



# МАТЭМАТЫКА

УДК 533.9-112+53.083.72

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРОЗРАЧНЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Н.Ю. Вислобоков

Витебский филиал Международного университета «МИТСО»

Одними из наиболее актуальных и приоритетных научных направлений сегодня являются численное исследование и компьютерное моделирование в области сложных функциональных систем, лазерных технологий и фотоники. Обусловлено это в первую очередь достаточно широким спектром возможных применений результатов таких исследований – от спектроскопии до систем передачи энергии высокой плотности и создания устройств нано- и оптоэлектроники.

Цель работы – построить математическую и численную модели, позволяющие осуществлять изучение процесса распространения фемтосекундных вихревых импульсных пучков в широко используемых в фотонике диэлектриках в условиях как нормальной, так и аномальной дисперсии.

**Материал и методы.** Численную модель, корректно описывающую указанные процессы и явления в их взаимосвязи с учетом используемых начальных условий и граничных параметров, будем строить на основе волнового уравнения, модифицированных уравнений Шрёдингера и нелинейного эйконала, учитывающих дисперсию, дифракцию, нелинейность среды и влияние электронной плазмы, сгенерированной полем электромагнитной волны. В качестве среды распространения оптических вихревых пучков будем рассматривать примеры широко распространенных диэлектриков.

**Результаты и их обсуждение.** Автором приводятся результаты процесса построения математической, а затем на ее основе и численной модели для исследования процесса распространения вихревых импульсных пучков в широко применяемых в фотонике диэлектриках с учетом дифракции, дисперсии и всех видов индуцируемых фотоионизационных эффектов.

**Заключение.** Таким образом, в данной работе построена математическая, а затем на ее основе и численная модель процесса распространения фемтосекундных вихревых импульсных пучков в диэлектриках, применяемых в фотонике в условиях нормальной и аномальной дисперсии. Модель учитывает, что такие оптические пучки в процессе распространения подвергаются одновременному воздействию дисперсии, дифракции и фотоионизационных эффектов, а модульная структура модели помогает анализировать влияние и роль каждого из этих эффектов в отдельности. К тому же, кроме эволюции огибающей напряженности (на основе которой можно наблюдать и динамику изменения интенсивности) электромагнитного поля вихревого импульсного пучка, представленная модель позволяет отслеживать динамику изменения частотного спектра исследуемого оптического излучения. Посредством данной модели возможно в дальнейшем численное изучение для оптических фемтосекундных вихрей процессов филаментации, формирования устойчивых локализованных формаций электромагнитной энергии, называемых световыми пульсами, и закономерностей модификации их частотного спектра.

**Ключевые слова:** численное исследование, математическое моделирование, оптический импульс, фемтосекундный импульс, оптические вихревые пучки, индуцированная ионизация.

# NUMERICAL STUDY OF THE PROCESS OF OPTIC VORTEX BEAMS OF FEMTOSECOND RADIATION SPREAD IN TRANSPARENT DIELECTRICS

N.Yu. Vislobokov

Vitebsk Branch of the International University MITSO

*One of the most relevant and priority research trends today is numerical study and computer modeling in the field of complex functional systems, laser technologies and photonics. It is first of all conditioned by a rather wide spectrum of the possible application of such research findings – from spectroscopy to systems of high density energy propagation and creation of nano and optic electronic devices.*

*The purpose of the paper is to build mathematical and numerical models which make it possible to study the process of spreading femtosecond vortex impulse beams in the widely spread in photonics dielectrics in the conditions of normal and abnormal dispersion.*

**Material and methods.** We are building the numerical model which describes correctly the mentioned processes and phenomena in their interconnection taking into account the applied primary conditions and boundary parameters on the basis of wave equation, modified Schrodinger equations and non-linear eiconal which take into account dispersion, defraction, non-linearity of the media and the influence of electron plasma generated by the field of an electromagnetic wave. As optic vortex beams propagation medium we are considering examples of widely spread dielectrics.

**Findings and their discussion.** The author presents the results of the process of building a mathematical and then, on its basis, a numerical model to study the process of spreading vortex impulse beams in widely used in photonics dielectrics taking into account defraction, dispersion and all types of induced photoionization effects.

**Conclusion.** Thus, a mathematical and then, on its basis, a numerical model of the process of spreading femtosecond vortex pulse beams in dielectrics used in photonics in the conditions of normal and abnormal diepersion is built in the paper. The model takes into consideration that such optic beams in the process of spreading are simultaneously influenced by dispersion, defraction and photoionization effects while the module structure of the model helps to analyze the impact and the role of each of the effects separately. Besides, apart from the evolution of the tenseness going round the electromagnetic field of the vortex impulse beam (on the basis of which the dynamics of the intensivity transformation can be observed), the presented model makes it possible to trace the dynamics of the transformation of the frequency spectrum of the studied optic radiatin. With the help of this model the numericak study for optic femtosecond vortexes of processes of filamentation, building stable localized formations of electromagnetic energy called light bullets as well as regularities of their frequency spectrum modifications is possible.

**Key words:** numerical study, mathematic modeling, optic pulse, femtosecond pulse, optic vortex beams, induced ionization.

Одними из наиболее актуальных и приоритетных научных направлений сегодня являются сложные функциональные системы, лазерные технологии и фотоника. Обусловлено это тем, что результаты данных исследований в наше время зачастую играют значимую роль для разработки новых высокотехнологичных устройств повышенной производительности и энергоэффективности, а также совершенствования уже известных технологий [1; 2]. Известно, что особенно активизировался интерес ученых к вопросу распространения мощного оптического излучения в различных средах (от газообразных до кристаллических) после выпуска генераторов фемтосекундного импульсного излучения с шириной пучка до нескольких микрометров [3]. Основная причина – при таких параметрах импульса значительно возрастала роль самоиндукционной фотоионизации и многофотонного поглощения, что заметно изменяло эволюцию излучения в процессе распространения и позволяло наблюдать ряд новых явлений и эффектов [4; 5], тем самым расширялся горизонт применения результатов подобных исследований.

Для данных научных направлений первостепенное значение имеют численные исследования и компьютерное моделирование изучаемых процессов. Обусловлено это тем, что именно указанный вид исследований, позволяя благодаря расчетам определить оптимальные параметры и условия без необходимости проводить соответствующие реальные эксперименты, фактически направляет экспериментальные изыскания в изучении явлений, связанных с распространением мощного оптического излучения с высокой плотностью энергии в твердотельных средах и воздухе.

Кроме того, следует отметить, что актуальность исследований в рассматриваемом научном направлении обусловлена в том числе и широким спектром возможных применений их результатов –

от спектроскопии [1; 2] до систем передачи энергии высокой плотности [3; 5] и создания инновационных устройств нано- и оптоэлектроники [2].

В представленной статье приводятся результаты процесса построения математической, а затем на ее основе и численной модели, реализующей исследование процесса распространения вихревых импульсных пучков в широко используемых в фотонике диэлектриках с учетом дифракции, дисперсии и всех видов индуцируемых фотоионизационных эффектов.

Цель работы – построить математическую и численную модели, позволяющие осуществлять изучение процесса распространения фемтосекундных вихревых импульсных пучков в широко применяемых в фотонике диэлектриках в условиях как нормальной, так и аномальной дисперсии.

**Материал и методы.** Численную модель, корректно описывающую указанные процессы и явления в их взаимосвязи с учетом используемых начальных условий и граничных параметров, будем строить на основе волнового уравнения, модифицированных уравнений Шрёдингера и нелинейного эйконала, учитывающих, кроме дисперсии и дифракции, нелинейность среды и влияние электронной плазмы, сгенерированной полем электромагнитной волны. Начальные параметры оптических вихревых пучков будем варьировать в пределах необходимых для наблюдения исследуемых явлений [5], но с учетом возможностей существующих генераторов излучения. В качестве среды распространения будем рассматривать достаточно широко распространенные, хорошо подходящие для данных целей  $\text{CaF}_2$ ,  $\text{LiF}$  и плавленый кварц.

**Результаты и их обсуждение.** Начиная процесс построения математической, а затем и численной модели, отметим, что волновое уравнение в этом случае может быть записано в виде

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – лапласиан,  $E$  – комплексная напряженность поля электромагнитной волны,  $t$  – временная координата, а  $D$  – индукция, которая может быть вычислена через интеграл

$$D = \int_{-\infty}^t \varepsilon(r, z, t-t') E(t') dt'.$$

Исходя из того, что амплитуда обратной волны, индуцированной распространением оптических импульсов длительностью менее 1 пс, даже при высокой пиковой интенсивности, в рассматриваемых твердотельных кристаллических средах не превышает 5% от амплитуды прямой волны [4], будем считать влияние отраженной волны пренебрежимо малым. Соответственно далее выполним модификацию нелинейного уравнения Шрёдингера только для прямой электромагнитной волны и перейдем к уравнению, описывающему динамику изменения напряженности поля фемтосекундного светового импульса ( $E$ ) в процессе распространения в среде исследуемого типа вдоль продольной координаты  $z$ :

$$\frac{i}{2k_0 n_0} \Delta_{\perp} E + \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{n_0} K + \frac{1}{2} \frac{d(\ln n_{nl})}{\partial z} E - \frac{4\pi}{cn_0} \partial_t \chi_{nl} E = 0, \quad (2)$$

где  $\Delta_{\perp} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$ ,  $r$  – радиальная координата,  $\chi_{nl}$  – диэлектрическая восприимчивость (нелинейная);  $n = n_l + n_{nl} I$ ,  $n_l$  и  $n_{nl}$  – линейная и нелинейная части показателя преломления соответственно,  $I = |E|^2$ ,  $k_0$  – начальный волновой вектор;  $K$  может быть определено как

$$K = \frac{ik_0}{2} (n^2 - n_{nl}^2) E - n_l \hat{D} E, \quad (3)$$

здесь  $\hat{D}$  – оператор, учитывающий влияние дисперсии (нормальной или аномальной в зависимости от длины волны излучения), который может быть определен из соотношения:

$$\hat{D} = \left( \beta_1 - \frac{\alpha_1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m!} \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^m. \quad (4)$$

Параметры  $\varepsilon_m$  и  $\beta_m$  вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \beta_m + i \frac{\alpha_m}{2}, \\ \beta_m = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^{-m}. \end{cases}$$

В данном случае, обозначив несущую частоту импульсного пучка  $\omega$ , а временную координату  $\tau$ , оператор  $\hat{D}$  можно преобразовать к виду

$$\hat{D} = \frac{i}{2} \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Влияние керровской нелинейности 3-го и 5-го порядков может быть описано выражением

$$P_{nl} \cdot E = (ik_0 n_2 \hat{T} |E|^2 + ik_0 n_4 \hat{T} |E|^4) \cdot E. \quad (5)$$

Далее учтем тот факт, что ионизация среды распространения высокointенсивным оптическим импульсом приводит к потере энергии излучения и, если поглощенная энергия и время релаксации среды достаточно велики, формированию плазмы свободных электронов, которая в свою очередь оказывает дефокусирующее влияние на параметры импульса:

$$N_{PL} = \frac{\sigma}{2} \hat{T}^{-1} (1 + i\omega\tau_c) \rho + \frac{1}{2} \frac{W(|E|) \cdot U}{|E|^2}. \quad (6)$$

Здесь  $\sigma$  – характерный параметр тормозного излучения (в данной модели величину  $\sigma$  можно определить согласно [5]), время  $\tau_c$  характеризует частоту столкновений электронов в плазме,  $\rho$  – плотность электронной плазмы,  $W(|E|)$  – скорость ионизации в электромагнитном поле импульса. Обозначим плотность электронов в нейтральном состоянии  $\rho_0$ , а начальную интенсивность  $I_0$ , тогда уравнение для скорости изменения плотности  $\rho$  можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \gamma \frac{I_0 \tau_p}{\rho_0} |E|^{2m} + \frac{\tau_p I_0 \sigma |E|^2}{U} \rho - \frac{\tau_p}{\tau_r} \rho. \quad (7)$$

Далее, используя введенные обозначения  $(\hat{D}, P_{nl}, N_{PL})$ , преобразуем эволюционное уравнение к виду, более удобному для анализа и построения численной модели, и оставим в его левой части только производную по продольной координате:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( 1 + \frac{i}{\omega \tau_p} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{-1} \nabla_{\perp} E - \hat{D} E + (P_{nl} - N_{PL}) E. \quad (8)$$

Получившееся уравнение описывает эволюцию пространственно-временного профиля огибающей напряженности поля оптического импульса (здесь интенсивность может быть вычислена как  $I = |E|^2$ ) в процессе распространения, а также позволяет исследовать динамику изменения его частотного спектра по сдвигу частот в соответствующей точке исследуемой области  $\Delta\omega(r, \tau)$ , который определяется через величину временного градиента фазы  $\varphi_{nl}$ :

Для расчета  $W(|E|)$  в общем случае можно использовать формулу, предложенную Келдышем или ограничиться линейным приближением (в области преобладания многофотонного поглощения), в зависимости от пределов изменения мощности импульса и среды распространения оптического излучения. В том случае, когда при вычислении скорости фотоионизации в поле электромагнитной волны лазерного импульса необходимо учесть одновременное влияние таких ионизационных эффектов, как мультифотонное поглощение, туннельная и лавинная ионизация, целесообразным будет использовать для расчета  $W(|E|)$  следующую формулу:

$$W(|E|) = \frac{2\omega_0}{9\pi} \left( \frac{\omega_0 m^*}{\hbar\sqrt{\Gamma}} \right)^{3/2} Q \exp\{G\}, \quad (9)$$

$$\Gamma = \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2},$$

$$\gamma = \frac{\omega}{eE} \sqrt{m^* U}.$$

Методика вычисления параметров  $Q$  и  $G$  описана нами в [5]. Однако следует отметить, что в ряде случаев при вычислении  $W(|E|)$  для упрощения процесса построения численной и компьютерной моделей достаточно ограничиться многофотонным приближением, а влиянием остальных видов ионизации пренебречь. Так на рис. 1 на логарифмической шкале приведена динамика изменения  $W(|E|)$  в зависимости от интенсивности оптического импульса ( $I$ ) в кварцевом стекле bk7 ( $U = 9$  эВ) для  $I$ , изменяющейся в пределах от 1 до 100 Вт/см<sup>2</sup>.

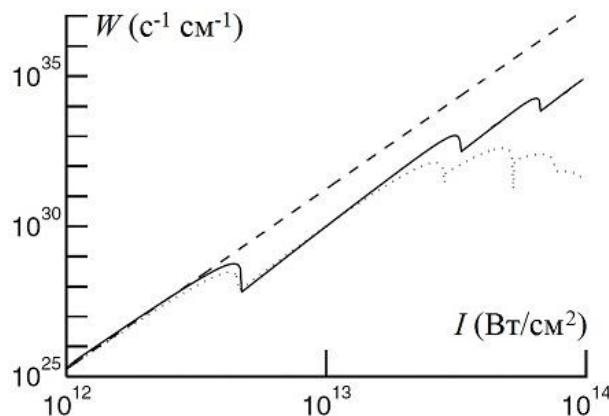


Рис. Динамика изменения скорости фотоионизации  $W(|E|)$  в зависимости от интенсивности излучения ( $I$ ) в плавленом кварце bk7 (учтены все виды ионизации – сплошная кривая, предельный случай многофотонной ионизации – точечная кривая, многофотонная ионизация при  $n=6$  – штриховая кривая).

По графику на рис. видно, что при пиковой интенсивности в несколько тераватт преобладающим видом ионизации является многофотонное поглощение, а остальными видами ионизации можно просто пренебречь. Здесь скорость ионизации достаточно точно может быть определена из соотношения

$$W(|E|) = (\sigma_n I^n \rho), \quad (10)$$

где  $\sigma_n$  – коэффициент фотонного поглощения (фактически коэффициент пропорциональности, устанавливаемый экспериментально для разных сред распространения и разных диапазонов изменения энергии излучения),  $n$  – порядок многофотонного перехода.

$$n = \text{int} \left\langle \frac{U}{\hbar\omega_0} + 1 \right\rangle.$$

Однако при возрастании пиковой интенсивности импульса (например, для кварцевого стекла до 15 ТВт/см<sup>2</sup>) усиливается влияние туннельной ионизации и постепенно уже этот вид ионизации становится преобладающим. Соответственно вычисление  $W(|E|)$  в приближении только многофотонного поглощения приведет к отклонению результатов численной модели от экспериментальных, причем величина отклонения будет увеличиваться с возрастанием  $I$ , поэтому при таких интенсивностях придется учитывать одновременное влияние нескольких ионизационных эффектов, индуцированных полем импульса.

Следует отметить, что в качестве входного для такой модели может выступать гауссов обычный ( $E(r, z = 0, \tau) = E_0 \exp \left[ -\frac{r^2}{2w_0^2} - \frac{\tau^2}{2\tau_p^2} \right]$ ) или линейно поляризованный импульсный пучок, для которого

$$E(r, z = 0, \tau) = E_0 \exp \left[ -\frac{r^2}{w_0^2} - \frac{\tau^2}{\tau_p^2} - \frac{ikr^2}{2f} \right], \quad (11)$$

где  $f = d + \frac{\pi \omega^2 n_0}{\lambda_0 d}$  (здесь  $d$  – это расстояние от линейного фокуса).

Однако в настоящее время более актуальным является вопрос моделирования процесса распространения в кристаллах диэлектриков, наиболее часто используемых в фотонике (bk7, CaF<sub>2</sub>, LiF) не просто импульсов, а вихревых импульсных пучков фемтосекундного излучения на частотах, соответствующих как нормальной, так и аномальной дисперсии. У таких световых пучков сингулярность фазы приводит к увеличению критической мощности самофокусировки ( $P_{cr}$ ), например, у вихревого пучка с топологическим зарядом, равным 1, величина  $P_{cr}$  в 4 раза превышает этот показатель для обычного гауссова пучка. Посредством таких моделей можно изучать процессы филаментации и генерации сверхширокодиапазонного (по частоте) излучения, а также формирования сравнительно устойчивых локализованных формаций электромагнитной энергии, называемых световыми пульями.

Соответственно далее дополним математическую модель так, чтобы ее можно было использовать для моделирования процесса распространения вихревых фемтосекундных аксиально-симметричных импульсных пучков. В этом случае оператор дифракции будет зависеть от топологического заряда ( $m$ ), что учтем в эволюционном уравнении. Соответственно математическая модель динамики распространения оптического вихря с топологическим зарядом  $m$  будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( 1 + \frac{i}{\omega \tau_p} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) E - \hat{D} E + (P_{nl} - N_{PL}) E, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \gamma \frac{I_0 \tau_p}{\rho_0} |E|^{2m} + \frac{\tau_p I_0 \sigma |E|^2}{U} \rho - \frac{\tau_p}{\tau_r} \rho. \end{cases} \quad (12)$$

Уравнение для напряженности электромагнитного поля входного оптического излучения в данном случае будет таким:

$$E^{(m)}(r, z = 0, \tau) = E_0 \left( \frac{r}{w_0} \right)^m \exp \left[ -\frac{r^2}{w_0^2} \right] \exp \left[ -\frac{\tau^2}{\tau_p^2} \right] \exp[i m \varphi]. \quad (13)$$

Можно отметить, что вихревая фаза такого импульса, которая описывается комплексной экспонентой, будет создавать сингулярность, обуславливающую интерференционный эффект, напоминающий процесс, подобный отталкиванию светового поля от оптической оси.

Далее для перехода от математической модели к численной перейдем к безразмерным величинам ( $A, \zeta, t', w', \rho'$ ). Для этого осуществим нормирование на характерные параметры данной модели: дифракционную длину, начальную длительность и ширину импульса, плотность  $\rho_0$ .

$$\begin{aligned} |E|^2 &= I_0 |A|^2, \quad \zeta = \frac{z}{L_0}, \\ \tau' &= \frac{(t - \frac{z}{v_g})}{\tau_p}, \quad w' = \frac{w}{w_0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \\ L_0 &= L_{df} = \frac{kw_0^2}{2}, \quad \frac{L_0}{2kw_0^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (14)$$

В процессе численного моделирования по безразмерным координатам введем равномерную сетку ( $q_\zeta$  по координате  $\zeta$ , а также  $q_r$  и  $q_\tau$  по соответствующим координатам):

$$\begin{cases} q_\zeta = \left\{ \zeta = \zeta_n; \quad \zeta_n = nh_\zeta; \quad h_\zeta = \frac{L_\zeta}{N_\zeta}; \quad n = 0, 1, \dots, (N - 1) \right\}, \\ q_r = \left\{ r = r_j; \quad r_j = (j + 0.5)h_r; \quad h_r = \frac{L_r}{N_r + 0.5}; \quad j = 0, 1, \dots, (N_r - 1) \right\}, \\ q_\tau = \left\{ \tau = \tau_k; \quad \tau_k = kh_\tau; \quad h_\tau = \frac{L_\tau}{N_\tau}; \quad k = 0, 1, \dots, (N_\tau - 1) \right\}. \end{cases} \quad (15)$$

Далее использование известных схем аппроксимации математических операций и применение итерационного процесса позволит завершить процесс построения численной модели.

**Заключение.** Таким образом, в данной работе построена математическая, а затем на ее основе и численная модель процесса распространения фемтосекундных вихревых импульсных пучков в диэлектриках, применяемых в фотонике (например,  $bk7$ ,  $CaF_2$ ,  $LiF$ ) в условиях нормальной и аномальной дисперсии. Модель учитывает, что такие оптические пучки в процессе распространения подвергаются одновременному воздействию дисперсии, дифракции и фотоионизационных эффектов, а модульная структура модели помогает анализировать влияние и роль каждого из этих эффектов в отдельности. К тому же, кроме эволюции огибающей напряженности (на основе которой можно наблюдать и динамику изменения интенсивности) электромагнитного поля вихревого импульсного пучка, представленная модель позволяет отслеживать динамику изменения частотного спектра исследуемого оптического излучения. Посредством данной модели возможно в дальнейшем численное изучение для оптических фемтосекундных вихрей процессов филаментации, формирования устойчивых локализованных формаций электромагнитной энергии, называемых световыми пульсами и закономерностей модификации их частотного спектра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fu, W. High-power femtosecond pulses without a modelocked laser / W. Fu, L.G. Wright, F.W. Wise // JOSA Optica. – 2022. – Vol. 4, № 7. – P. 831–834.
2. Тихомиров, С.А. Фемтосекундная лазерная система с импульсной накачкой генератора и усилителя при использовании одного силового блока / С.А. Тихомиров // Приборы и методы измерений. – 2021. – Т. 12, № 1. – С. 23–29.
3. Zaloznaya, E.D. Similarity parameter for the process of mid-IR light bullet formation / E.D. Zaloznaya [et al.] // Quantum Electronics. – 2020. – Vol. 50, № 8. – P. 354–372.
4. Распространение мощного светового импульса с учетом отражения от нелинейного фокуса / О.Х. Хасанов, Т.В. Смирнова, О.М. Федотова [и др.] // Известия РАН. Серия физическая. – 2006. – Т. 70, № 12. – С. 1740–1744.
5. Вислобоков, Н.Ю. Численное моделирование процесса формирования пульсирующего канала распространения мощного светового импульса в прозрачных диэлектриках / Н.Ю. Вислобоков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 29–37.

#### REFERENCES

1. Fu, W. High-power femtosecond pulses without a modelocked laser / W. Fu, L.G. Wright, F.W. Wise // JOSA Optica. – 2022. – Vol. 4, № 7. – P. 831–834.
2. Tikhomirov S.A. *Pribory i metody izmereni* [Tools and Measurement Methods], 2021, 12(1), pp. 23–29.
3. Zaloznaya, E.D. Similarity parameter for the process of mid-IR light bullet formation / E.D. Zaloznaya [et al.] // Quantum Electronics. – 2020. – Vol. 50, № 8. – P. 354–372.
4. Khasanov O.Kh., Smirnova T.V., Fedotova O.M. *Izvestiya RAN. Seriya fizicheskaya* [Journal of RAS. Physics], 2006, 70(12), pp. 1740–1744.
5. Vislobokov N.Yu. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2018, 4(101), pp. 29–37.

Поступила в редакцию 11.11.2024

Адрес для корреспонденции: e-mail: nkt\_2004@mail.ru – Вислобоков Н.Ю.