

**С.М. Бородич**

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,  
г. Витебск, Беларусь*

## МАКСИМАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИССИПАЦИЕЙ

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  с гладкой границей  $\partial\Omega$  рассматривается неавтономное гиперболическое уравнение с диссипацией

$$\partial_t^2 u + \varepsilon \partial_t u = a(t) \Delta u - f(t, u) - g(t, x), \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $a(t) \in C([0, +\infty))$ ,  $f(t, u) \in C^{0,1}([0, +\infty) \times \mathbf{R})$ ,  $g(t, x) \in L_\infty([0, +\infty), L_2(\Omega))$ . Предполагается, что выполнены условия:

$$a(t) \geq \alpha > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \tilde{a} \quad (\tilde{a} < +\infty);$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, u) = \tilde{f}(u), \quad \tilde{f}(u) \in C^1(\mathbf{R}),$$

$$f(t, u)u \geq -C, \quad -C \leq f'_u(t, u) \leq C(u^2 + 1),$$

$$|\tilde{f}'_u(u)| \leq C(|u|^\gamma + 1) \quad (0 \leq \gamma < 2),$$

$$|f(t, u) - \tilde{f}(u)| \leq k(t)(|u|^3 + 1),$$

где  $C > 0$ ,  $k(t) \in C([0, +\infty))$ ,  $k(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;

$$|g(t, x)| \leq h(x), \quad h(x) \in L_2(\Omega), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t, x) = \tilde{g}(x).$$

Уравнение (1) порождает в пространстве  $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$  семейство эволюционных операторов  $\{S_{t,\tau}, t \geq \tau \geq 0\}$ :

$$S_{t,\tau} : y_0 \rightarrow y(t),$$

где  $y_0 = (u_0, p_0) \in E$ ,  $y(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ ,  $u(t)$  – решение уравнения (1) с начальными условиями

$$u|_{t=\tau} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=\tau} = p_0.$$

Исследуется вопрос о существовании и свойствах максимального аттрактора семейства  $\{S_{t,\tau}\}$ . При этом под максимальным аттрактором семейства эволюционных операторов  $\{S_{t,\tau}\}$  понимается такое компактное в  $E$  множество  $\mathcal{A}$ , которое притягивает при  $t \rightarrow +\infty$  траекторию  $S_{t,0}B$  любого ограниченного в  $E$  множества  $B$  и содержится в любом другом компактном множестве, обладающем таким же свойством притяжения.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим автономное уравнение

$$\partial_t^2 v + \varepsilon \partial_t v = \tilde{a} \Delta v - \tilde{f}(v) - \tilde{g}(x), \quad v|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

которое порождает в  $E$  полугруппу операторов  $\{S_t, t \geq 0\}$  (см. [1]).

Предположим, что полугруппа  $\{S_t\}$  имеет конечное число неподвижных точек  $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ , и пусть  $y_i$  – какая-либо из них. Легко видеть, что  $y_i = (z_i, 0)$ , где  $z_i = z_i(x)$  – решение уравнения

$$\tilde{a} \Delta z - \tilde{f}(z) - \tilde{g}(x) = 0, \quad z|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

Обозначим через  $M^H(y_i)$  совокупность всех точек  $y \in E$ , через которые проходят траектории  $S_t y_0$ , продолжаемые для всех  $t \leq 0$  и удовлетворяющие условию:  $S_t y_0 \rightarrow y_i$  в  $E$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

**Теорема.** Пусть функции  $a(t)$ ,  $f(t, u)$ ,  $\tilde{f}(u)$  и  $g(t, x)$  удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда семейство эволюционных операторов  $\{S_{t,\tau}\}$ , отвечающее уравнению (1), обладает максимальным аттрактором  $\mathcal{A}$ , причем:

1) множество  $\mathcal{A}$  строго инвариантно относительно операторов полугруппы  $\{S_t\}$ , порожденной уравнением (2):  $S_t \mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$ ,

$$2) \mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^N M^H(y_i).$$

## Литература

1. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 294 с.

УДК 517.95

**А.Л. Гладков<sup>1</sup>, Т.В. Кавитова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,  
г. Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Витебский государственный университет им. П.М. Машиерова,  
г. Витебск, Беларусь

## ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНОСТЯМИ В УРАВНЕНИИ И ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Рассматривается нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t) dy - b(x, t)u^q, \quad x \in \Omega, t \in (0, T), \quad (1)$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где  $r, p, q, l$  – положительные постоянные,  $\Omega$  – ограниченная область в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ , с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $T > 0$ .

Относительно данных задачи (1)–(3) делаются следующие предположения: