

УДК 519.63

Т. Г. АЛЕЙНИКОВА, Р. Ю. ЧЕГИС

ИССЛЕДОВАНИЕ НОВЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе рассматриваются итерационные методы для уравнений эллиптического типа, предложенные в работе [1]. Сходимость итерационных процессов изучается на основе спектрального метода, который был успешно применен при исследовании устойчивости некоторых новых разностных схем решения многомерных параболических уравнений [2, 3]. Полученные результаты уточняют оценки, доказанные в [1].

Для линейного уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами в p -мерном параллелепипеде $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p), 0 \leq x_\alpha \leq 1\}$ с границей Γ рассматривается задача Дирихле

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_\Gamma = g(x), \quad (1)$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Стандартным способом вводится разностная сетка и строится разностная краевая задача, аппроксимирующая задачу (1):

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\Gamma_h} = g(x). \quad (2)$$

В дальнейшем ограничимся двумерной задачей ($p=2$).

1. Многокомпонентная итерационная схема. Для решения задачи (2) применим многокомпонентную итерационную схему (3) [1]

$$\begin{aligned} \frac{y_1^{k+1/2} - y^k}{\tau} &= \Lambda_1^{k+1/2} y_1^k + \Lambda_2^k y + f, \\ \frac{y_2^{k+1/2} - y^k}{\tau} &= \Lambda_1^{k+1/2} y_1^k + \Lambda_2^{k+1/2} y_2^k + f, \\ y^{k+1} &= (y_1^{k+1/2} + y_2^{k+1/2})/2, \quad y|_\Gamma = y_1^{k+1/2}|_\Gamma = y_2^{k+1/2}|_\Gamma = g(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Для погрешности $z^{k+1} = y^{k+1} - y$ можно записать однородные уравнения, аналогичные (3), полагая $z_1^{k+1/2} = y_1^{k+1/2} - y$, $z_2^{k+1/2} = y_2^{k+1/2} - y$:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^{k+1/2} - z^k}{\tau} &= \Lambda_1^{k+1/2} z_1^k + \Lambda_2^k z, \quad x \in \omega_h, \\ \frac{z_2^{k+1/2} - z^k}{\tau} &= \Lambda_1^{k+1/2} z_1^k + \Lambda_2^{k+1/2} z_2^k, \\ z^{k+1} &= (z_1^{k+1/2} + z_2^{k+1/2})/2, \quad z = y - y, \quad z_1|_\Gamma = z_2|_\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Следуя методике, предложенной в работах [2, 3], разложим $z, z_1^{k+1/2}$, $z_2^{k+1/2}$ в ряд по собственным функциям

$$z(x_{1i}, x_{2j}) = \sum_{i,n=1}^{N-1} c_{ln}^k \sin \pi l x_{1i} \sin \pi n x_{2j}, \quad (5)$$

$$z_m^{k+1/2}(x_{1i}, x_{2j}) = \sum_{l,n=1}^{N-1} a_{mln}^{k+1/2} \sin \pi l x_{1i} \sin \pi n x_{2j}, \quad m=1, 2.$$

Подставляя (5) в систему уравнений (4), найдем связь между коэффициентами c_{ln}^{k+1} :

$$c_{ln}^{k+1} = \frac{1 + 0,5\tau^2 \lambda_n (\lambda_l - \lambda_n)}{(1 + \tau \lambda_l)(1 + \tau \lambda_n)} c_{ln}^k \equiv q_{ln}^k c_{ln}^k. \quad (6)$$

Величина $q_{ln} = q_{ln}(\tau, \lambda_l, \lambda_n)$ зависит от параметра τ . Найдем условия, при которых итерационный процесс (3) является сходящимся, т. е. $|q_{ln}| < 1$. Оптимальное значение параметра τ_0 определим, решая вариационную задачу

$$\min_{\tau} \max_{\lambda_1 \leq a, b \leq \lambda_{N-1}} q(\tau, a, b) = q(\tau_0). \quad (7)$$

Применяя простые вычисления, находим, что экстремум задачи может достигаться в угловых точках области

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1, \quad b_1 = \lambda_1, \quad q(\tau, a_1, b_1) = \frac{1}{(1 + \tau \lambda_1)^2}, \\ a_2 &= \lambda_{N-1}, \quad b_2 = \lambda_1, \quad q(\tau, a_2, b_2) = \frac{(1 + 0,5\tau^2 \lambda_1 (\lambda_{N-1} - \lambda_1))}{(1 + \tau \lambda_1)(1 + \tau \lambda_{N-1})}, \\ a_3 &= \lambda_{N-1}, \quad b_3 = \lambda_{N-1}, \quad q(\tau, a_3, b_3) = \frac{1}{(1 + \tau \lambda_{N-1})^2}, \\ a_4 &= \lambda_1, \quad b_4 = \lambda_{N-1}, \quad q(\tau, a_4, b_4) = \frac{(1 - 0,5\tau^2 \lambda_{N-1} (\lambda_{N-1} - \lambda_1))}{(1 + \tau \lambda_1)(1 + \tau \lambda_{N-1})} \end{aligned}$$

или при выполнении условия

$$\tau \lambda_{N-1} > (\tau \lambda_1 + 1)^2 + 1, \quad (8)$$

в точке

$$\begin{aligned} a_5 &= \lambda_{N-1}, \quad \tau b_5 = \sqrt{(\tau \lambda_{N-1} - 1)} - 1, \\ q(\tau, a_5, b_5) &= \frac{1 + 0,5 \sqrt{(\tau \lambda_{N-1} - 1)} (\tau \lambda_{N-1} + 1 - \sqrt{(\tau \lambda_{N-1} - 1)})}{(1 + \tau \lambda_{N-1}) \sqrt{(\tau \lambda_{N-1} - 1)}}. \end{aligned}$$

Если справедливо неравенство $\lambda_{N-1} > 3\lambda_1$, то, исследуя точку (a_4, b_4) , приходим к ограничению на дискретный параметр τ сверху:

$$|q(\tau, a_4, b_4)| < 1 \Leftrightarrow 0 < \tau < \tau_M = \frac{\lambda_1 + \lambda_{N-1} + (5\lambda_{N-1}^2 - 10\lambda_1 \lambda_{N-1} + \lambda_1^2)^{1/2}}{\lambda_{N-1}^2 - 3\lambda_1 \lambda_{N-1}}.$$

При достаточно малых значениях h справедлива приближенная оценка $\tau_M \approx (\sqrt{5} + 1)h^2/4$.

Имея в виду знаки производных $\partial q/\partial a$, $\partial q/\partial b$, будем различать несколько случаев:

$$1) \quad \tau \lambda_1 \geq 1. \quad (9)$$

В этом случае оптимальное значение определяется из равенства

$$q(\tau_{01}, a_2, b_2) = -q(\tau_{01}, a_4, b_4) \Leftrightarrow \tau_{01} = 2/(\lambda_{N-1} - \lambda_1).$$

Условие (9) эквивалентно требованию $h \geq h_0 (\approx 0,4)$.

2) $\tau\lambda_1 < 1$.

Оптимальное значение определяется из соотношений

$$q(\tau_{02}, a_1, b_1) = -q(\tau_{02}, a_4, b_4), \quad q(\tau_{03}, a_5, b_5) = -q(\tau_{03}, a_4, b_4),$$

$$\min_{\tau_{02}, \tau_{03}} \max(q(\tau_j, a_1, b_1), q(\tau_j, a_5, b_5)) = q(\tau_0^*, a, b).$$

2. Алгоритм полного распараллеливания. Аналогично можно изучить и другой итерационный процесс, предложенный в работе [1]:

$$\frac{y_1^{k+1/2} - y^k}{\tau} = \Lambda_1^{k+1/2} y_1^k + \Lambda_2^k y + f,$$

$$\frac{y_2^{k+1/2} - y^k}{\tau} = \Lambda_1^k y + \Lambda_2^{k+1/2} y_2^k + f, \quad (10)$$

$$y^{k+1} = (y_1^{k+1/2} + y_2^{k+1/2})/2, \quad y|_{\Gamma} = y_1^{k+1/2}|_{\Gamma} = y_2^{k+1/2}|_{\Gamma} = g(x).$$

Выполнив преобразования, аналогичные проведенным выше для схемы (3), получим для погрешности следующие соотношения:

$$c_{ln}^{k+1} = q_{ln} c_{ln}^k, \quad q_{ln} = \frac{1 - 0,5\tau^2(\lambda_l^2 + \lambda_n^2)}{(1 + \tau\lambda_l)(1 + \tau\lambda_n)}.$$

Экстремальные значения функция $q = q(\tau, a, b)$ может принимать только в угловых точках области параметров $\lambda_1 \leq a, b \leq \lambda_{N-1}$. Для нахождения оптимального значения параметра τ рассмотрим следующие случаи:

$$1) (\lambda_{N-1} - \lambda_1)^2 \leq 2\sqrt{\lambda_1\lambda_{N-1}}(\lambda_1 + \lambda_{N-1}). \quad (11)$$

Оптимальное значение τ_{01} получим из уравнения

$$q(\tau_{01}, a_1, b_1) = -q(\tau_{01}, a_3, b_3), \quad \tau_{01} = 1/\sqrt{\lambda_1\lambda_{N-1}}.$$

Отметим, что условие (11) справедливо только на грубых сетках, когда $h > h_0 (\approx 0,3)$.

$$2) (\lambda_{N-1} - \lambda_1)^2 > 2\sqrt{\lambda_1\lambda_{N-1}}(\lambda_1 + \lambda_{N-1}).$$

В этом случае оптимальное значение параметра τ находится из квадратичного уравнения

$$q(\tau_{02}, a_1, b_1) = -q(\tau_{02}, a_2, b_2),$$

разрешив которое, находим

$$\tau_{02} = \frac{\lambda_{N-1} - \lambda_1 + (5\lambda_{N-1}^2 + 6\lambda_{N-1}\lambda_1 + 5\lambda_1^2)^{1/2}}{(\lambda_1 + \lambda_{N-1})^2}.$$

При достаточно малых значениях h справедлива приближенная оценка $\tau_{02} \approx (\sqrt{5} + 1)h^2/4$.

Оценим число итераций, необходимых для достижения заданной точности ε методом (10) при оптимальном выборе параметра τ_{02} :

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{q(\tau_{02})}, \quad \xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}},$$

$$q(\tau_0) = \left| \frac{1 - 0,5\tau_{02}^2(\lambda_{N-1}^2 + \lambda_1^2)}{(1 + \tau_{02}\lambda_1)(1 + \tau_{02}\lambda_{N-1})} \right| \approx 1 - 6,5\xi.$$

Поэтому $n_0(\varepsilon) \approx \ln(1/\varepsilon)/(6,5\xi)$, т. е. число итераций метода (10) примерно в 3 раза меньше числа итераций метода простой итерации [4]. Аналогичной по порядку скоростью сходимости обладает и метод, изученный в п. 1.

3. Реализация классических неявных разностных схем. В работах [1, 5] предложено использовать итерационные процессы типа (3) для реализации устойчивых неявных разностных схем. В качестве примера для неявной схемы

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} \hat{y}$$

рассмотрим итерационный процесс вида [1]

$$\frac{y_j^{s+1} - y_j^s}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^j \Lambda_{\alpha} y_{\alpha}^{s+1} + \sum_{\alpha=j+1}^p \Lambda_{\alpha} y_{\alpha}^s, \quad j = \overline{1, p}. \quad (12)$$

Обозначим $z_j^{s+1} = y_j^{s+1} - y_j^s$. Разложим $z_k(x)$ в ряд по собственным функциям. Рассмотрим двумерную задачу ($p=2$)

$$z_k(x_{1i}, x_{2j}) = \sum_{l, n=1}^{N-1} d_{kln}^s \sin \pi l x_{1i} \sin \pi n x_{2j}, \quad k=1, 2. \quad (13)$$

Подставив разложение (13) в систему уравнений (12), получим рекуррентное соотношение для коэффициентов d_{kln} :

$$d_{kln}^{s+1} = \frac{\tau^2 \lambda_l \lambda_n}{(1 + \tau \lambda_l)(1 + \tau \lambda_n)} d_{kln}^s = q_{ln}^s d_{kln}^s. \quad (14)$$

Простые вычисления показывают, что

$$|q_{ln}| \leq q^2, \quad q = \frac{\tau \lambda_{N-1}}{1 + \tau \lambda_{N-1}} < 1, \quad (15)$$

т. е. итерационный процесс сходится при любых значениях параметра $\tau > 0$. Но для эффективного гашения высоких гармоник разложения (13) необходимо выбирать $\tau = O(1/\lambda_{N-1}) = O(h^2)$.

Интересно сравнить результат спектрального анализа (15) с оценкой сходимости, полученной в работе [1] энергетическим методом для общей p -мерной задачи (12):

$$q^* = \left(\frac{1}{1+v} \right)^{1/2}, \quad v = h^k (1 - ch^{k-2}\tau), \quad (16)$$

где $c > 0$ не зависит от τ , h , а k выбирается так, что $ch^{k-2}\tau < 1$. Несложно показать, что хотя (16) и является оценкой сверху, оно правильно передает порядок скорости сходимости. Для этого запишем (15) в эквивалентном виде

$$q = \left(\frac{1}{1 + 0,25h^2/\tau} \right)^2 = \left(\frac{1}{1 + 0,25h^k} \right)^2, \quad \tau = h^{2-k}.$$

Спектральный метод анализа показывает, на каких гармониках достигается наименьшая скорость сходимости итерационного процесса (12). Поэтому для улучшения скорости сходимости можно применять комбинированные методы, дополнительно используя алгоритмы, быстро сходящиеся для высоких гармоник. Если рассматривать полностью распараллеленный итерационный процесс вида [1]

$$\frac{y_j^{s+1} - y_j^s}{\tau} = \sigma \Lambda_j (y_j^{s+1} - y_j^s) + \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y_{\alpha}^s, \quad j = \overline{1, p}, \quad (17)$$

то, применяя спектральный метод анализа, приходим к следующей задаче для коэффициентов разложения:

$$\begin{pmatrix} d_{1ln}^{s+1} \\ d_{2ln}^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\sigma)a/(1+\sigma a) & -b/(1+\sigma a) \\ a/(1+\sigma b) & (1-\sigma)b/(1+\sigma b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1ln}^s \\ d_{2ln}^s \end{pmatrix},$$

$$a = \tau \lambda_l, \quad b = \tau \lambda_n.$$

Собственные значения полученной матрицы определяются решениями квадратичного уравнения

$$\lambda^2 - (\sigma - 1) \left(\frac{a}{1 + \sigma a} + \frac{b}{1 + \sigma b} \right) \lambda + \frac{((\sigma - 1)^2 - 1)ab}{(1 + \sigma a)(1 + \sigma b)} = 0.$$

Например, для $\sigma = 1$ $\lambda_{1,2} = \pm (ab/(1+a)(1+b))^{1/2}$, т. е. скорость сходимости метода (17) совпадает с (15).

4. Численный эксперимент. По схемам, рассмотренным в пп. 2, 3, проведены тестовые расчеты, которые подтвердили теоретические выводы, полученные при анализе этих схем. Приведем только наиболее характерные результаты.

При анализе итерационного процесса (3) в случае, когда номера разных пространственных мод совпадают ($l=n$), получаем, что выражение для множителя перехода упрощается: $q_{ln} = 1/(1 + \tau \lambda_l)^2$ при $\tau > 0$. При этом чем больше параметр τ , тем быстрее должны сходиться итерации. Однако такой вывод является справедливым только в случае, когда все вычисления проводятся точно. В реальных вычислениях из-за погрешности округления в спектральном разложении появляются все гармоники и в соответствии с теоретическим анализом эти погрешности быстро растут. Приведем пример модельной задачи (1) $f(x_1, x_2) = 0$, когда начальное приближение задавалось в виде $u(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$. Параметры разностной схемы и итерационного процесса: $h = 0,1$, $\tau = 0,1$, расчет проводился на компьютере IBM PC с простой и двойной точностью. Изменение погрешности $\|z\|_C$ показано в табл. 1, а в табл. 2 показаны результаты расчета с $\tau = 0,4$.

Во второй серии расчетов сравнивалась эффективность итерационных методов (3), (10) при оптимальном выборе параметра τ . Начальное приближение задавалось в виде $u(x_1, x_2) = 0,5 \sin \pi x_1 (\sin \pi x_2 + \sin \pi(N - 1)x_2)$. В табл. 3 приведено число итераций, необходимых для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$.

Приведем разностную схему, которая лишена указанного выше недостатка:

$$\begin{aligned} \frac{y_1^{k+1/2} - y^k}{\tau} &= \Lambda_1 y_1^{k+1/2} + \Lambda_2 y_2^{k-1/2} + f, \\ \frac{y_2^{k+1/2} - y^k}{\tau} &= \Lambda_1 y_1^{k+1/2} + \Lambda_2 y_2^{k+1/2} + f, \end{aligned} \quad (18)$$

Таблица 1

s	1	2	4	5	6	10	13
Real 4	0,255—00	0,652—00	0,435—02	0,229—02	0,106—01	0,717+02	0,606+04
Real 8	0,255—00	0,625—01	0,425—02	0,108—02	0,277—03	0,121—05	0,823—04

Таблица 2

s	1	2	6	9	12
Real 8	0,414—01	0,171—02	0,502—08	0,105—05	0,341—02

Таблица 3

h	0,1	0,05	0,025
(3)	61	230	923
(10)	60	233	925

Таблица 4

s	1	2	4	5	6	8	9
Real 4	0,255—00	0,346—01	0,107—01	0,543—02	0,205—02	0,121—03	0,121—06

Таблица 5

h	0,1	0,05	0,025
(18)	58	231	923
(19)	55	215	855

$$y^{k+1} = (y_1^{k+1/2} + y_2^{k+1/2})/2, \quad y|_T = y_1^{k+1/2}|_T = y_2^{k-1/2}|_T = g(x).$$

Аналогично запишем распараллеленный алгоритм

$$\begin{aligned} \frac{y_1^{k+1/2} - y^k}{\tau} &= \Lambda_1 y_1^{k+1/2} + \Lambda_2 y_2^{k-1/2} + f, \\ \frac{y_2^{k+1/2} - y^k}{\tau} &= \Lambda_1 y_1^k + \Lambda_2 y_2^{k+1/2} + f, \end{aligned} \quad (19)$$

$$y^{k+1} = (y_1^{k+1/2} + y_2^{k+1/2})/2, \quad y|_T = y_1^{k+1/2}|_T = y_2^{k-1/2}|_T = g(x).$$

Следуя методике, предложенной в [2], можно показать, что данные схемы являются безусловно сходящимися. Результаты численных расчетов по схемам (18) и (19) для рассмотренной выше модельной задачи приведены в табл. 4 и 5.

Литература

1. Абрашин В. Н., Алейникова Т. Г. // Весті АНБ. Сер. фіз.-мат. наук. 1991. № 6. С. 5—11.
2. Чегис Райм. Ю., Чегис Рем. Ю. // Liet. matem. rink. 1991. Т. 31, N 3. С. 535—548.
3. Чегис Райм. Ю., Чегис Рем. Ю. // Дифференциальные уравнения и их применение. 1991. Вып. 46. С. 90—97.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
5. Абрашин В. Н., Муха В. А. Многокомпонентные разностные схемы типа метода переменных направлений для нестационарных задач математической физики. Мн., 1991. (Препринт / Ин-т мат. АНБ: 23 (437)).

Институт математики АН Беларуси

Поступила в редакцию
4 сентября 1992 г.