УДК 517.983

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

С.А. Шлапаков
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В работе исследуется задача типа Коши для одного линейного дифференциального уравнения дробного порядка с дробной производной Адамара.

Цель статьи – построение аналитического решения поставленной дифференциальной задачи.

Материал и методы. *Рассматривается задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка. При этом используются методы функционального анализа и дробного исчисления.*

Результаты и их обсуждение. *В работе исследуется задача типа Коши для уравнения с дробной производной Адамара, приведено решение соответствующей однородной задачи, которое является составной частью общего решения исходной дифференциальной задачи.*

Заключение. *Результаты исследований согласуются с таковыми для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.*

Ключевые слова: *дробное интегрирование и дифференцирование Адамара, задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, пространство интегрируемых функций, пространство регулярных функций.*

ABOUT ONE LINEAR DIFFERENTIAL PROBLEM

S.A. Shlapakov
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

The article studies a Cauchy type problem for one linear differential equation of fractional order with the Hadamard fractional derivative.

The purpose of this study is to construct an analytical solution to the posed differential problem.

Material and methods. *A Cauchy-type problem for a linear differential equation of fractional order is considered. Methods of functional analysis and fractional calculus are used in the research process.*

Findings and their discussion. *The paper studies a Cauchy-type problem for an equation with a fractional Hadamard derivative, and provides a solution to the corresponding homogeneous problem, which is an integral part of the general solution to the original differential problem.*

Conclusion. *The results of the research are consistent with those for ordinary linear differential equations of the n-th order.*

Key words: *fractional integration and Hadamard differentiation, Cauchy-type problem for a fractional differential equation, Volterra integral equation of the second kind, space of integrable functions, space of regular functions.*

В теории и приложениях весьма широко используются различные модификации и обобщения классических операторов дробного интегродифференцирования. К таким модификациям относятся дробные интегралы и производные Адамара [1]. Важность изучения дифференциальных уравнений дробного порядка обусловлена их широким применением в теории дробного исчисления, а также в задачах химии, биологии, механики, физики, теории колебаний, теории упругости. В настоящей работе исследуется задача типа Коши, сформулированная для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с дробной производной Адамара. Естественно возникает проблема интегрирования такого уравнения с учетом начальных условий.

Цель статьи состоит в построении аналитического решения поставленной дифференциальной задачи.

Материал и методы. Материал – операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, которые используются как при формулировке дифференциальной задачи, подлежащей исследованию, так и при интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе применяется аппарат функционального анализа в сочетании с методами математического анализа и дробного исчисления.

Результаты и их обсуждение. В [2] рассматривалась задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида с дробной производной Адамара:

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f(x,y(x)),\ n-1<\alpha\le n,\ n\in N,\ a>0 \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k,\ k=1,2,\dots,n=-[-\alpha]. \tag{2}$$

Решение задачи (1)–(2) было построено в пространстве регулярных функций

$$L_{\delta}^{\alpha}(a,b)=\left\{y\in L(a,b)\ \middle|\ \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y\in L(a,b)\right\},\ 0<a<b<+\infty. \tag{3}$$

Левую часть в (2) следует понимать как предел в правосторонней окрестности $(a,a+\varepsilon),\varepsilon>0$ точки *a*:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(\mathcal{D}_{a+,\mu}^{\alpha-k}y\right)(x),\ k=1,2,\dots,n-1,\\
&\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x),\ \alpha\ne n,\\
&\left(\mathcal{D}_{a+,\mu}^{0}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}y(x),\ \alpha=n.
\end{aligned}$$

Заметим, что при натуральном значении $\alpha=n\in N$ задача (1)–(2) представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\delta^{n}y(x)=f(x,y(x)),\ \delta=x\frac{d}{dx},\\
&\lim_{x\to a+}\left(\delta^{n-k}y\right)(x)=b_k,\ b_k\in R,\ k=1,2,\dots,n.
\end{aligned}$$

Напомним, что дробное интегрирование и дифференцирование по Адамару порядка $\alpha>0$ определяется следующим образом [3]:

$$\left(\Im_{a+,\mu}^{\alpha}h\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{\alpha-1}h(t)\frac{dt}{t},\ \alpha>0,\ x>a\ge0,\ \mu\in R,$$

$$\left(\mathcal{D}_{a+,\mu}^{\alpha}h\right)(x)=x^{-\mu}\delta^{n}x^{\mu}\left(\Im_{a+,\mu}^{n-\alpha}h\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\quad \alpha>0,\quad n=[\alpha]+1,\ \mu\in R.$$

В случае $\mu=0$ формулы (4) и (5) принимают соответственно вид:

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha}h\right)(x)\equiv\left(\Im_{a+,0}^{\alpha}h\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}h(t)\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad x>a\ge0, \tag{4}$$

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}h\right)(x)\equiv\left(\mathcal{D}_{a+,0}^{\alpha}h\right)(x)=\delta^{n}\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}h\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\quad \alpha>0,\quad n=[\alpha]+1,$$

где

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}e^{-x}dx,\ \mathrm{Re}\,z>0 \text{ – гамма-функция.}$$

В работе [2] показана равносильность дифференциальной задачи (1)–(2) интегральному уравнению Вольтерра второго рода в пространстве (3):

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f(t,y(t))\frac{dt}{t},\ \ x>a. \tag{5}$$

Конкретизируем общий вид правой части в соотношении (1), положив $f(x,y(x))=p(x)y(x)+g(x)$. Тогда будем иметь

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=p(x)y(x)+g(x),\ n-1<\alpha\le n,\ n\in N,\ a>0. \tag{6}$$

При этом соотношение (5) преобразуется естественным образом:

$$y(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}p(t)y(t)\frac{dt}{t}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}g(t)\frac{dt}{t},\ x>a, \tag{7}$$

где

$$y_0(x)=\sum_{k=1}^n\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}. \tag{8}$$

Уравнение (7) эквивалентно линейной дифференциальной задаче (6)–(2) в пространстве (3). Условия существования и единственности решения этой дифференциальной задачи содержатся в утверждении [4]:

Теорема 1. *Пусть* $\alpha>0,\ n=-[-\alpha],\ g(x)\in L(a,b)$, *причем* $0<a<b<+\infty$. *Если к тому же функция* $p(x)$ *является ограниченной на отрезке* $[a,b]$, *то задача (6)–(2) имеет единственное решение в пространстве (3).*

Уравнение (7) достаточно общее. Естественным видится рассмотрение его частных случаев с целью построения обозримых решений. Положим в (6), например, $p(t)\equiv\theta\in R$:

$$y(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\theta y(t)\frac{dt}{t}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}g(t)\frac{dt}{t},\ x>a. \tag{9}$$

Уравнению (9) отвечает дифференциальная задача (1)–(2), где $f(x,y(x))=\theta y(x)+g(x)$. Если же в соотношении (6) положить $p(t)\equiv\theta\in R,\ g(t)=0$, то приходим к интегральному уравнению, эквивалентному задаче (1)–(2) с правой частью $f(x,y(x))=\theta y(x)$. Решая соответствующее уравнение

$$y(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\theta y(t)\frac{dt}{t}=y_0(x)+\theta\left(\Im_{a+}^{\alpha}y\right)(x),\ \alpha>0$$

методом последовательных приближений

$$y_i(x)=y_0(x)+\theta\left(\Im_{a+}^{\alpha}y_{i-1}\right)(x),\ (i=1,2,\ldots), \tag{10}$$

где $y_0(x)$ определено в (8), приходим к общей формуле [5]:

$$y_i(x)=\sum_{j=1}^n b_j\sum_{k=0}^i\frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha k+\alpha-j},i=1,2,3,\ldots$$

Реализуя итерационный процесс (10), неоднократно приходилось использовать равенство

$$\int\limits_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\nu}\frac{dt}{t}=\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\mu+\nu+1}B(\mu+1,\nu+1),\ \mu>-1,\nu>-1,0<a<b<\infty.$$

Оно является следствием замены переменного интегрирования в (10)

$$\tau=\ln\left(\frac{t}{a}\right)/\ln\left(\frac{x}{a}\right),$$

что позволяет получить бета-функцию

$$B(\gamma,\beta)=\int_0^1 \tau^{\gamma-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma+\beta)},\ \gamma>0,\beta>0\,,$$

и проводить дальнейшие преобразования до получения результата. В силу сходимости итерационного процесса имеем решение линейной однородной задачи:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha k+\alpha-j}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n} b_j\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right),$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг – Лефлера [6]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad z,\alpha,\beta\in C,\mathrm{Re}\,\alpha>0\,.$$

Обратимся теперь к интегральному уравнению (9). Будем решать его также методом последовательных приближений:

$$y_i(x)=y_0(x)+\theta\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}y_{i-1}\right)(x)+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(x),\ (i=1,2,\ldots)\ . \qquad (11)$$

Применяя ту же технологию, что и в [5], организуем итерационный процесс (11):

$$i=1:\quad y_1(x)=y_0(x)+\theta\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\frac{dt}{t}+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}+\theta\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-j+1)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\frac{dt}{t}+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}b_j\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}+\frac{\theta}{\Gamma(2\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{2\alpha-j}\right]+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(x),$$

$$i=2:\quad y_2(x)=y_0(x)+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(x)+$$
$$+\theta\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left[\sum_{j=1}^{n}b_j\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}+\frac{\theta}{\Gamma(2\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{2\alpha-j}\right)+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(t)\right]\frac{dt}{t}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(x)+\theta\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=1}^{n}b_j\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\frac{dt}{t}+$$
$$+\theta\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=1}^{n}b_j\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{\theta}{\Gamma(2\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{2\alpha-j}\frac{dt}{t}+\theta\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}+$$
$$+\theta\sum_{\xi=1}^{\varsigma}\frac{b_j}{\Gamma(2\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{2\alpha-j}+\theta^2\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(3\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{3\alpha-j}+\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}g\right)(x)+\theta\left(\mathfrak{I}_{a+}^{2\alpha}g\right)(x)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=0}^{2}\frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k\alpha+\alpha-j}+\sum_{k=0}^{1}\theta^k\left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha k+\alpha}g\right)(x),$$

приходим индуктивно к общей формуле:

$$y_i(x)=\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=0}^{i}\frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha k+\alpha-j}+\sum_{k=0}^{i-1}\theta^k\left(\Im_{a+}^{\alpha k+\alpha}g\right)(x)\,,i=1,2,3,\ldots\,.$$

При проведении преобразований в ходе итерационного процесса использовалось так называемое полугрупповое свойство дробного интегрирования по Адамару (4):

$$\Im_{a+}^{\alpha}\Im_{a+}^{\beta}h=\Im_{a+}^{\alpha+\beta}h\,,\,\alpha>0,\,\beta>0\,.$$

Оно является аналогом такового для классического дробного интегрирования Римана – Лиувилля [6].

Ввиду сходимости итерационного процесса будем иметь:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha k+\alpha-j}+\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\left(\Im_{a+}^{\alpha k+\alpha}g\right)(x)\,,\alpha>0\,. \tag{12}$$

Первое слагаемое соотношения (12) есть не что иное, как решение соответствующей однородной задачи [5]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\theta y(x),\,n-1<\alpha\le n,\,n\in N\,,\,a>0\,,$$
$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k\,,\,k=1,\,2,\,\ldots,n=-[-\alpha]\,.$$

Первому слагаемому в (12) можно придать иной вид, используя функцию Миттаг – Лефлера, упомянутую ранее:

$$\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha k+\alpha-j}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}b_j\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right)^{k}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}b_j\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right).$$

Преобразуем второе слагаемое соотношения (12):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\left(\Im_{a+}^{\alpha k+\alpha}g\right)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\,\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha k+\alpha-1}g(t)\frac{dt}{t}=$$
$$=\int_a^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\theta\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right)^{k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}g(t)\frac{dt}{t}=\int_a^x E_{\alpha,\alpha}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}g(t)\frac{dt}{t}.$$

Окончательно конструкция (12) будет иметь вид:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}b_j\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right)+\int_a^x E_{\alpha,\alpha}\left(\theta\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}g(t)\frac{dt}{t}. \tag{13}$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha>0,\,n=-[-\alpha],\,\theta\in R,\,g(x)\in L(a,b),\,0<a<b<\infty.$ *Тогда линейная дифференциальная задача типа (1)–(2)*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\theta y(x)+g(x),\quad \left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k\in R\quad (k=1,2,\dots,n)$$

имеет единственное решение в пространстве (3), определяемое равенством (13).

Заключение. В приложениях довольно часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится обращаться к положениям теории дробного интегродифференцирования. В работе получено аналитическое решение задачи типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с дробной производной Адамара, с использованием аппарата специальных функций.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2009. – № 3.– С. 132–135.
2. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для уравнения с дробной производной Адамара / О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2023. – № 3. – С. 10–14.
3. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI(63) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 16–17 марта 2011 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2011. – Т. 1. – С. 71–73.
4. Шлапаков, С.А. О задаче типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 76-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 1 марта 2024 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2024. – С. 53–54.
5. Шлапаков, С.А. Однородная задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 77-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 28 февр. 2025 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2025. – С. 52–54.
6. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

R E F E R E N C E S

1. Shlapakov S.A. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2009, 3, pp. 132–135.
2. Shlapakov S.A., Skoromnik O.V. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Bulletin of Vitebsk State University], 2023, 3, pp. 10–14.
3. Shlapakov S.A. *Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy XVI(63) Region. nauch.-prakt. konf. prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 16–17 marta 2011 g.: v 2 t.* [Science – for Education, Industry, Economy: Proceedings of the XVI(63) Regional Scientific and Practical Conference of Teachers, Researchers and Postgraduate Students, Vitebsk, March 16–17, 2011], Vitebsk, 2011, 1, pp. 71–73.
4. Shlapakov S.A. *Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy 76-i Region. nauch.-prakt. konf. prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 1 marta 2024 g.* [Science – for Education, Industry, Economy: Proceedings of the 76th Regional Scientific and Practical Conference of Teachers, Researchers and Postgraduate Students, Vitebsk, March 1, 2024], Vitebsk, 2024, pp. 53–54.
5. Shlapakov S.A. *Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy 77-i Region. nauch.-prakt. konf. prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 28 fevr. 2025 g.* [Science – for Education, Industry, Economy: Proceedings of the 77th Regional Scientific and Practical Conference of Teachers, Researchers and Postgraduate Students, Vitebsk, February 28, 2025], Vitebsk, 2025, pp. 52–54.
6. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodniye drobnogo poriadka i nekotoriye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fraction Order and Some Applications of Theirs], Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.

Поступила в редакцию 25.03.2025

Адрес для корреспонденции: e-mail: ShlapakovSA@gmail.com – Шлапаков С.А.