

УДК 373.5.016:510.315

ФУНКЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ АЛГЕБРЫ В VII–XI КЛАССАХ

В.В. Устименко, Т.Б. Караулова, Т.А. Александрович
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»

Алгебраический компонент VII–XI классов строится по следующим содержательным линиям: числа и вычисления; выражения и их преобразования; уравнения и неравенства; функции. В связи с этим различные подходы к изучению функций определяются местом функционального материала в данной структуре курса алгебры. При освоении функций происходит формирование мировоззрения учащихся, а также реализация межпредметных связей с другими учебными дисциплинами.

Цель исследования – выявить возможности формирования функциональной грамотности при изучении алгебры в VII–XI классах в учреждениях общего среднего образования.

Материал и методы. Дидактический материал разработан авторами для экспериментального применения в профильных классах на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей», а также на занятиях по частной методике преподавания со студентами факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова. При этом использованы эмпирические и логические методы исследования.

Результаты и их обсуждение. Обучающий материал сформирован с помощью учебников и учебных пособий по алгебре разных лет издания, учебно-методической литературы по методике преподавания математики, авторского подхода к изучению темы «Функции». Выявлено содержание данной темы и его распределение по классам. Приведенные примеры преобразования графиков элементарных функций дают возможность достичь высокого уровня функциональной грамотности учащихся, способствуют выработке таких приемов мыслительной деятельности, как сравнение, аналогия, анализ, синтез, индукция, дедукция, конкретизация, обобщение.

Переход от графика простой функции к более сложной можно рассматривать в контексте технологии укрупнения дидактических единиц, показывающей связи между различными формулами, которые задают сложные функции, и позволяющей относительно быстро строить их графики, а по ним изучать свойства.

Заключение. Своевременное использование теории и практики преобразования графиков функций на уроках и факультативных занятиях по математике будет положительно влиять на формирование познавательных интересов и развитие творческих способностей обучаемых.

Ключевые слова: функции, преобразования графиков функции, обучающий материал.

FUNCTIONS IN STUDYING 7th–9th YEAR ALGEBRA

V.V. Ustimenko, T.B. Karaulova, T.A. Aleksandrovich
Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

The algebra component for grades VII–XI is structured along the following thematic lines: numbers and calculations; expressions and their transformations; equations and inequalities; functions. In this context, different approaches to studying functions are determined by the place of functional material in this structure of the algebra course. Studying functions helps shape student's worldview and also facilitates interdisciplinary connections with other academic subjects.

The purpose of the study is to identify the possibilities for developing functional literacy while studying algebra in the 7th–9th years of secondary school.

Material and methods. The didactic material was developed by the authors for experimental use in pre-profile classes on the basis of the State Education Establishment “V.Z. Horuzhaya Secondary School No. 31 of Vitebsk” as well as in private teaching methodology classes with students of the Faculty of Mathematics and Information Technologies at Vitebsk State P.M. Masherov University. Empirical and logical research methods were used.

Findings and their discussion. The academic material was developed using algebra textbooks and manuals from different years of publication, educational and methodological literature on the methodology of teaching mathematics, and the authors' approach to studying the topic of Functions. The content of this topic and its distribution by years have been identified. The provided examples of transforming graphs of elementary functions allow students to achieve a high level of functional literacy and contribute

to the development of such cognitive skills as comparison, analogy, analysis, synthesis, induction, deduction, concretization, and generalization.

The transition from the graph of a simple function to a more complex one can be considered in the context of the technology of enlarging didactic units, showing the connections between various formulas that define complex functions, allowing relatively quick construction of their graphs and studying their properties through them.

Conclusion. Timely use of the theory and practice of transforming function graphs in lessons and extracurricular mathematics classes will positively influence the formation of students cognitive interests and the development of their creative abilities.

Key words: functions, transformations of function graphs, teaching material.

Алгебраический компонент VII–XI классов строится по следующим содержательным линиям: числа и вычисления; выражения и их преобразования; уравнения и неравенства; функции. В связи с этим различные подходы к изучению функций определяются местом функционального материала в данной структуре курса алгебры. Учащихся необходимо ознакомить с такими общефункциональными понятиями, как способы задания функции, график, область определения (значения), нули, промежутки знакопостоянства функции, убывающая, возрастающая, четная, нечетная, периодическая функции, наибольшее и наименьшее значение функции.

Возможны два варианта включения функций в учебный материал:

1) раннее внедрение функций, которое значительно опережает изучение тождественных преобразований выражений, уравнений и неравенств, приводящее к снижению уровня строгости в обосновании свойств функций, преобладанию наглядно-геометрических методов исследования;

2) позднее внедрение общефункциональных понятий, которое делает изучение конкретных функций менее систематичным и определенным.

Целесообразно искать нечто среднее. При этом особую роль играет построение графика функции, которое можно осуществить следующими способами:

а) по точкам, составив таблицу значений x и y ;

б) как результат исследования функции аналитическими методами;

в) как результат преобразований графика простой функции к более сложной.

Вместе с тем необходимо формировать умение читать графики функций, то есть переводить с графического языка на аналитический и обратно, с аналитического языка на графический.

Кроме того, при изучении функций происходит становление мировоззрения учащихся, а также реализация межпредметных связей с другими учебными дисциплинами. Так, например, язык функций широко используется для описания результатов опытов, экспериментов.

Цель исследования – выявить возможности формирования функциональной грамотности при изучении алгебры в VII–XI классах средней школы.

Материал и методы. Обучающий материал сформирован с помощью учебников и учебных пособий по алгебре разных лет издания, учебно-методической литературы по методике преподавания математики, авторского подхода к изучению данной темы, использован в учебном процессе профильных математических классов на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей», а также на занятиях по частной методике преподавания со студентами факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова.

Для достижения поставленной цели применялись эмпирические и логические методы исследования.

Результаты и их обсуждение. Установлено изучение функций по следующей схеме:

1) рассмотреть целесообразно подобранную задачу, с помощью которой мотивируется изучение новой функции;

2) сформулировать определение функции на основе математизации конкретного материала;

3) составить таблицу значений функции и построить «по точкам» ее график (провести аналитическое исследование свойств функции);

4) провести исследование основных свойств функции по графику (построить по результатам исследования график функции);

5) разобрать упражнения на применение изученных свойств функции.

Выявлено содержание темы «Функции» и его распределение по классам. Результаты данного анализа представлены в виде табл.:

Таблица

Формирование знаний о функциях при изучении алгебры

	7 класс			8 класс				9 класс			10 класс			11 класс		
	$y = f(x)$	$y = kx + b$	$y = ax^2 + bx + c$ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ $y = a(x - m)^2 + n$	$y = \frac{k}{x}$	$y = x^3$	$y = x $	$y = \sqrt{x}$	$y = f(x)$	$y = \sin x$ $y = \cos x$	$y = \lg x$ $y = \operatorname{ctg} x$	$y = \sqrt[n]{x}$	$y = x^n$	$y = a^x$	$y = \log_2 x$		
Определение	+	+	+	+				+	+	+		+	+		+	+
Табличный способ	+							+								
Графический	+							+								
Аналитический	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Словесный																
$D(f), E(f)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Нули функции	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f(x) > 0$, $f(x) < 0$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
График	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Наибольшее и наименьшее значение			+						+		+					
Монотонность			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Четность, нечетность								+	+	+	+	+	+	+	+	+
Периодичность									+	+	+	+	+	+	+	+
$y = f(x) \pm b$			3,34					+	+	+	+	+	+	+	+	+
$y = f(x \pm a)$			3,34					+	+	+	+	+	+	+	+	+
$y = -f(x)$			3,27	4,25				+	+	+	+	+	+	+	+	+
$y = f(-x)$																
$y = Bf(x)$			3,27	4,25												
$y = f(kx)$																
$y = f(x) $																
$y = f(x)$																
				4,26												

Рассмотрим теоретические основы преобразования графиков функций.

Использование графика функции $y = g(x)$ для получения графика функции $y = -g(x)$.

Возьмем на графике функции $y = g(x)$ точку $K(x_0; y_0)$, а также симметричную ей точку $K_1(x_0; -y_0)$ относительно оси абсцисс. Поэтому выполняется равенство $-y_0 = -g(x)$. Следовательно, точка $K_1(x_0; -y_0)$ лежит на графике функции $y = -g(x)$. Так как у функций $y = g(x)$ и $y = -g(x)$ области определения совпадают, то можно сделать вывод, что график функции $y = -g(x)$ можно получить симметричным построением из графика функции $y = g(x)$ относительно оси абсцисс. Составим пары подобных элементарных функций, изучаемых в школьном курсе алгебры: $y = x^2$ и $y = -x^2$; $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$; $y = x^3$ и $y = -x^3$; $y = |x|$ и $y = -|x|$; $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$; $y = \sin x$ и $y = -\sin x$; $y = \cos x$ и $y = -\cos x$; $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -\operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -\operatorname{ctg} x$; $y = 2^x$ и $y = -2^x$; $y = \log_2 x$ и $y = -\log_2 x$.

Построим схематично графики некоторых пар функций (рис. 1):

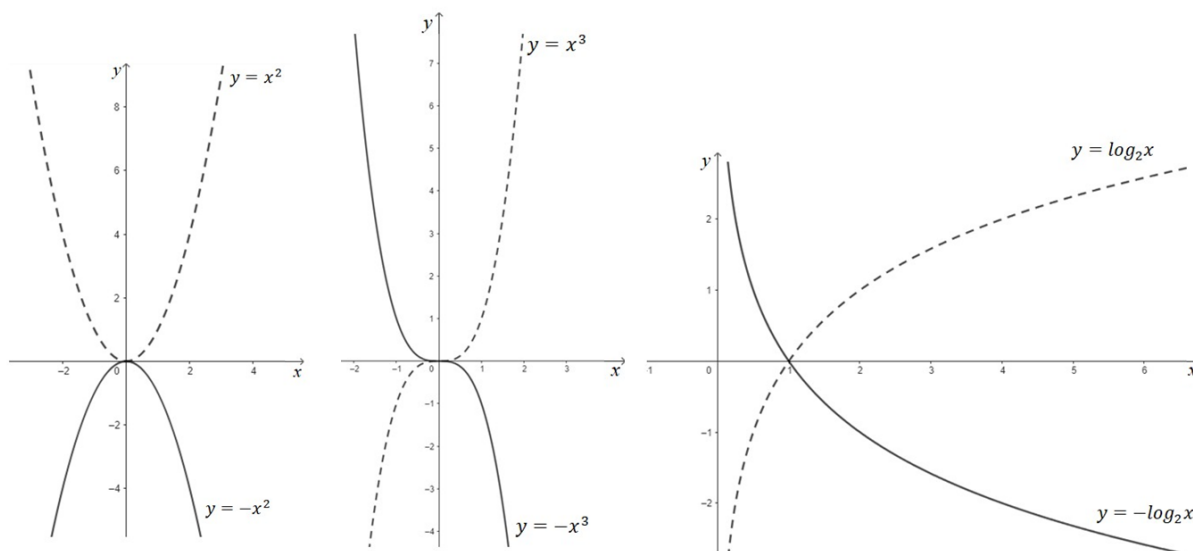


Рис. 1

Использование графика функции $y = g(x)$ для получения графика функции $y = g(-x)$.

Возьмем на графике функции $y = g(x)$ точку $K(x_0; y_0)$, а также симметричную ей точку $K_1(-x_0; y_0)$ относительно оси ординат. Поэтому выполняется равенство $y_0 = f(-(-x_0))$. Следовательно, точка $K_1(-x_0; y_0)$ лежит на графике функции $y = g(-x)$. Так как у функций $y = g(x)$ и $y = g(-x)$ области определения симметричны относительно точки $O(0; 0)$, то можно сделать вывод, что график функции $y = g(-x)$ можно получить симметричным построением из графика функции $y = g(x)$ относительно оси ординат.

Составим пары подобных элементарных функций, изучаемых в школьном курсе алгебры: $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{-x}$; $y = x^3$ и $y = (-x)^3$; $y = \sin x$ и $y = \sin(-x)$; $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$; $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$; $y = \log_2 x$ и $y = \log_2(-x)$.

Построим схематично графики функций $y = \sqrt{-x}$, $y = 2^{-x}$ и $y = \log_2(-x)$ (рис. 2).

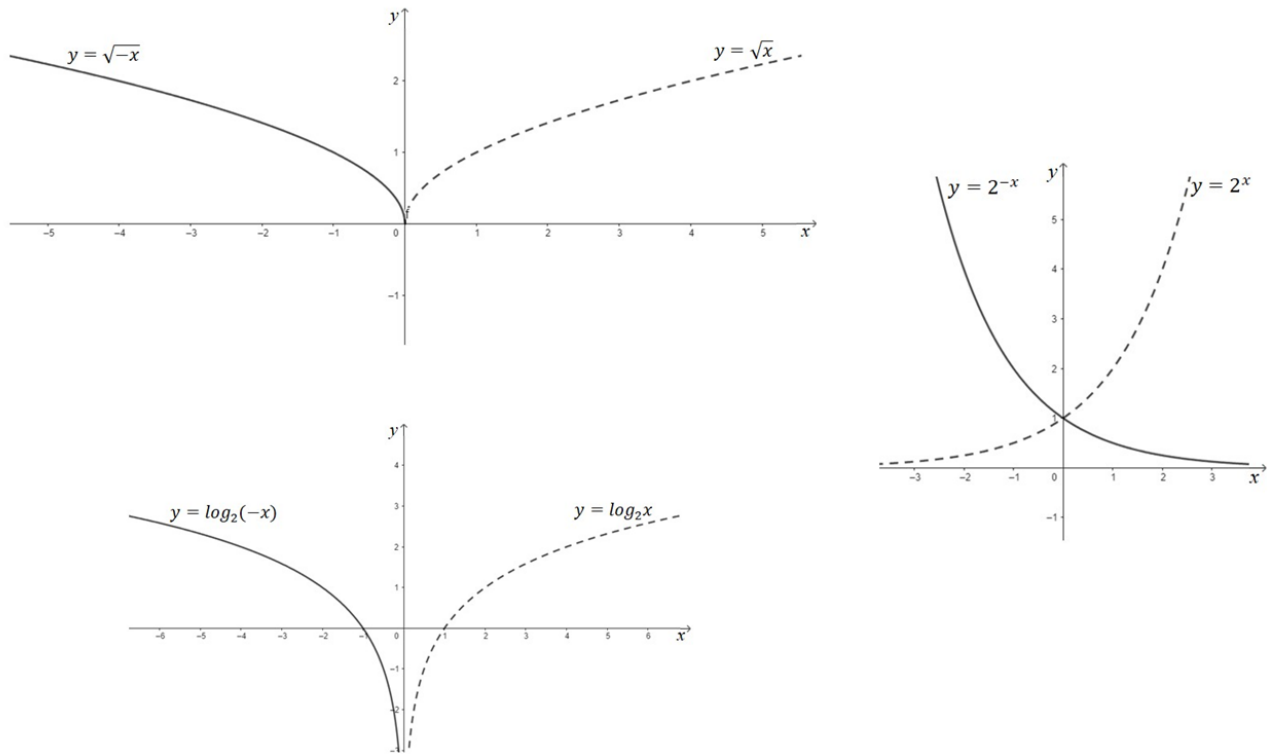


Рис. 2

З а м е ч а н и е. Для четных функций данный способ построения графика не работает, так как $y = (-x)^2 = x^2$; $y = |-x| = |x|$, $y = \cos(-x) = \cos x$.

Использование графика функции $y = g(x)$ для получения графика функции $y = Ag(x)$.

Возьмем на графике функции $y = g(x)$ точку $K(x_0; y_0)$. Это означает, что $y_0 = g(x_0)$. Выберем точку $K_1(x_0; Ay_0)$, координаты которой преобразуют условие $Ay_0 = Ag(x_0)$ в верное равенство. Следовательно, точка $K_1(x_0; Ay_0)$ лежит на графике функции $y = Ag(x)$.

Рассмотрим четыре возможных случая для числа A :

1. $A \in (1; +\infty)$. Тогда точка $K_1(x_0; Ay_0)$ получается из точки $K(x_0; y_0)$ увеличением ординаты точки K в A раз. Следовательно, график функции $y = Ag(x)$ вытекает из графика функции $y = g(x)$ растяжением в A раз вдоль оси ординат графика функции $y = g(x)$.

2. $A = 1$. Тогда $y = 1 \cdot g(x) = g(x)$. С графиком функции $y = g(x)$ ничего не происходит.

3. $A \in (0; 1)$. Так как $A = 1: \frac{1}{A}$, то точка $K_1(x_0; Ay_0)$ получается из точки $K(x_0; y_0)$ уменьшением ординаты точки K в $\frac{1}{A}$ раз. Следовательно, график функции $y = Ag(x)$ получается из графика функции $y = g(x)$ сжатием в $\frac{1}{A}$ раз вдоль оси ординат графика функции $y = g(x)$.

4. $A \in (-\infty; 0)$. В этом случае $A = -|A|$ и построение графика функции $y = Ag(x)$ осуществляется за два шага:

а) построение графика функции $y = |A|g(x)$ по графику функции $y = g(x)$;

б) построение графика функции $y = -|A|g(x)$ по графику функции $y = |A|g(x)$.

Построим схематично графики функций $y = -2x^2$ и $y = 2\sin x$ (рис. 3).

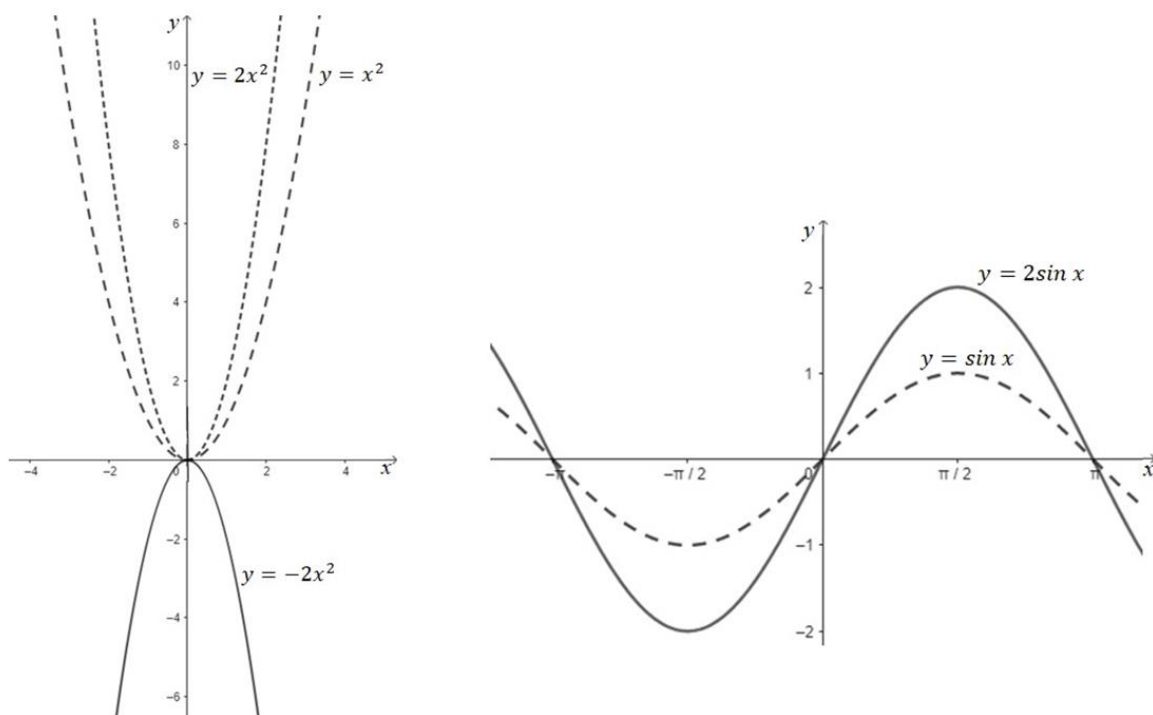


Рис. 3

Использование графика функции $y = g(x)$ для получения графика функции $y = g(mx)$.

Область определения функции $y = g(mx)$ состоит из тех x , для которых число $kx \in D(g(x))$. Возьмем на графике функции $y = g(x)$ точку $K(x_0; y_0)$. Это означает, что $y_0 = g(x_0)$. Выберем точку $K_1\left(\frac{1}{m}x_0; y_0\right)$, координаты которой преобразуют условие $y_0 = g\left(m \frac{x_0}{m}\right)$ в верное равенство. Следовательно, точка $K_1\left(\frac{1}{m}x_0; y_0\right)$ лежит на графике функции $y = g(mx)$. Рассмотрим четыре возможных случая для числа m :

1. $m \in (1; +\infty)$. Тогда точка $K_1\left(\frac{1}{m}x_0; y_0\right)$ получается из точки $K(x_0; y_0)$ уменьшением абсциссы точки K в m раз. Следовательно, график функции $y = g(mx)$ получается из графика функции $y = g(x)$ сжатием вдоль оси абсцисс графика функции $y = g(x)$.

2. $m = 1$. Тогда $y = g(1 \cdot x) = g(x)$. С графиком функции $y = g(x)$ ничего не происходит.

3. $m \in (0; 1)$. Так как точка $K_1\left(\frac{1}{m}x_0; y_0\right)$ получается из точки $K(x_0; y_0)$ увеличением абсциссы точки K в $\frac{1}{m}$ раз, то и график функции $y = g(mx)$ получается путем растяжения в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси абсцисс графика функции $y = g(x)$.

4. $m \in (-\infty; 0)$. В этом случае $m = -|m|$ и построение графика функции $y = g(mx)$ осуществляется за два действия:

а) построение графика функции $y = g(|m|x)$ по графику функции $y = g(x)$;

б) построение графика функции $y = g(-|m|x)$ по графику функции $y = g(|m|x)$.

Построим схематично графики функций $y = 2^{-2x}$ и $y = \log_2\left(-\frac{1}{3}x\right)$ (рис. 4).

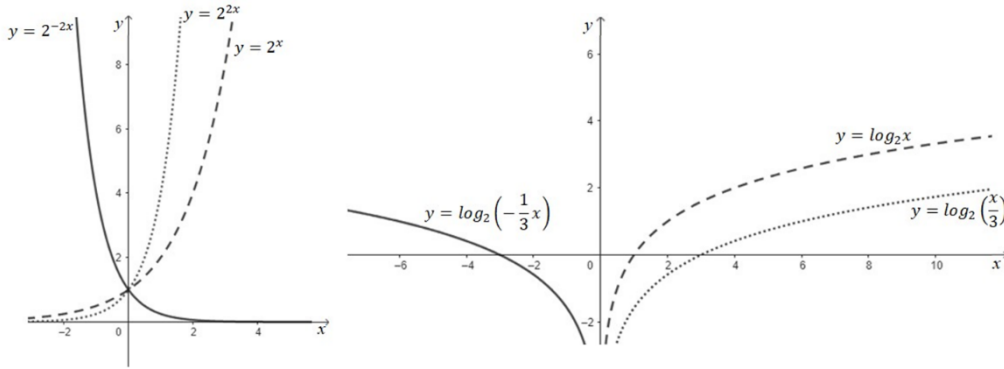


Рис. 4

Использование графика функции $y = g(x)$ для получения графиков функций $y = g(x - b)$ и $y = g(x) + b$ рассмотрено ранее [1].

Использование графика функции $y = g(x)$ для получения графика функции $y = |g(x)|$.

Возьмем на графике функции $y = g(x)$ точку $K(x_0; y_0)$. Это означает, что $y_0 = g(x_0)$.

Возможны два случая для y_0 :

1) если $y_0 \in [0; +\infty)$, то $|g(x_0)| = g(x_0) = y_0$ и точка $K(x_0; y_0)$ находится на графике функции $y = |f(x)|$. Следовательно, все точки графика $y = g(x)$, лежащие на оси абсцисс и выше ее, остаются на месте;

2) если $y_0 \in (-\infty; 0)$, то $|f(x_0)| = -f(x_0) = -y_0$ и точка $K_1(x_0; -y_0)$ принадлежит графику функции $y = |f(x)|$. Следовательно, все точки графика $y = f(x)$, лежащие ниже оси абсцисс, переходят в точки, симметричные относительно оси Ox .

Построим схематично графики функций $y = |x^2 - 1|$ и $y = |\log_2 x|$ (рис. 5).

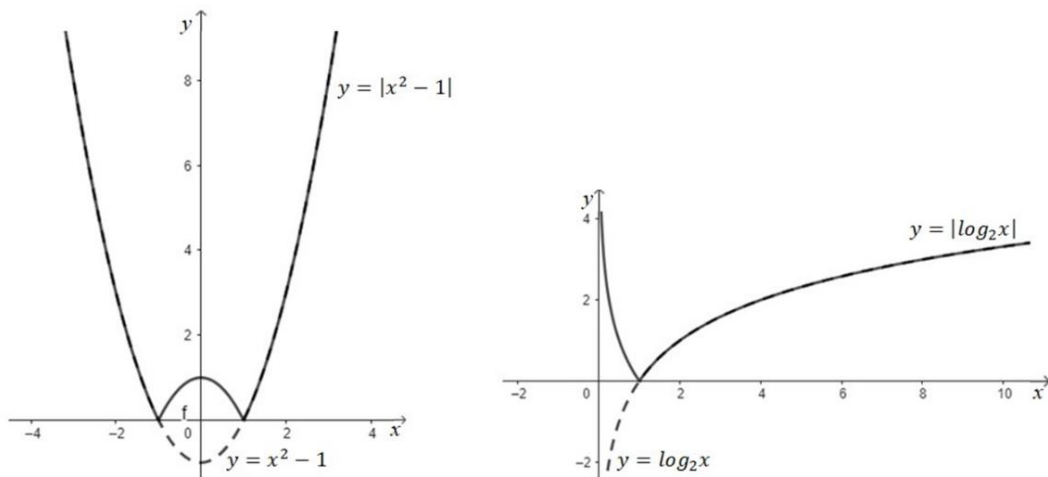


Рис. 5

Использование графика функции $y = g(x)$ для получения графика функции $y = g(|x|)$.

Область определения функции $y = g(|x|)$ симметрична относительно нуля и $g(-x) = g(|x|)$. Следовательно, функция $y = g(|x|)$ четная. Поэтому ее график симметричен относительно оси Oy , и его построение осуществляется в два этапа:

а) строим часть графика функции $y = g(x)$ для $x \geq 0$;

б) отображаем правую часть графика функции симметрично относительно оси ординат.

Построим схематично графики функций $y = 2^{|x|}$ и $y = \log_2 |x|$ (рис. 6).

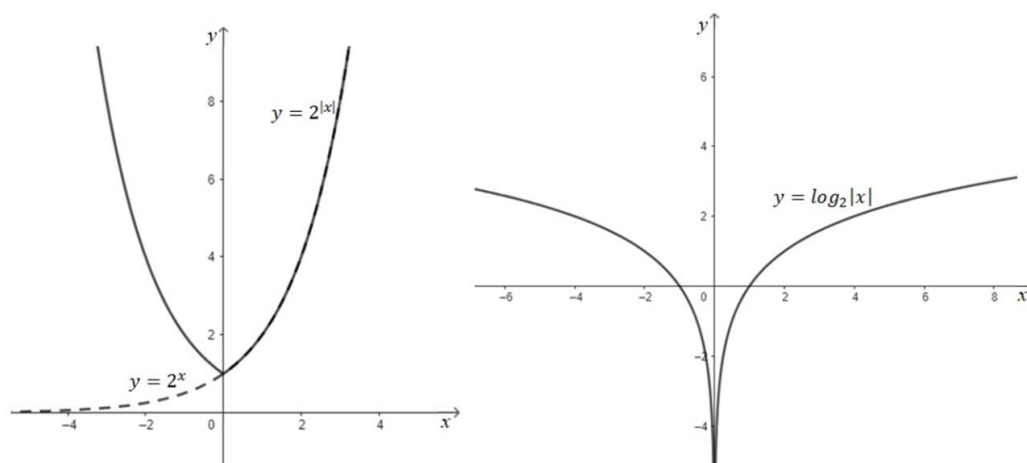


Рис. 6

Детальный анализ «старых» учебников алгебры показал, что изучение квадратичной функции начиналось с функции $y = ax^2$. Рассматривались подробно следующие случаи:

- а) $a=1$, тогда $y = x^2$;
- б) $0 < a < 1$, тогда, например, $y = \frac{1}{2}x^2$;
- в) $a > 1$, тогда, например, $y = 2x^2$;
- г) $a < 0$, тогда, например, $y = -2x^2$.

Далее изучались функции $y = ax^2 + k$, $y = a(x-m)^2$, $y = a(x-m)^2 + k$, их графики и свойства. Полученные при их рассмотрении выводы о преобразованиях графиков применимы к любым функциям.

Кроме того, в учебнике алгебры присутствовали соответствующие упражнения:

1) используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте графики функций $y = (x-2)^2 + 3$ и $y = -(x-3)^2 + 5$;

2) изобразите схематически графики функций $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ и $y = -4(x+2)^2 - 2$.

В ныне действующем учебном пособии по алгебре для восьмого класса подобная схема изучения квадратичной функции отсутствует полностью. Поэтому при дальнейшем изучении функций $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$ ни о каких преобразованиях графиков речь не идет. Первые сведения о преобразованиях графиков $y = f(x) \pm b$ и $y = f(x \pm a)$ появляются в учебном пособии по алгебре для девятого класса. В 10 и 11 классах данный список преобразований графиков не пополняется.

В нашем случае можно на основе графика функции $y = x^2$ путем соответствующей последовательности преобразований построить график функции $y = |2(x-3)^2 - 4|$:

- 1) $y = x^2$ и $y = 2x^2$;
- 2) $y = 2x^2$ и $y = 2(x-3)^2$;
- 3) $y = 2(x-3)^2$ и $y = 2(x-3)^2 - 4$;
- 4) $y = 2(x-3)^2 - 4$ и $y = |2(x-3)^2 - 4|$.

Рассмотрим построение графика функции $y = \left| 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) + 1 \right|$ при помощи следующей последовательности преобразований:

- 1) сжатием графика функции $y = \sin x$ в три раза вдоль оси Ox получаем график функции $y = \sin 3x$;
- 2) перемещением графика функции $y = \sin 3x$ вдоль оси Ox на отрезок длиной $\frac{\pi}{4}$ получаем график функции $y = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$;
- 3) растяжением графика $y = \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ в два раза вдоль оси Oy получаем график функции $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$;
- 4) перемещением графика функции $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ вдоль оси Oy на единицу вверх получаем график функции $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) + 1$;
- 5) отображением части графика функции $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) + 1$ ($y < 0$) симметрично относительно оси Ox получаем график функции $y = \left| 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) + 1 \right|$. На одном рисунке данные преобразования выглядят так (рис. 7):

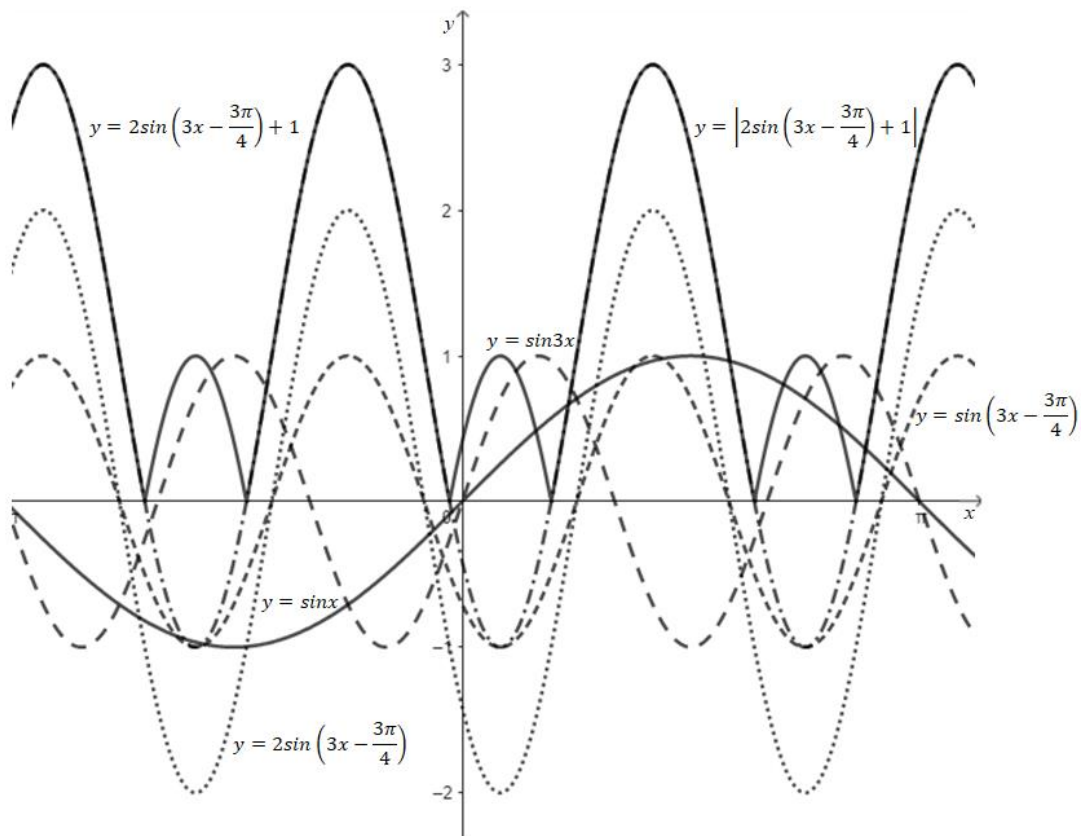


Рис. 7

З а м е ч а н и е. Целесообразнее показать данные преобразования графиков на пяти следующих рисунках:

- 1) $y = \sin x$ и $y = \sin 3x$ (рис. 8);
- 2) $y = \sin 3x$ и $y = \sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right)$ (рис. 9);
- 3) $y = \sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right)$ и $y = 2\sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right)$ (рис. 10);
- 4) $y = 2\sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right)$ и $y = 2\sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right) + 1$ (рис. 11);
- 5) $y = 2\sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right) + 1$ и $y = \left| 2\sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right) + 1 \right|$ (рис. 12).

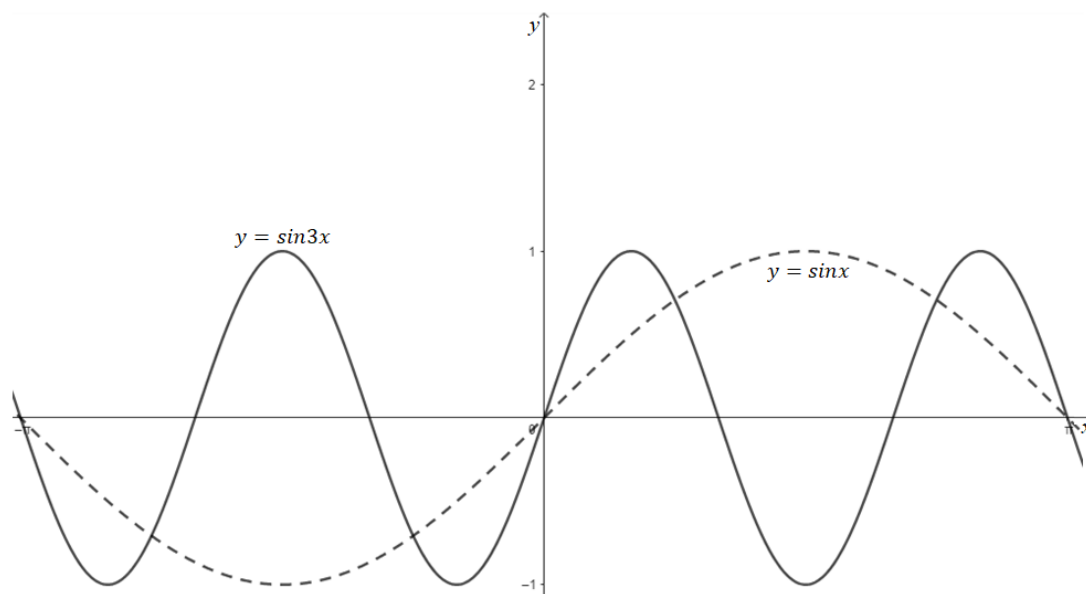


Рис. 8

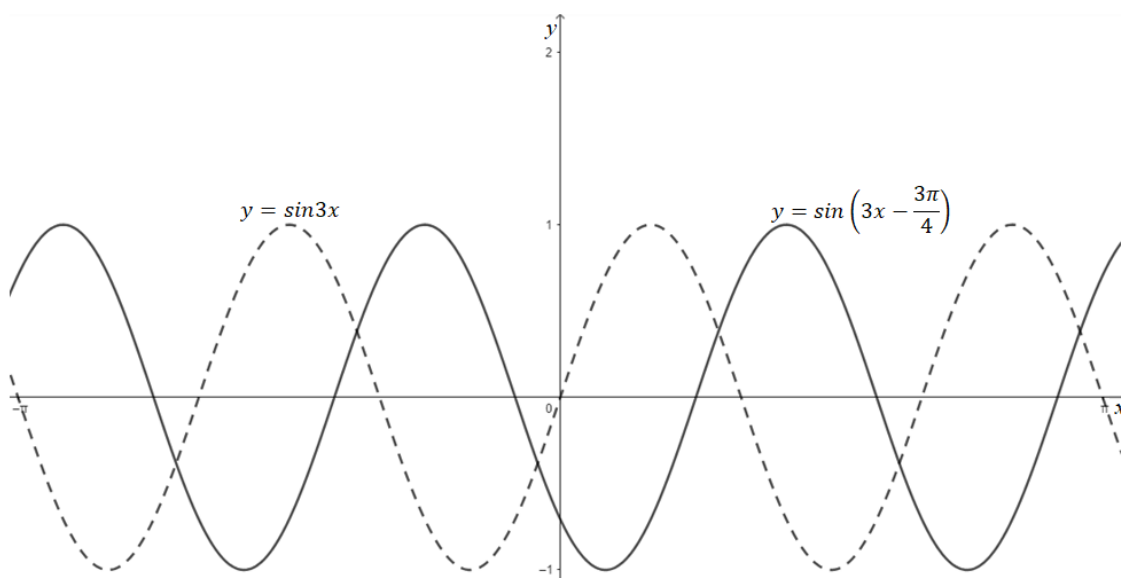


Рис. 9

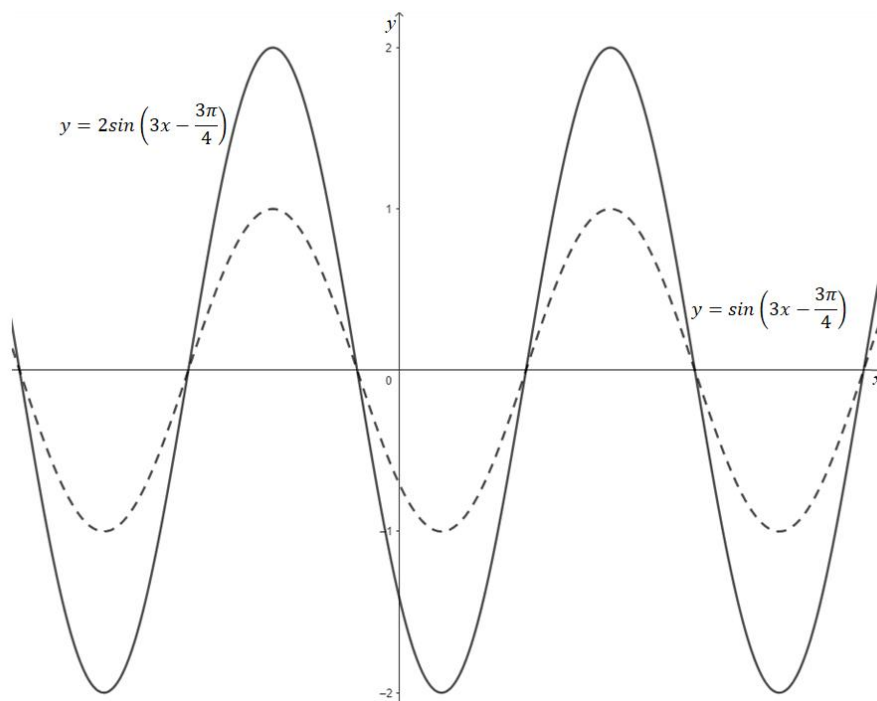


Рис. 10

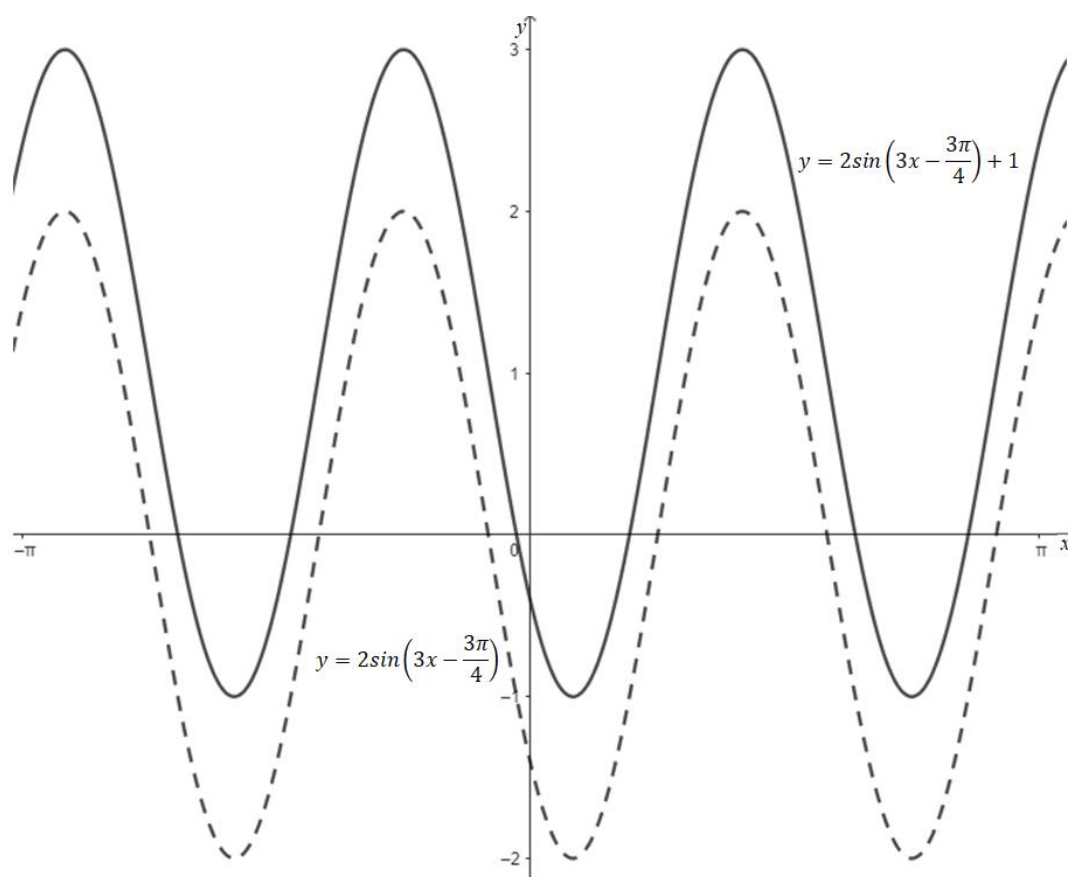


Рис. 11

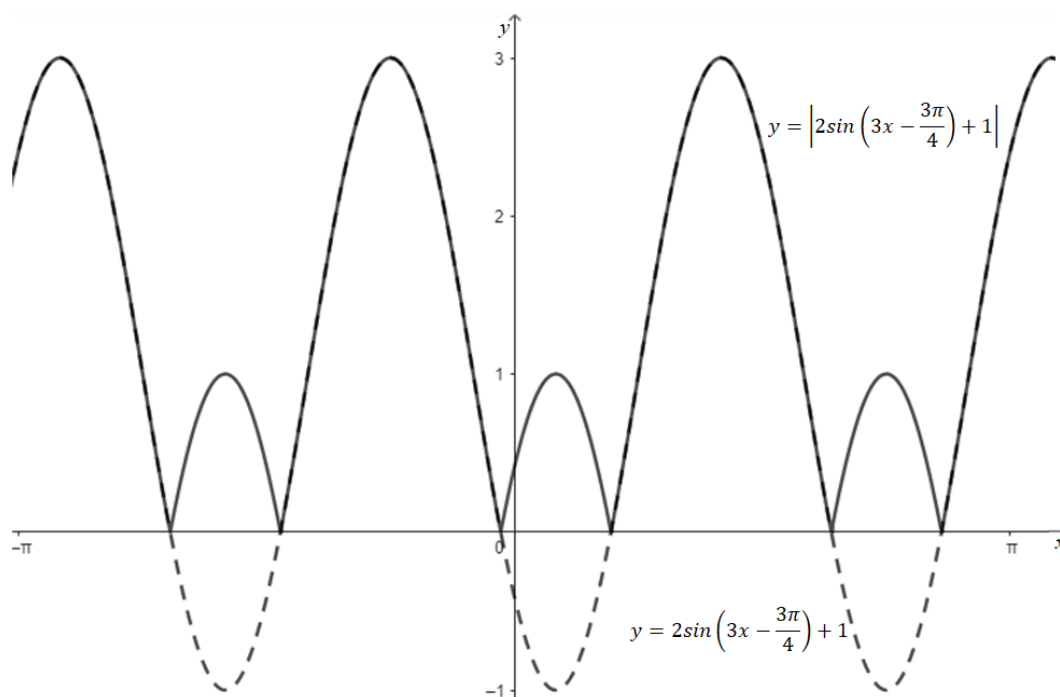


Рис. 12

Заключение. Приведенные выше примеры преобразования графиков элементарных функций, изучаемых в школьном курсе алгебры, дают возможность достичь высокого уровня функциональной грамотности учащихся, способствуют выработке таких приемов мыслительной деятельности, как сравнение, аналогия, анализ, синтез, индукция, дедукция, конкретизация, обобщение.

Переход от графика простой функции к более сложной можно рассматривать в контексте технологии укрупнения дидактических единиц [2], показывающей связи между различными формулами, которые задают сложные функции, и позволяющей относительно быстро строить их графики и по ним изучать свойства.

Кроме того, многие современные классы оснащены «умными досками», с помощью которых, на основе динамических математических приложений, наглядно осуществляется сжатие и растяжение основного графика вдоль осей абсцисс и ординат, перемещение вдоль оси абсцисс или оси ординат на заданный отрезок и др. Причем, это могут делать как учителя, так и сами учащиеся.

Таким образом, своевременное использование теории и практики преобразования графиков функций на уроках и факультативных занятиях по математике будет положительно влиять на формирование познавательных интересов и развитие творческих способностей обучаемых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устименко, В.В. Блочное обобщающее повторение темы «Функции» / В.В. Устименко, Т.А. Александрович, Т.Б. Караулова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2024. – № 4. – С. 49–54. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/45887>.
2. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: учеб. пособие / Г.К. Селевко. – Москва: Народное образование, 1998. – 256 с.

REFERENCES

1. Ustimenko V.V., Aleksandrovich T.A., Karaulova T.V. *Vesnik Vitsebskaga dziazhaunaga universiteta* [Bulletin of Vitsebsk State University], 2024, 4, pp. 49–54. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/45887>.
2. Selevko G.K. *Sovremennije obrazovatelniye tekhnologii: ucheb. posobiye* [Modern educational technologies: Textbook], Moscow: Narodnoye obrazovaniye, 1998, 256 p.

Поступила в редакцию 27.02.2025

Адрес для корреспонденции: e-mail: ustimenko2904@gmail.com – Устименко В.В.