R}^n$ (растяжения, сдвиги), полиномы, средства гармонического анализа (преобразование Фурье, спектральные разложения), обобщенные производные Соболева-Шварца.

Последние два десятилетия активно развивается анализ на общих метрических пространствах с мерой. В ситуации, когда заданы лишь метрика и мера, все вышеперечисленные средства уже недоступны и возникает задача нахождения новых способов классификации функций по их гладкости.

В современном анализе большое внимание уделяется шкале пространств L^p , в терминах которой чаще всего и требуется определять гладкость.

Исторически первым результатом, который давал возможность определять гладкость в терминах пространств L^p на любом метрическом пространстве с мерой, явилась работа А.Кальдерона (1972), в которой пространства Соболева первого порядка $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ были охарактеризованы в терминах некоторых максимальных функций. Следующий важный шаг был сделан К.И.Осколковым (1977), в неявном виде использовавшим более общие операторы для изучения задачи П.Л.Ульянова об оценках C -свойства Лузина на отрезке. В явном виде эти максимальные функции определил В.И.Коляда (1987) и в терминах этих операторов доказал теоремы вложения соболевского типа и изучил их связи с L^p -модулями непрерывности.

Развитию результатов этих работ и посвящена диссертация. Следуя В.И.Коляде, мы определим некоторое семейство максимальных операторов для функций, заданных на любом метрическом пространстве с мерой, и с их помощью введем шкалы пространств функций C_{θ}^p , которые дают полную классификацию всех L^p -функций. В основных результатах диссертации дано решение типичных для теории функциональных пространств задач — теорем вложения (описание множества классов из этой шкалы, которым принадлежит функция из заданного класса) и теорем компактности вложений.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2006–2010 годы "Математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе". Работа над диссертацией проводилась на кафедре математических методов теории управления в рамках следующих госбюджетных научно-исследовательских работ Белорусского государственного университета:

1. "Анализ функций и отображений на метрических пространствах и их обобщениях" (ГПФНИ "Математические модели" на 2006–2010 гг., номер гос. регистрации 20062220).
2. "Анализ на метрических пространствах с мерой" на 2005 г., номер гос. регистрации 2005879.

Цель и задачи исследования

Объектом исследования являются максимальные операторы Кальдерона-Коляды $\mathcal{N}_\eta$, контролирующие осцилляционные свойства функций. Предметом исследования являются определяемые с их помощью классы $C_\eta^p(X)$. Эти классы дают единственный в настоящее время способ измерения гладкости в терминах пространств $L^p(X)$ на любом метрическом пространстве с мерой.

Целью диссертационной работы является исследование следующей общей проблемы: какими свойствами обладают функции из классов $C_\eta^p(X)$ и каково взаимоотношение между классами с различными параметрами.

Основные задачи диссертации состоят в следующем:

1. Изучение свойств максимального оператора $\mathcal{N}_\eta$ и функций из классов $C_\eta^p(X)$.
2. Нахождение условий для вложений соболевского типа для классов $C_\eta^p(X)$ и компактности этих вложений.

Положения, выносимые на защиту

1. Неравенства типа Соболева-Пуанкаре для средних колебаний функции в терминах максимальных функций Кальдерона-Коляды.
2. Необходимые и достаточные условия для вложения классов $C_\eta^p(X)$.
3. Необходимые и достаточные условия для компактности вложений классов $C_\eta^p(X)$.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Личный вклад соискателя

Диссертация представляет собой самостоятельное исследование соискателя. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместных работах научному руководителю принадлежат постановки задач и выбор методов их исследования.

Апробация результатов диссертации

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Семинар по математическому анализу Белгосуниверситета (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор В.Г.Кротов).

2. Международная конференция "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений", 4-9 сентября 2003 года, Минск.

3. 12-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения", 27 января-3 февраля 2004 года, Саратов.

4. VII республиканская научная конференция студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях", 22-24 марта 2004 года, Гомель.

5. European Mathematical Society Conference: Analysis on Metric Measure Spaces. Bedlewo, Poland July 15-23, 2004.

6. Международная школа-конференция по анализу и геометрии, посвященная 75-летию академика Ю.Г. Решетняка, 23 августа-2 сентября 2004 года, Новосибирск.

7. 9-я Белорусская математическая конференция, 3-6 ноября 2004 года, Гродно.

8. Воронежская зимняя математическая школа "Современные проблемы теории функций и смежные проблемы", 27 января — 2 февраля 2005 года, Воронеж.

9. Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная столетию академика С. М. Никольского, 23-29 мая 2005 года, Москва.

10. International workshop "Fractal Analysis", September 11-17, 2005. Eisenach, Germany.

11. Международная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики", 22-26 ноября 2005 года, Тула.

12. 13-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения", 27 января-3 февраля 2006 года, Саратов.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

13. International conference "Analysis and partial differential equations" in honor of Professor Bogdan Bojarski, June 19 – 23, 2006, Bedlewo, Poland.

14. International conference "Lars Ahlfors Centennial Celebration", August 20-24, 2007, Helsinki, Finland.

15. 14-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения", 28 января – 4 февраля 2008 года, Саратов.

16. 5-й международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения" Абрау-Дюро, 29 мая–3 июня 2008 года, Ростов-на-Дону.

17. International Workshop "Function Spaces and Applications", July 6–12, 2008, Freyburg/Unstrut, Germany.

18. The 7th international conference "Function spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis (FSDONA)", August 25–29, 2008, Helsinki, Finland.

19. 10-я Белорусская математическая конференция, 3–7 ноября 2008 года, Минск.

20. International conference "Harmonic analysis and approximations, IV" dedicated to 80th anniversary of academician Alexander Talalian, September 19–26, 2008, Tsaghkadzor, Armenia.

21. Международная математическая конференция "Актуальные проблемы анализа", 1–7 апреля 2009 года, Гродно.

22. 9-я международная Казанская летняя научная школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", 1–7 июля 2009 года, Казань.

23. Seminar "Functional Spaces", December 11, 2009, Jena, Germany.

24. 15-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения", 27 января–3 февраля 2010 года, Саратов.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 22 научных работах, из которых 4 — статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 3.46 авторского листа) и 18 тезисов докладов конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики, трех глав, заключения и библиографического списка, содержащего 149 наименований, из которых 22 — собственные публикации соискателя. Полный объем диссертации составляет 110 страниц, из них 12 страниц занимает описание библиографических источников.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Первая глава содержит аналитический обзор литературы по теме исследования.

Во второй главе вводятся максимальные операторы N_η и S_η на произвольном метрическом пространстве X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения и изучаются их основные свойства. В терминах этих операторов доказываются поточечные оценки для уклонений средних Стеклова от значений функции, аналоги неравенств Соболева–Пуанкаре, Трудингера, Морри и свойство «самоудушения» неравенства Соболева–Пуанкаре. Результаты этой главы используются далее в главе 3 при доказательстве теорем вложения соболевского типа.

В третьей главе с помощью максимальных операторов N_η вводятся и изучаются классы Кальдерона–Коляды $C_\eta^p(X)$. В ней даются различные эквивалентные описания классов, показано, что они дают полную классификацию функций из $L^p(X)$ по свойству локальной гладкости. Основными результатами этой главы являются точные теоремы вложения для пространств $C_\eta^p(X)$, окончательные условия для компактности таких вложений. Аналогичные вопросы рассмотрены для вложений вида $C_\eta^p(X) \subset L^q(X)$.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 содержит аналитический обзор основных результатов, в которых изучались вопросы количественного измерения L^p -гладкости функции в случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и некоторые их обобщения на случай метрических пространств с мерой.

Глава 2 посвящена определению и изучению основных объектов диссертации — максимальных операторов N_η и S_η .

Пусть (X, d, μ) — ограниченное метрическое¹ пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ ,

$$B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$$

— шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $t > 0$. Для шара B через r_B обозначаем его радиус.

Всюду ниже предполагается выполненным условие удвоения²: найдется постоянная $a_\mu \geq 1$, такая, что

$$\mu B(x, R) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu B(x, r), \quad x \in X, \quad 0 < r \leq R. \quad (1)$$

¹На самом деле, в диссертации рассматривается более общий случай квазиметрических пространств.

²Всюду ниже через γ мы обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от a_μ из (1) и от параметров, определяющих рассматриваемые нами ниже пространства функций.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

ситуации евклидова пространства, так и в области анализа на неоднородных структурах, бедных алгебраическим содержанием, а также могут быть использованы при дальнейшем развитии теории функциональных пространств и в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу.

Результаты диссертации уже использовались в ряде работ, посвященных весовым оценкам шарп-максимальных функций, неравенствам типа Соболева–Пуанкаре, тонким свойствам функций из обобщенных соболевских пространств, оценкам интегрального модуля непрерывности для функций из класса C_{η}^p .

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Иванишко, И.А. Оценки максимальных функций Кальдерона–Коляды на пространствах однородного типа /И.А.Иванишко // Труды института математики НАН Беларуси. — 2004. — Т.12, №1. — С. 64–67.

2. Иванишко, И.А. Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко // Математические заметки. — 2005. — Т. 77, №6. — С. 937–940.

(переведена на английский язык: Mathematical Notes. — 2005. — Vol. 77, №. 6. — P. 865–869.)

3. Иванишко, И.А. Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах /И.А.Иванишко, В.Г.Крогов // Труды института математики НАН Беларуси. — 2006. — Т. 14, №1. — С. 51–61.

4. Иванишко, И.А. Компактность вложений соболевского типа на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко, В.Г.Крогов // Математические заметки — 2009. — Т.86, №6. — С. 829–844.

(переведена на английский язык: Mathematical Notes. — 2009. — Vol. 86, №6. — P. 775–788.)

Тезисы докладов

5. Иванишко, И.А. Неравенства для шарп-максимальных функций /И.А.Иванишко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов Международной конф., Минск, 4–9 сентября 2003 г. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: А.А. Килбас [и др.]. — Минск, 2003. — С. 77–78.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

6. Иванишко, И.А. Оценки максимальных функций Кальдерона-Коляды на пространствах однородного типа /И.А.Иванишко // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января–3 февраля 2004 г./ ООО Из-во "Научная книга"; редкол.: И.Л. Ульянов [и др.]. — Саратов, 2004. — С. 90–91.

7. Иванишко, И.А. Оценки максимальных функций Кальдерона-Коляды на пространствах однородного типа /И.А.Иванишко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исслед.: тезисы докладов республ. конф., Гомель, 22–24 марта 2004 г./ Гомельский гос. ун-т; редкол.: Д.Г. Лип [и др.]. — Гомель, 2004. — С. 156–157.

8. Ivanishko, I.A. Sobolev type spaces on spaces of homogeneous type : different descriptions and embedding theorems (in english) /I.A.Ivanishko // European Mathematical Society Conference: Analysis on Metric Measure Spaces. Bedlewo (Poland), July 15–July 23, 2004./ Stefan Banach International Mathematical Center. — Warsaw (Poland), 2004. — P. 14.

9. Иванишко, И.А. Эквивалентные описания пространств типа Хайлаша-Соболева на метрических пространствах /И.А.Иванишко // IX Белорусская математическая конференция: тезисы докладов Международной конф., Гродно, 3–6 ноября 2004 г.: в 3 ч. / Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы; ред. Н.П. Красникая. — Гродно, 2004. — Ч.1. — С. 28–29.

10. Иванишко, И.А. Обобщенное неравенство Пуанкаре-Соболева на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко, В.Г.Кротов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции, Воронеж, 27 января–2 февраля 2005 г. /Воронежский гос. ун-т; редкол.: Ю.В. Покорный [и др.]. — Воронеж, 2005. — С. 99–100.

11. Ivanishko, I.A. Generalized Poincaré-Sobolev Inequalities on Metric Measure Spaces (in english) /I.A.Ivanishko, V.G.Krotov // Function spaces, approximation theory, nonlinear analysis: International conference, dedicated to the centennial of S.M.Nikolskii. Moscow, Russia, May 23–29, 2005./Математический институт имени В.А.Стеклова РАН; редкол.: Б.С.Кашин [и др.]. —Москва, 2005. — P.299.

12. Иванишко, И.А. Теорема вложения соболевского типа на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко // Современные проблемы математики, механики, информатики: тезисы докладов Международной конф., Тула, 22–26 ноября 2005 г./ Тульский гос. ун-т; редкол.: В.И. Бердышев [и др.]. — Тула, 2005. — С. 95–96.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

13. Иванишко, И.А. Теоремы вложения соболевского типа на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января–3 февраля 2006 г./ ООО Из-во "Научная книга"; редкол.: П.Л. Ульянов [и др.]. — Саратов, 2006.— С. 72–73.

14. Иванишко, И.А. Неравенство типа Соболева–Пуанкаре на метрических пространствах в терминах шар-максимальных функций /И.А.Иванишко, Е.В.Игнатьева, В.Г.Кротов // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января–3 февраля 2006 г./ ООО Из-во "Научная книга"; редкол.: П.Л. Ульянов [и др.]. — Саратов, 2006. — С. 73–74.

15. Иванишко, И.А. Компактность вложений соболевского типа на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января–4 февраля 2008 г. / Из-во Саратовского университета; редкол.: Б.С. Кашин [и др.]. — Саратов, 2008. — С. 73–74.

16. Иванишко, И.А. Теорема типа Релиха–Кондрашова на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко // Ряды Фурье и их приложения: тезисы докладов 5 Международного симпозиума, Абрау-Дюрсо, Ростов-на-Дону, 29 мая – 3 июня 2008 г./ Из-во ЦВВР; редкол.: А.В. Белоконов, [и др.]. — Ростов-на-Дону, 2008. — С. 102.

17. Ivanishko, I.A. L^p -smoothness in terms of Calderón-Kolyada maximal functions: embeddings, weighted inequalities, compactness (in english) /I.A.Ivanishko, V.G.Krotov // Function Spaces and Applications: abstracts of International workshop. Freyburg/Unstrut, Germany, July 6–12, 2008./Friedrich-Schiller-Universität Jena (Germany). — Jena (Germany), 2008. — P. 12.

18. Иванишко, И.А. Теоремы компактности для вложений пространств соболевского типа на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко // X Белорусская математическая конференция: тезисы докладов Международной конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г.: в 3 ч. / Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы; ред. С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2008. — Ч.3.— С. 59–60.

19. Ivanishko, I.A. On compact embeddings of Sobolev's type spaces on metric spaces endowed with measure /I.A.Ivanishko // International Conference Harmonic Analysis and approximations, IV. Tsaghkadzor (Armenia) 19–26 september, 2008./ Armenian Mathematical Institute. — Tsaghkadzor (Armenia), 2008. — P. 53–54.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

20. Иванишко, И.А. Теоремы типа Реллиха–Кондрашова на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко, В.Г.Кротов // Актуальные проблемы математики: тезисы докладов Международной математической конференции, Гродно, 7–10 апреля 2009 г./ ООО Из-во "Научная книга"; редкол.: Я.В. Радыно [и др.]. — Гродно, 2009. — С. 76–78.

21. Иванишко, И.А. Компактность соболевских вложений на метрических пространствах с мерой /И.А.Иванишко, В.Г.Кротов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Девятой Международной Казанской летней научной школы-конференции, Казань, 1–7 июля 2009 г./ Казанское математическое общество; редкол.: Ф.Г. Афхадиев [и др.]. — Казань, 2009. — С. 135–136.

22. Иванишко, И.А. О компактности вложений $C^p_\eta(X) \subset C^q_\theta(X)$ на метрических пространствах с мерой./И.А.Иванишко, В.Г.Кротов // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 15-й Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января–4 февраля 2010 г. / Из-во Саратовского университета; редкол.: Б.С. Капин [и др.]. — Саратов, 2010. — С. 77–78.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

РЕЗЮМЕ

Иванишко Ия Александровна

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ЛОКАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ, НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Ключевые слова: метрическое пространство с мерой, пространство однородного типа, гладкость функции, шар-максимальный оператор, теоремы вложения соболевского типа, неравенство Пуанкаре–Соболева.

Объектом исследования в диссертации являются максимальные операторы Кальдерона–Коляды $\mathcal{N}_\eta$, контролирующие осцилляционные свойства функций, и определяемые с их помощью классы C_η^p . Эти классы дают единственный в настоящее время способ измерения гладкости в терминах пространств L^p на любом метрическом пространстве с мерой.

Целью диссертационной работы является исследование следующей общей проблемы: какими свойствами обладают функции из классов C_η^p и каково взаимоотношение между классами с различными параметрами.

В диссертации получены следующие новые результаты:

— показано, что классы C_η^p дают полную классификацию функций из L^p по локальной гладкости, для этих классов получены различные эквивалентные описания;

— доказаны неравенства типа Пуанкаре–Соболева для средних колебаний функции в терминах максимальных функций $\mathcal{N}_\eta$;

— получены необходимые и достаточные условия для вложения классов C_η^p , а также для компактности таких вложений.

Эти результаты справедливы при определенных соотношениях, связывающих основные параметры, которые являются в определенном смысле оптимальными и не допускают улучшения.

В диссертации используются современные методы метрической теории функций и функционального анализа, связанные с различными максимальными операторами и невозрастающими перестановками функции.

Результаты диссертации уже были использованы в ряде работ по теории функциональных пространств, они могут быть использованы также в научных исследованиях по анализу на метрических пространствах с мерой и по гармоническому анализу и при чтении специальных курсов по этим разделам современной математики.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

РЭЗЮМЭ

Іванішка Ія Аляксандраўна

КЛАСЫ ФУНКЦЫЙ, ЗВЯЗАНЫЯ З ЛАКАЛЬНАЙ ГЛАДКАСЦЮ, НА МЕТРЫЧНЫХ ПРАСТОРАХ З МЕРАЙ. ТЭАРЭМЫ ўКЛАДАННЯ

Ключавыя словы: метрычная прастора з мерай, прастора аднароднага тыпу, гладкасць функцыі, шарп-максімальны аператар, тэарэмы ўкладання соболеўскага тыпу, няроўнасць Пуанкарэ–Собалева.

Аб'ектам даследавання ў дысертацыі з'яўляюцца максімальныя аператары Кальдэрона–Каляды N_η , якія кантраліруюць асцыляцыйныя ўласцівасці функцый, і класы C_η^p , якія вызначаюцца з іх дапамогай. Гэтыя класы даюць адзіны на цяперашні час спосаб вымярэння гладкасці ў тэрмінах прастораў L^p на адвольнай метрычнай прасторы з мерай.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца даследаванне наступнай агульнай праблемы: якімі ўласцівасцямі валодаюць функцыі з класаў C_η^p і якія ўзасмаадносіны існуюць паміж класамі з рознымі параметрамі.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

— паказана, што класы C_η^p даюць поўную класіфікацыю функцый з L^p па лакальнай гладкасці, для гэтых класаў атрыманы розныя эквівалентныя апісанні;

— даказаны няроўнасці тыпу Пуанкарэ–Собалева для сярэдніх ваганняў функцыі ў тэрмінах максімальных функцый N_η ;

— атрыманы неабходныя і дастатковыя ўмовы для ўкладання класаў C_η^p , а таксама для кампактнасці такіх укладанняў.

Гэтыя вынікі маюць месца пры вызначаных суадносінах, што злучаюць асноўныя параметры, якія з'яўляюцца ў пэўным сэнсе аптымальнымі і не дапускаюць паліпшэння.

У дысертацыі выкарыстоўваюцца сучасныя метады метрычнай тэорыі функцый і функцыянальнага аналізу, звязаныя з рознымі максімальнымі аператарамі і неўзрастальнымі перастаноўкамі функцый.

Вынікі дысертацыі ўжо былі выкарыстаны ў шэрагу прац па тэорыі функцыянальных прастор, яны могуць быць выкарыстаны таксама ў навуковых даследаваннях па аналізе на метрычных прасторах з мерай і па гарманічным аналізе, а таксама пры чытанні спецыяльных курсаў па гэтых раздзелах сучаснай матэматыкі.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ SUMMARY

Ivanishko Iya

FUNCTIONAL CLASSES CONNECTED WITH LOCAL SMOOTHNESS ON METRIC MEASURE SPACES. EMBEDDING THEOREMS

Keywords: metric measure space, space of homogeneous type, smoothness of function, sharp-maximal operator, Sobolev type embedding theorems, Sobolev-Poincaré inequality.

The main objects of the development in the thesis are Calderón-Kolyada maximal operator N_η , that controls oscillational properties of functions, and corresponding functional classes C_η^p . Nowadays these classes give the only way to classify functions by their local smoothness in terms of L^p spaces on metric measure spaces.

The purpose of this thesis is to research the following problem: what properties possess functions in C_η^p and what is relationship between classes with different parameters.

The following results were obtained:

- — it was shown, that classes C_η^p give classification of all L^p -functions by their local smoothness, for these classes different equivalent descriptions were given;
- Sobolev-Poincaré inequalities in terms of maximal operators N_η were obtained;
- necessary and sufficient conditions for embeddings of classes C_η^p were proved and compactness of these embeddings.

These results hold under the certain conditions that connect the main parameters. It was proved that obtained results and conditions on the parameters are optimal in a certain sense and can not be improved.

Modern methods of metric theory of functions and functional analysis are used in the thesis. They are connected with different maximal operators and nonincreasing rearrangements of functions.

The results of the thesis were already used in some papers connected with functional spaces and can be used in research connected with metric measure spaces, harmonic analysis, and for lecture materials for specialized courses on one of the sections of modern mathematics — analysis on metric measure spaces.