ИЮЛЬ 1993 г., ТОМ 29, № 7

УДК 519.63

Т. Г. АЛЕЙНИКОВА, И. А. ДЗЮБА

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО МЕТОДА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Построение эффективных алгоритмов решения задач математической физики в областях с криволинейной границей сопряжено с существенными трудностями. Несогласованность пространственной сетки, наличие в ней нерегулярных узлов нарушают однородность разностных схем, ухудшают их свойства и затрудняют исследование.

Оригинальный алгоритм дискретизации связной n-мерной области был предложен в [1]. Отличительная особенность данного подхода состоит в том, что на каждой прямой разбиения области строится своя равномерная сетка, на которой реализуются эффективные алгоритмы решения задач, рассматриваемых в этих областях. На основе данной конструктивной идеи в настоящей статье построены и исследованы разностные схемы решения многомерных эллиптических уравнений с краевыми условиями первого рода.

Итерационные процессы многокомпонентного метода переменных направлений для уравнений эллиптического типа в прямоугольной области исследованы на основе спектрального анализа в [2]. Применение спектрального метода для разностных алгоритмов, предлагаемых в нашей работе, затруднительно, поэтому их исследование, в том числе устойчивости и сходимости разностной схемы, сходимости итерационного процесса, проводится энергетическим методом.

1. Постановка задачи. Построение разностной схемы. В связной области $\bar{\Omega}^{(p)} \subset \mathbf{R}^{(p)}$ с достаточно гладкой границей Γ рассматривается линейное p-мерное уравнение эллиптического типа

$$Lu - du = -f(x), \tag{1}$$

L — эллиптический оператор вида

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \tag{2}$$

где $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, с граничными условиями

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{3}$$

Здесь и далее полагаем, что $d > 0$ и $k_\alpha(x)$, $f(x)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant c_1 \leqslant k_\alpha(x) \leqslant c_2, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\right| < M = \text{const}, \quad \alpha = \overline{1, p}. \tag{4}$$

Для простоты изложения построение пространственной сетки опишем для двумерного случая.

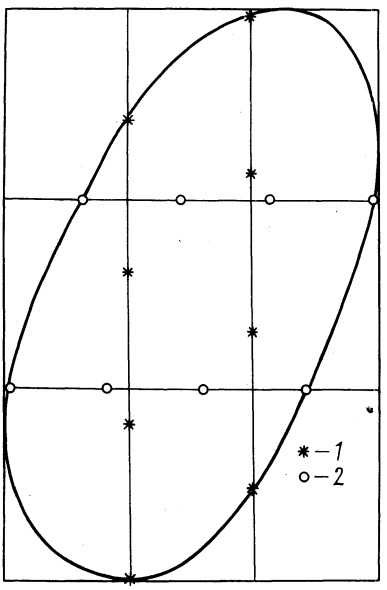
Построим сначала основную сетку. Для этого вокруг заданной области $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^2$ опишем прямоугольник таким образом, чтобы $\bar{\Omega}$ с каждой стороной прямоугольника имела только одну общую точку (рисунок). Выберем шаги: h_1 в направлении x_1, h_2 в направлении x_2. Проведем прямые $l_{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha = \overline{0, M_\alpha}$, $M_\alpha h_\alpha = b_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Точки пересечения прямых образуют основную сетку $\bar{\omega}_h = \{x_{i_1, i_2} = (i_1 h_1, i_2 h_2) \mid x_{i_1, i_2} \in \bar{\Omega}, i_\alpha = \overline{0, M_\alpha}, \alpha = 1, 2\}$ с границей $\gamma_h = \gamma_{h_1} \cup \gamma_{h_2}$, $\gamma_{h_\alpha} = \{b_{\alpha 1}^{i_{3-\alpha}}, b_{\alpha 1}^{i_{3-\alpha}}, i_{3-\alpha} = \overline{1, M_{3-\alpha} - 1}\}$, $\alpha = 1, 2$. На каждой прямой разбиения построим равномерную расчетную сетку, содержащую столько же внутренних узлов, сколько и основная. Граничные точки основной и расчетных сеток совпадают:

$$\bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x^\alpha_{i_1, i_2} \in l_{i_{1-\alpha}}, i_{3-\alpha} = \overline{1, M_{3-\alpha} - 1},$$

$$i_\alpha = \overline{0, N_\alpha^{i_{1-\alpha}} + 1}\}, \ \alpha = 1, 2.$$

Естественно, из построения сеток $\bar{\omega}_{h_1}$ и $\bar{\omega}_{h_2}$ следует, что возможно совпадение некоторых узлов из этих множеств.

Аналогично строится сетка и в многомерном случае, когда $p \geqslant 3$.



1 — узлы множества ω_{h1}; *2* — узлы множества ω_{h2}

Рассмотрим пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_{h_\alpha}$;

$$y_\alpha = y_\alpha(x^\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p}), \ x^\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p} \in \bar{\omega}_{h_\alpha}, \ \alpha = \overline{1, p}.$$

Задачу (1)—(3) аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{gathered} \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y - d y_\beta = -\varphi_\beta, \ \beta = \overline{1, p}, \\ y_\alpha|_\Gamma = 0, \\ \Lambda_\alpha y_\alpha = (a_\alpha y_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}})_{x_\alpha}. \end{gathered} \tag{5}$$

Коэффициенты разностной схемы можно определить как

$$a_\alpha = k_\alpha(x^\alpha_{i_1 \ldots i_\alpha - 1/2 \ldots i_p}), \ \varphi_\beta = f(x^\beta_{i_1 \ldots i_p}).$$

Такой способ аппроксимации правой части (1) обусловлен тем, что, как правило, доказательство устойчивости и сходимости разностных алгоритмов для эллиптических задач проводится по одной и той же схеме. Хотя, вообще говоря, функции φ_β можно рассматривать в точках основной сетки, тогда $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = f(x_{i_1 \ldots i_p})$.

Для коэффициентов разностной схемы a_α вследствие (4) справедливо неравенство $0 \leqslant c_1 \leqslant a_\alpha(x) \leqslant c_2$, $x \in \bar{\omega}_{h_\alpha}$, $\alpha = \overline{1, p}$.

Отметим, что наряду с сеточными функциями y_α, $\alpha = \overline{1, p}$, в (5) можно рассматривать «усредненное» решение

$$y = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha.$$

Как будет показано ниже, оно также сходится к решению дифференциальной задачи (1).

Введем следующие скалярные произведения и нормы:

$$(y_\alpha, y_\beta]_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \ldots \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} \ldots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} h_1 \ldots h_p y_{\alpha_{i_1 \ldots i_p}} y_{\beta_{i_1 \ldots i_p}},$$

$$\|y]|_\alpha^2=(y,y]_\alpha,\quad \|y\|_a^2=(ay,y),\ \|y]|_{a_\alpha}^2=(ay,y]_\alpha.$$

$$(y_\alpha,y_\beta)=\sum_{\substack{x^\alpha\in\omega_{h_\alpha}\\ x^\beta\in\omega_{h_\beta}}} h_1\ldots h_p y_\alpha(x^\alpha)y_\beta(x^\beta),\quad \|y\|^2=(y,y).$$

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Скалярно домножим каждое уравнение системы (5) на $\Lambda_\beta y_\beta$ соответственно и сложим полученные равенства

$$\sum_{\beta=1}^{p}\Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y_\alpha,\Lambda_\beta y_\beta\Big)-d\sum_{\beta=1}^{p}(y_\beta,\Lambda_\beta y_\beta)=-\sum_{\alpha=1}^{p}(\varphi_\beta,\Lambda_\beta y_\beta).$$

Применив разностную формулу Грина, получим

$$\Big\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\beta y_\beta\Big\|^2+d\sum_{\beta=1}^{p}(a_\beta y_{\beta_{\bar x_\beta}},y_{\beta_{\bar x_\beta}}]_\beta=\sum_{\beta=1}^{p}(\varphi_{\beta_{\bar x_\beta}},a_\beta y_{\beta_{\bar x_\beta}}]_\beta.$$

В левой части отбросим положительное слагаемое, а правую часть оценим по ε-неравенству, будем иметь при $\varepsilon=d/(2c_2)$

$$d\sum_{\beta=1}^{p}\|y_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_{a_\beta}^2\leqslant\frac{d}{2}\sum_{\beta=1}^{p}\|y_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_{a_\beta}^2+\frac{c_2}{2d}\sum_{\beta=1}^{p}\|\varphi_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_\beta^2.$$

Отсюда

$$\sum_{\beta=1}^{p}\|y_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_{a_\beta}^2\leqslant\frac{c_2}{d^2}\sum_{\beta=1}^{p}\|\varphi_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_\beta^2. \tag{6}$$

Таким образом, для каждой из разностных функций y_β, $\beta=\overline{1,p}$, в норме $\|\cdot]|_{a_\beta}$ доказана устойчивость по правой части. Если воспользоваться разностным аналогом теоремы вложения [3], то несложно получить неравенство

$$\|y_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_{a_\beta}^2\geqslant\frac{8}{l^2}c_1\|y_\beta\|^2,$$

где l — максимальная из длин сторон прямоугольного параллелепипеда, описанного вокруг области $\bar\Omega^{(p)}$, c_1 — нижняя граница коэффициентов a_α, $\alpha=\overline{1,p}$, из неравенства (4).

Следовательно,

$$\sum_{\beta=1}^{p}\|y_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_{a_\beta}^2\geqslant\frac{8c_1}{l^2}\sum_{\beta=1}^{p}\|y_\beta\|^2\geqslant\frac{8c_1}{l^2}\Big\|\frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}y_\beta\Big\|^2=c_3\|y\|^2.$$

Отсюда и из (6) получим устойчивость по правой части «усредненного» решения y разностной схемы

$$\|y\|^2\leqslant c\sum_{\beta=1}^{p}\|\varphi_{\beta_{\bar x_\beta}}]|_\beta^2, \tag{7}$$

где $c=c_2/(c_3d^2)$. Следовательно, доказана следующая

Теорема 1. *Разностная схема (5) устойчива по правой части, при этом выполняются неравенства (6), (7).*

Для оценки точности разностной схемы (5) введем разности $z=u_h-y$, $z_\alpha=u_h-y_\alpha$, $\alpha=\overline{1,p}$, где u_h — проекция на сетку ω_h решения задачи (1). Для погрешности метода получим следующую разностную задачу:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha z_\alpha-dz_\beta=-\psi_\beta,\quad \beta=\overline{1,p},$$

$$z_\alpha|_{\gamma_{h_\alpha}}=0,\quad \alpha=\overline{1,p},\quad z=\frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}z_\beta,\quad z|_{\gamma_h}=0.$$

Здесь $\psi_\beta = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u_h - du_h + \varphi_\beta$, $\beta = \overline{1, p}$. Несложно показать, что ψ_β имеет порядок $O(h)$, где $h = \max\{h_1, \ldots, h_p\}$. На границе области Ω $\psi_\beta = 0$, $\beta = \overline{1, p}$.

Теорема 2. *Если существует единственное решение задачи (1)—(3), принадлежащее классу $C_4(\bar{\Omega}^{(p)})$, то разностная схема (5) сходится к решению исходной дифференциальной задачи и имеют место оценки*

$$\sum_{\beta=1}^{p} \|z_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|_\beta \leqslant M_1 \sqrt{h},$$

$$\|z\| \leqslant M_2 \sqrt{h},$$

где M_1, M_2 — положительные постоянные, не зависящие от шагов сетки.

Доказательство сформулированной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. Реализация разностной схемы. Для реализации разностной схемы предлагается итерационный процесс вида

$$\sum_{\alpha=1}^{\beta} \Lambda_\alpha \overset{k+1}{y}_\alpha + \sum_{\alpha=\beta+1}^{p} \Lambda_\alpha \overset{k}{y}_\alpha - d\overset{k+1}{y}_\beta = -\varphi_\beta, \quad \beta = \overline{1, p},$$

$$y = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{N}{y}_\alpha, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Теорема 3. *Итерационный процесс (8) сходится и имеет место рекуррентное неравенство*

$$\overset{k+1}{Q}{}^2 \leqslant q \overset{k}{Q}{}^2, \text{ где } q = \frac{1}{1 + \dfrac{dh^2}{4c_2(p-1)}}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение величины $\overset{k+1}{\rho}_\alpha = \overset{k+1}{y}_\alpha - \overset{k}{y}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, p}$, тогда для ρ_α можно записать соответствующие (8) однородные уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{\beta} \Lambda_\alpha \overset{k+1}{\rho}_\alpha + \sum_{\alpha=\beta+1}^{p} \Lambda_\alpha \overset{k}{\rho}_\alpha - d\rho_\beta = 0, \quad \beta = \overline{1, p}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Скалярно домножим каждое из уравнений (9) на $(1 + h^\varkappa)\Lambda_\beta \overset{k+1}{\rho}_\beta - \Lambda_\beta \overset{k}{\rho}_\beta$, где $\varkappa > 0$ — параметр, который будет определен ниже.

Преобразования проведем поэтапно. Сначала умножим каждое из уравнений (9) на $\Lambda_\beta(\overset{k+1}{\rho}_\beta - \overset{k}{\rho}_\beta)$ и просуммируем полученные равенства. Рассмотрим отдельно некоторые слагаемые:

$$(d\overset{k+1}{\rho}_\beta, \Lambda_\beta(\overset{k+1}{\rho}_\beta - \overset{k}{\rho}_\beta)) = d(\overset{k+1}{\rho}_\beta, (a_\beta(\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}} - \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}))_{x_\beta}) =$$

$$= -d(\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}, a_\beta(\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}} - \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}})) =$$

$$= -d\left(\frac{\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}} + \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}}{2} + \frac{\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}} - \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}}{2}, a_\beta(\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}} - \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}})\right) =$$

$$= -\frac{d}{2}(a_\beta \overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}, \overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]_\beta + \frac{d}{2}(a_\beta \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}, \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]_\beta -$$

$$- \frac{d}{2}\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}} - \overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}\|^2_{a_\beta} = -\frac{d}{2}\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|^2_{a_\beta} +$$

$$+\frac{d}{2}\|\overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|^2_{a_\beta}-\frac{d}{2}\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}-\overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}\|^2_{a_\beta}.$$

Другое слагаемое можно записать следующим образом (после суммирования по β):

$$\sum_{\beta=1}^{p}(\Lambda_\beta(\overset{k+1}{\rho}_\beta-\overset{k}{\rho}_\beta),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\beta}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha+\sum_{\alpha=\beta+1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k}{\rho}_\alpha)=\frac{1}{2}\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2-$$

$$-\frac{1}{2}\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k}{\rho}_\alpha\|^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\Lambda_\alpha(\overset{k+1}{\rho}_\alpha-\overset{k}{\rho}_\alpha)\|^2.$$

Результатом первого этапа будет соотношение

$$\frac{d}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|^2_{a_\beta}+\frac{1}{2}\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\Lambda_\alpha(\overset{k+1}{\rho}_\alpha-\overset{k}{\rho}_\alpha)\|^2+\frac{d}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}-\overset{k}{\rho}_{\beta\bar{x}_\beta}\|^2_{a_\beta}=$$

$$=\frac{d}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{k}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|^2_{a_\beta}+\frac{1}{2}\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k}{\rho}_\alpha\|^2. \qquad (10)$$

Вторым этапом преобразований является скалярное умножение каждого из уравнений (9) на $h^\varkappa\Lambda_\beta\overset{k+1}{\rho}_\beta$ с последующим суммированием по β:

$$h^\varkappa d\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|^2_{a_\beta}+h^\varkappa\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2=$$

$$=h^\varkappa\sum_{\alpha=\beta+1}^{p}(\Lambda_\beta\overset{k+1}{\rho}_\beta,\Lambda_\alpha(\overset{k+1}{\rho}_\alpha-\overset{k}{\rho}_\alpha)).$$

Правую часть этого равенства преобразуем, применяя ε-неравенство с $\varepsilon=1/2(p-1)$:

$$h^\varkappa d\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|^2_{a_\beta}+h^\varkappa\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(p-1)h^{2\varkappa}}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\Lambda_\alpha(\overset{k+1}{\rho}_\alpha-\overset{k}{\rho}_\alpha)\|^2.$$

После суммирования полученных неравенств будем иметь

$$\sum_{\alpha=1}^{p}h^\varkappa d\|\overset{k+1}{\rho}_{\beta_{\bar{x}_\beta}}]|^2_{a_\beta}+h^\varkappa\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(p-1)h^{2\varkappa}}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\Lambda_\alpha(\overset{k+1}{\rho}_\alpha-\overset{k}{\rho}_\alpha)\|^2.$$

Оценим следующую норму:

$$\|\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2=\|(a_\alpha\overset{k+1}{\rho}_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}})_{x_\alpha}\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{h^2}\|a_\alpha\overset{k+1}{\rho}_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}}\|^2\leqslant\frac{4c_2}{h^2}\|\overset{k+1}{\rho}_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}}]|^2_{a_\alpha}.$$

В результате этого этапа преобразований получим соотношение

$$h^{\varkappa} d\left(1-\frac{2h^{\varkappa}c_2(p-1)}{d}\right)\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{k+1}{\rho}_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}}]|^2_{a_\alpha}+$$

$$+h^{\varkappa}\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\Lambda_\alpha(\overset{k+1}{\rho}_\alpha-\overset{k}{\rho}_\alpha)\|^2. \qquad (11)$$

Сложим неравенства (10) и (11)

$$\left(1+2h^{\varkappa}\left(1-\frac{2h^{\varkappa}c_2(p-1)}{d}\right)\right)\frac{d}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{k+1}{\rho}_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}}]|^2_{a_\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2}(1+2h^{\varkappa})\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k+1}{\rho}_\alpha\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{k}{\rho}_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}}]|^2_{a_\alpha}+\frac{1}{2}\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k}{\rho}_\alpha\|^2.$$

Введем обозначение

$$\overset{k}{Q}{}^2=\frac{d}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{k}{\rho}_{\alpha_{\bar{x}_\alpha}}]|^2_{a_\alpha}+\frac{1}{2}\|\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha\overset{k}{\rho}_\alpha\|^2.$$

Тогда $\overset{k+1}{Q}{}^2\leqslant\frac{1}{1+2\delta h^{\varkappa}}\cdot\overset{k}{Q}{}^2$, где $\delta=1-\frac{2h^{\varkappa}c_2(p-1)}{d}>0$. Из последнего равенства следует сходимость итерационного процесса (8). Для определения скорости сходимости рассмотрим коэффициент сжатия $q(\varkappa)=\frac{1}{1+2\delta h^{\varkappa}}$, который зависит от параметра $\varkappa$. Поскольку $\varkappa$ мы можем выбрать произвольно, найдем такое значение параметра $\varkappa$, при котором $q(\varkappa)$ принимает минимальное значение. Для этого достаточно исследовать на максимум функцию

$$\xi(\varkappa)=h^{\varkappa}-\frac{2c_2(p-1)}{d}h^{2\varkappa-2}.$$

Найдем производную этой функции

$$\xi'(\varkappa)=\ln h h^{\varkappa}\left(1-\frac{4c_2(p-1)}{d}h^{\varkappa-2}\right).$$

Точка экстремума $\varkappa_0=2+\log_h\frac{d}{4c_2(p-1)}$. Знак второй производной в этой точке определяется из соотношения

$$(\ln h)^2\frac{d}{4c_2(p-1)}h^2\left(1-\frac{8c_2(p-1)}{d}\frac{d}{4c_2(p-1)}\right)=$$

$$=-\ln^2 h h^2\frac{d}{4c_2(p-1)}<0.$$

Следовательно, $\varkappa_0$ есть точка максимума функции $\xi(\varkappa)$. Коэффициент сжатия q в этой точке равен

$$q=\frac{1}{1+\frac{dh^2}{4c_2(p-1)}}.$$

Таким образом, доказана сходимость итерационного процесса (8) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q к решению разностной задачи (5).

Авторы выражают благодарность В. Н. Абрашину за указание направления исследований и внимание к работе.

Литература

1. Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.// Дифференц. уравнения и их применение. Вильнюс, 1988. Вып. 43. С. 22—30.
2. Абрашин В. Н., Алейникова Т. Г.// Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. № 6. С. 5—11.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1989.

Институт математики
АН Беларуси

Поступила в редакцию
1 марта 1993 г.