

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

**Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин,
Ю.А. Баранкова**

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Сетевые модели. Теория игр

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2025*

УДК 519.8(076.5)
ББК 22.185я73
И20

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 26.02.2025.

Авторы: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Ж.В. Иванова**; доцент кафедры прикладного и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин**; студентка 4 курса факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова **Ю.А. Баранкова**

Р е ц е н з е н т ы :

старший преподаватель кафедры «Математика
и информационные технологии» УО «ВГТУ» *А.В. Коваленко*;
доцент кафедры информационных технологий и управления бизнесом
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
С.А. Прохожий

Иванова, Ж.В.

И20 Исследование операций. Сетевые модели. Теория игр : методические рекомендации / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, Ю.А. Баранкова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2025. – 48 с.

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Прикладная информатика (по направлениям)» и «Управление информационными ресурсами». В нем содержатся разработки лабораторных работ по темам «Сетевые модели» и «Теория игр».

УДК 519.8(076.5)
ББК 22.185я73

© Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Баранкова Ю.А., 2025
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Лабораторная работа № 1. Задача о максимальном потоке	5
1. Вопросы к лабораторной работе	5
2. Алгоритм Форда нахождения максимального потока	5
3. Задания для лабораторной работы	10
Лабораторная работа № 2. Задача о кратчайшем маршруте	12
1. Вопросы к лабораторной работе	12
2. Алгоритм нахождения кратчайшего пути из вершины E_0 в вершину E_n	12
3. Задания для лабораторной работы	15
Лабораторная работа № 3. Задача о потоке минимальной стоимости	16
1. Вопросы к лабораторной работе	16
2. Алгоритм Басакера – Гоуэна нахождения оптимального потока	16
3. Задания для лабораторной работы	19
Лабораторная работа № 4. Игры с нулевой суммой	21
1. Вопросы к лабораторной работе	21
2. Игры с седловой точкой	21
3. Упрощение игры	23
4. Задания для лабораторной работы	24
Лабораторная работа № 5. Игры в смешанных стратегиях	26
1. Вопросы к лабораторной работе	26
2. Методы решения игр 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$	26
3. Сведение игры с нулевой суммой к задаче линейного программирования	30
4. Задания для лабораторной работы	34
Лабораторная работа № 6. Игры с природой	35
1. Вопросы к лабораторной работе	35
2. Постановка задачи игры с природой	36
3. Анализ матрицы выигрышей	36
4. Задания для лабораторной работы	42
Литература	47

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Прикладная информатика (по направлениям)» и «Управление информационными ресурсами». Его основное назначение – помочь студентам при подготовке к лабораторной работе и дать рекомендации по выполнению самой лабораторной работы.

Издание охватывает вопросы из дисциплин «Исследование операций», «Исследование операций и методы оптимизации», «Ситуационный анализ и моделирование управленческих решений», относящиеся к разделам «Сетевые модели» и «Теория игр».

В нем содержатся методические рекомендации и задания к 6 лабораторным работам. Каждый параграф в основном состоит из трех частей. В первой части перечислены основные вопросы, на которые нужно ответить студентам при защите лабораторной работы. Во второй части приводится алгоритм выполнения лабораторной работы, разобраны примеры, иллюстрирующие применение алгоритма. В третьей части приведены задания для лабораторной работы.

В конце данного издания приведен список литературы, необходимой для изучения вышеназванных разделов исследования операций.

Материал, приведенный в методических рекомендациях, соответствует учебным программам по предмету «Исследование операций» для специальности «Прикладная математика», «Исследование операций и методы оптимизации» для специальности «Прикладная информатика (по направлениям)», «Ситуационный анализ и моделирование управленческих решений» для специальности «Управление информационными ресурсами».

Данные материалы могут быть использованы студентами специальностей «Информационные системы и технологии. Информационные системы и технологии в здравоохранении», «Программная инженерия» при изучении соответствующих тем в курсах «Методы оптимизации» и «Методы оптимизации и алгоритмы принятия решений».

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Задача о максимальном потоке

1. Вопросы к лабораторной работе

1. Дайте определение ориентированного и неориентированного графа.
2. Что называется дугой (ребром) графа?
3. Дайте определение сети.
4. Какие вершины сети называются источником, стоком, промежуточными?
5. Что такое пропускная способность дуги?
6. Что такое остаточная пропускная способность дуги?
7. Что называется потоком по дуге (по сети)?
8. Что такое пропускная способность пути из источника в сток?
9. Постройте математическую модель задачи о потоке максимальной мощности
10. Что называется разрезом на сети?
11. Что называется пропускной способностью разреза?
12. Сформулируйте теорему Форда-Фалкерсона и следствие из нее.

2. Алгоритм Форда нахождения максимального потока. Рассмотрим сеть $G = (E, \vec{e})$. Предположим, что она является симметричным графом, т.е. если дуга $(E_i, E_j) \in G$, то и дуга $(E_j, E_i) \in G$ (хотя на самом деле такой дуги может и не быть). Пусть сеть имеет один источник и один сток. Присвоим вершинам сети следующие номера $E_0, E_1, \dots, E_n$, где E_0 – источник, E_n – сток, остальные вершины являются промежуточными. Обозначим через b_{ij} пропускную способность дуги (E_i, E_j)

Предварительный шаг. Записываем пропускные способности дуг сети в таблицу размером $(n + 1) \times (n + 1)$. Если пропускная способность дуги (E_i, E_j) $b_{ij} \geq 0$, а пропускная способность обратной ей дуги (E_j, E_i) $b_{ji} = 0$ (сеть не содержит дуги (E_j, E_i)), то в клетку (i, j) записываем величину b_{ij} , а в клетку (j, i) – ноль, если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то клетки (i, j) и (j, i) не заполняем.

Общий шаг. Общий повторяющийся шаг состоит из трех этапов.

Действие 1. а) Находим путь из E_0 в E_n с общей пропускной способностью больше нуля. Для этого столбец соответствующий вершине E_0 помечаем знаком *. Отыскиваем в строке E_0 клетки с пропускной способностью $b_{0j} > 0$. Столбцы, где эти клетки находятся, помечаем сверху номером рассматриваемой строки (цифрой 0). В результате окажутся выделенными все дуги (E_0, E_j) с положительной пропускной способностью. Они могут служить первыми дугами пути из E_0 в E_n .

б) Последовательно просматриваем строки, номера которых совпадают с номерами помеченных столбцов. В каждой такой строке отыскиваем элементы $b_{ij} > 0$, находящиеся в непомеченных столбцах, и отмечаем эти столбцы номером рассматриваемой строки.

Возможны два случая.

1-й случай: продолжаем просмотр строк, номера которых совпадают с номерами помеченных столбцов, пока не окажется помеченным столбец E_n – сток (это означает, что удалось найти путь из E_0 в E_n с пропускной способностью больше нуля). Находим искомый путь w , используя пометки столбцов. При этом метка столбца – есть номер начальной вершины дуги, входящей в найденный путь. Вершина, соответствующая данному столбцу, является конечной вершиной этой дуги. **Переходим к действию 2.**

Действие 2. Определяем пропускную способность W найденного пути, которая равна наименьшей из пропускных способностей дуг, входящих в этот путь:

$$W = \min_{(i, j) \in w} b_{ij}.$$

Действие 3. Определяем остаточные пропускные способности дуг найденного пути и симметричных им. Для этого от пропускных способностей прямых дуг пути (направление на которых совпадает с направлением от E_0 к E_n) вычитаем W , к пропускным способностям симметричных дуг прибавляем W . Получаем граф с новыми пропускными способностями дуг и новую таблицу.

Возвращаемся к **действию 1.**

2-й случай. В просматриваемых строках не окажется положительных элементов, расположенных в непомеченных столбцах, столбец E_n пометить не удалось. В этом случае путь из E_0 в E_n с пропускной способностью больше нуля отсутствует; общий повторяющийся шаг закончен. Вершины, находящиеся в помеченных столбцах таблицы, образуют подмножество R (эти вершины достижимы по некоторому пути из источника E_0). Остальные вершины находятся в подмножестве $\bar{R}$. Дуги исходящие из вершин $E_i \in R$ и входящие в вершины $E_j \in \bar{R}$, образуют разрез с минимальной пропускной способностью

$$b(R, \bar{R}) = \nu = \sum_{\substack{i \in R, \\ j \in \bar{R}}} b_{ij},$$

где b_{ij} – пропускные способности дуг этого разреза. **Переходим к заключительному шагу алгоритма.**

Заключительный шаг. Из элементов начальной таблицы вычитаем элементы таблицы, полученной на последнем шаге. Величина максимального потока равна сумме элементов нулевой строки или элементов последнего столбца полученной таблицы.

Пример. Для сети, изображенной на рисунке 1, найти величину максимального потока из источника E_0 в сток E_4 и разрез минимальной пропускной способности.

Решение. Предварительный шаг. Построим таблицу 5×5 (таблица 1). Так как сеть содержит дугу (E_0, E_1) с пропускной способностью 17, а дуги (E_1, E_0) нет, то в клетке (E_0, E_1) ставим 17, в клетке (E_1, E_0) ставим 0. Аналогично в клетке (E_0, E_2) ставим 19, в клетке (E_2, E_0) ставим 0. Сеть не содержит ни дуги (E_0, E_3) ни дуги (E_3, E_0) , поэтому клетки, соответствующие этим дугам не заполняем. Сеть содержит как дугу (E_1, E_3) с пропускной способностью 12, так и дугу (E_3, E_1) с пропускной способностью 12 (ребро (E_1, E_3) можно рассматривать как две дуги (E_1, E_3) и (E_3, E_1)). Поэтому в клетках (E_1, E_3) и (E_3, E_1) ставим 12. Аналогично заполняем остальные клетки таблицы.

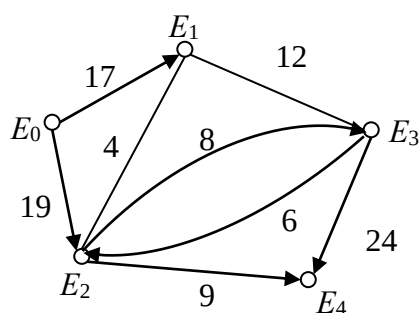


Рис. 1

Таблица 1

	*	0	0	1	2
$E_j \backslash E_i$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		17	<u>19</u>		
E_1	0		4	12	
E_2	0	4		8	<u>9</u>
E_3		12	6		24
E_4			0	0	

Общий шаг.

Действие 1. а) Помечаем столбец, соответствующий вершине E_0 , знаком *. Просматриваем нулевую строку. Клетки (E_0, E_1) и (E_0, E_2) соответствуют дугам с положительной пропускной способностью. Помечаем столбцы, соответствующие вершинам E_1 и E_2 , цифрой 0.

б) Просматриваем строку E_1 . В этой строке положительные элементы $b_{1j} > 0$ располагаются в столбцах, соответствующих вершинам E_2 и E_3 , но столбец E_2 уже помечен, следовательно, помечаем столбец E_3 номером 1. Рассматриваем строку E_2 и помечаем столбец E_4 номером 2, так как $b_{24} = 9$.

Мы нашли путь из E_0 в E_4 . с пропускной способностью больше нуля. Так как столбец E_4 помечен меткой 2, то последняя дуга найденного пути (E_2E_4) . Подчеркиваем пропускную способность $b_{24} = 9$, соответствующую клетке (E_2E_4) , переходим к столбцу E_2 . Так как он помечен меткой 0, то в путь включена дуга (E_0E_2) . Подчеркиваем пропускную способность $b_{02} = 19$. Получили путь $w_1 = (E_0 - E_2 - E_4)$.

Действие 2. Находим пропускную способность данного пути:

$$W_1 = \min (b_{02}, b_{24}) = \min (19, 9) = 9.$$

Действие 3. Определяем остаточные пропускные способности дуг найденного пути и симметричных им. От чисел, находящихся в клетках (E_0E_2) и (E_2E_4) и вычитаем 9, к числам, находящимся в клетках (E_2E_0) и (E_4E_2) прибавляем 9.

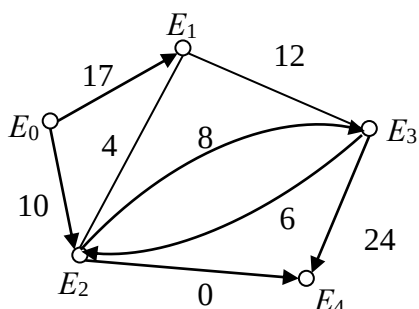


Рис. 2

Таблица 2

	*	0	0	1	3
$E_j \backslash E_i$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		<u>17</u>	10		
E_1	0		4	<u>12</u>	
E_2	9	4		8	0
E_3		12	6		<u>24</u>
E_4			9	0	

Получаем таблицу 2. На рисунке 2 представлен граф, дугам (E_0E_2) и (E_2E_4) которого приписаны остаточные пропускные способности, с учетом того, что по пути $E_0 - E_2 - E_4$ идет поток мощностью 9 единиц.

Возвращаемся к действию 1. Аналогично предыдущим действиям с помощью таблицы 2 находим новый путь из источника E_0 в сток E_4 .

Получаем путь $w_2 = (E_0 - E_1 - E_3 - E_4)$, с пропускной способностью

$$W_2 = \min(b_{01}, b_{13}, b_{34}) = \min(17, 12, 24) = 12.$$

Изменяем пропускные способности пути W_2 , получим граф с новыми (остаточными) пропускными способностями (рисунок 3) и новую таблицу 3.

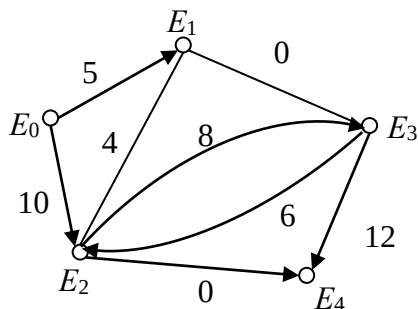


Рис. 3

Таблица 3

	*	0	0	2	3
$E_j \backslash E_i$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		5	<u>10</u>		
E_1	12		4	0	
E_2	9	4		<u>8</u>	0
E_3		24	6		<u>12</u>
E_4			9	12	

Возвращаемся к действию 1. С помощью таблицы 3 находим новый путь из источника E_0 в сток E_4 . Получаем путь $w_3 = (E_0 - E_2 - E_3 - E_4)$, с пропускной способностью

$$W_3 = \min(b_{02}, b_{23}, b_{34}) = \min(10, 8, 12) = 8.$$

Изменяя пропускные способности пути W_3 , получим граф на рисунке 4 и таблицу 4. Убеждаемся, что больше не существует пути из E_0 в E_4 с пропускной способностью больше нуля.

Таблица 4

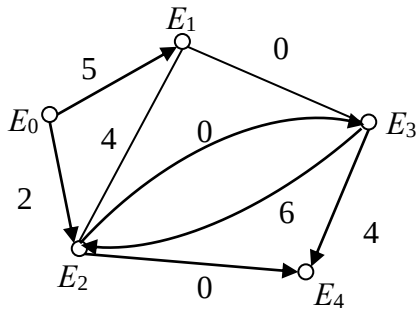


Рис. 4

	*	0	0		
$E_j \backslash E_i$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		5	2		
E_1	12		4	0	
E_2	17	4		0	0
E_3		24	14		4
E_4			9	20	

Ориентируясь на помеченные столбцы в таблице 4, находим разрез минимальной пропускной способности. Подмножество R образуют помеченные вершины E_0, E_1, E_2 , подмножество $\bar{R}$ – непомеченные вершины E_3, E_4 . Таким образом, разрез $(R^*, \bar{R}^*)$ с минимальной пропускной способностью образуют дуги (E_1, E_3) , (E_2, E_3) , (E_2, E_4) . Удалив эти дуги, мы блокируем путь из источника в сток. Пропускная способность разреза $b(R^*, \bar{R}^*) = b_{13} + b_{23} + b_{24} = 12 + 8 + 9 = 29$.

Переходим к заключительному шагу.

Заключительный шаг. Из элементов начальной таблицы вычитаем элементы таблицы, полученной на последнем шаге. Величина максимального потока равна сумме элементов нулевой строки или элементов четвертого столбца полученной таблицы (таблица 5). $W_{\max} = 29$.

Таблица 5

	*	0	0		
$E_j \backslash E_i$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		12	17		
E_1	-12		0	12	
E_2	-17	0		8	9
E_3		-12	-8		20
E_4			-9	-20	

Замечание. В случае, когда сеть, с вершинами $E_1, E_2, \dots, E_n$, имеет несколько источников и несколько стоков, нахождение оптимального потока можно свести к задаче с одним источником и одним стоком. Для этого добавим две несуществующие вершины E_0 и E_{n+1} , где E_0 – источник, E_{n+1} – сток. Соединим фиктивными дугами новый источник E_0 с настоящими источниками и новый сток E_{n+1} с настоящими стоками. Пропускная способность дуги E_0E_j , где E_j – реальный источник, равна сумме пропускных способностей дуг, выходящих из вершины E_j . Аналогично, пропускная способность дуги E_iE_{n+1} , где E_i – реальный сток, равна сумме пропускных способностей дуг, входящих в вершину E_i .

3. Задания для лабораторной работы

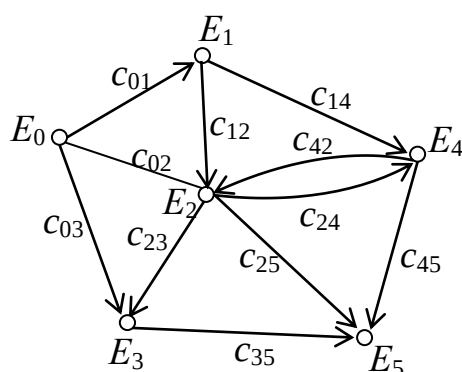


Рис. 5

Задание 1. На рисунке 5 задана сеть $G = (E, e)$ с источником в вершине E_0 и стоком в вершине E_5 . Значения c_{ij} пропускных способностей дуг графа заданы в соответствии с вариантом в таблице 6. С помощью алгоритма Форда найдите максимальный поток из вершины E_0 в вершину E_5 и разрез минимальной пропускной способности.

Таблица 6

Вариант	c_{ij}
1.	$c_{01} = 35, c_{02} = c_{20} = 16, c_{03} = 19, c_{12} = 15, c_{14} = 20, c_{23} = 10, c_{24} = 8, c_{25} = 9, c_{35} = 19, c_{42} = 9, c_{45} = 19.$
2.	$c_{01} = 20, c_{02} = c_{20} = 15, c_{03} = 9, c_{12} = 10, c_{14} = 21, c_{23} = 12, c_{24} = 18, c_{25} = 11, c_{35} = 10, c_{42} = 24, c_{45} = 15.$
3.	$c_{01} = 10, c_{02} = c_{20} = 5, c_{03} = 8, c_{12} = 7, c_{14} = 11, c_{23} = 12, c_{24} = 14, c_{25} = 12, c_{35} = 9, c_{42} = 14, c_{45} = 12.$
4.	$c_{01} = 11, c_{02} = c_{20} = 6, c_{03} = 9, c_{12} = 5, c_{14} = 10, c_{23} = 12, c_{24} = 15, c_{25} = 10, c_{35} = 9, c_{42} = 8, c_{45} = 14.$
5.	$c_{01} = 21, c_{02} = c_{20} = 25, c_{03} = 19, c_{12} = 18, c_{14} = 11, c_{23} = 15, c_{24} = 17, c_{25} = 10, c_{35} = 14, c_{42} = 16, c_{45} = 23,$
6.	$c_{01} = 20, c_{02} = c_{20} = 15, c_{03} = 18, c_{12} = 12, c_{14} = 17, c_{23} = 13, c_{24} = 21, c_{25} = 20, c_{35} = 9, c_{42} = 14, c_{45} = 12.$
7.	$c_{01} = 10, c_{02} = c_{20} = 5, c_{03} = 8, c_{12} = 7, c_{14} = 11, c_{23} = 12, c_{24} = 14, c_{25} = 12, c_{35} = 9, c_{42} = 15, c_{45} = 14.$
8.	$c_{01} = 11, c_{02} = c_{20} = 13, c_{03} = 12, c_{12} = 8, c_{14} = 7, c_{23} = 5, c_{24} = 12, c_{25} = 10, c_{35} = 9, c_{42} = 6, c_{45} = 13.$
9.	$c_{01} = 15, c_{02} = c_{20} = 12, c_{03} = 11, c_{12} = 10, c_{14} = 9, c_{23} = 14, c_{24} = 13, c_{25} = 12, c_{35} = 10, c_{42} = 8, c_{45} = 16.$
10.	$c_{01} = 13, c_{02} = c_{20} = 15, c_{03} = 19, c_{12} = 20, c_{14} = 17, c_{23} = 9, c_{24} = 10, c_{25} = 14, c_{35} = 19, c_{42} = 13, c_{45} = 17.$
11.	$c_{01} = 15, c_{02} = c_{20} = 13, c_{03} = 16, c_{12} = 14, c_{14} = 18, c_{23} = 11, c_{24} = 10, c_{25} = 19, c_{35} = 13, c_{42} = 12, c_{45} = 17,$
12.	$c_{01} = 20, c_{02} = c_{20} = 15, c_{03} = 14, c_{12} = 16, c_{14} = 19, c_{23} = 14, c_{24} = 18, c_{25} = 13, c_{35} = 11, c_{42} = 18, c_{45} = 15.$

13.	$c_{01} = 17, c_{02} = c_{20} = 13, c_{03} = 19, c_{12} = 15, c_{14} = 20, c_{23} = 10,$ $c_{24} = 14, c_{25} = 12, c_{35} = 19, c_{42} = 15, c_{45} = 18.$
14.	$c_{01} = 12, c_{02} = c_{20} = 7, c_{03} = 10, c_{12} = 9, c_{14} = 13, c_{23} = 14,$ $c_{24} = 16, c_{25} = 14, c_{35} = 11, c_{42} = 16, c_{45} = 14.$

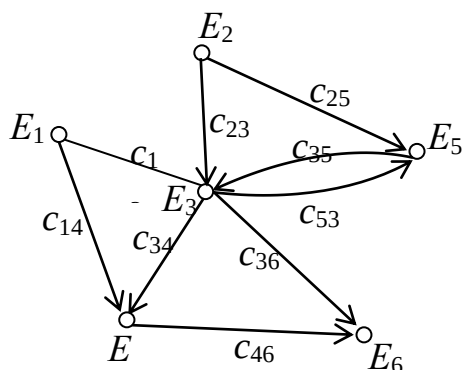


Рис. 6

Задание 2. На рисунке 6 задана сеть $G = (E, e)$ с источниками в вершинах E_1 и E_2 , стоками в вершинах E_5, E_6 . Значения c_{ij} пропускных способностей дуг графа заданы в соответствии с вариантом в таблице 7. С помощью алгоритма Форда найдите максимальный поток из источников в стоки.

Таблица 7

Вариант	c_{ij}
1.	$c_{13} = 35, c_{14} = c_{23} = 16, c_{25} = 19, c_{53} = 15, c_{35} = 20, c_{36} = 10,$ $c_{34} = 9, c_{46} = 19.$
2.	$c_{13} = 20, c_{14} = c_{23} = 15, c_{25} = 9, c_{53} = 10, c_{35} = 21, c_{36} = 12,$ $c_{34} = 18, c_{46} = 15,$
3.	$c_{13} = 10, c_{14} = c_{23} = 5, c_{25} = 8, c_{53} = 7, c_{35} = 11, c_{36} = 12, c_{34} = 14,$ $c_{46} = 12,$
4.	$c_{13} = 11, c_{14} = c_{23} = 6, c_{25} = 9, c_{53} = 5, c_{35} = 10, c_{36} = 12, c_{34} = 15,$ $c_{46} = 14.$
5.	$c_{13} = 21, c_{14} = c_{23} = 25, c_{25} = 19, c_{53} = 18, c_{35} = 11, c_{36} = 15,$ $c_{34} = 17, c_{46} = 23.$
6.	$c_{13} = 20, c_{14} = c_{23} = 15, c_{25} = 18, c_{53} = 12, c_{35} = 17, c_{36} = 13,$ $c_{34} = 21, c_{46} = 12.$
7.	$c_{13} = 10, c_{14} = c_{23} = 5, c_{25} = 8, c_{53} = 7, c_{35} = 11, c_{36} = 12, c_{34} = 14,$ $c_{46} = 14.$
8.	$c_{13} = 11, c_{14} = c_{23} = 13, c_{25} = 12, c_{53} = 8, c_{35} = 7, c_{36} = 5, c_{34} = 12,$ $c_{46} = 13.$
9.	$c_{13} = 15, c_{14} = c_{23} = 12, c_{25} = 11, c_{53} = 10, c_{35} = 9, c_{36} = 14, c_{34} = 13,$ $c_{46} = 16.$
10.	$c_{13} = 13, c_{14} = c_{23} = 15, c_{25} = 19, c_{53} = 20, c_{35} = 17, c_{36} = 9,$ $c_{34} = 10, c_{46} = 17.$
11.	$c_{13} = 15, c_{14} = c_{23} = 13, c_{25} = 16, c_{53} = 14, c_{35} = 18, c_{36} = 11, c_{34} = 10,$ $c_{46} = 17.$

12.	$c_{13} = 20, c_{14} = c_{23} = 15, c_{25} = 14, c_{53} = 16, c_{35} = 19, c_{36} = 14, c_{34} = 18, c_{46} = 15.$
13.	$c_{13} = 17, c_{14} = c_{23} = 13, c_{25} = 19, c_{53} = 15, c_{35} = 20, c_{36} = 10, c_{34} = 14, c_{46} = 18.$
14.	$c_{13} = 13, c_{14} = c_{23} = 9, c_{25} = 15, c_{53} = 11, c_{35} = 16, c_{36} = 6, c_{34} = 10, c_{46} = 14.$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Задача о кратчайшем маршруте

1. Вопросы к лабораторной работе

1. Сформулируйте задачу о кратчайшем маршруте.
2. Какие еще величины можно рассматривать в этой задаче вместо длины дуги l_{ij} . Как можно интерпретировать величину l_{ij} в случае $l_{ij} < 0$.
3. Постройте математическую модель задачи.

2. Алгоритм нахождения кратчайшего пути из вершины E_0 в вершину E_n . Рассмотрим сеть $G = (E, \bar{e})$. Пусть сеть имеет источник E_0 и сток E_n , остальные вершины являются промежуточными. Обозначим через l_{ij} длину дуги (E_i, E_j) (l_{ij} может быть как положительной величиной, так и отрицательной, так как величину l_{ij} можно рассматривать, например, как стоимость доставки потока по дуге (E_i, E_j)). Требуется найти кратчайший путь из источника E_0 в сток E_n .

Предварительный шаг. Помечаем источник E_0 меткой $\varepsilon_0 = 0$.

Переходим к общему шагу.

Общий шаг. Действие 1. а) Множество вершин сети разобьем на два подмножества: подмножество помеченных вершин R и подмножество непомеченных вершин $\bar{R}$. На предварительном шаге подмножество R включает только одну вершину E_0 помеченную числом ε_0 , все остальные вершины принадлежат $\bar{R}$.

б) Находим множество $(R, \bar{R})$, состоящее из дуг (E_i, E_j) , начальные вершины E_i которых принадлежат подмножеству R , а конечные E_j – подмножеству $\bar{R}$. Множество $(R, \bar{R})$ является разрезом сети, отделяющим источник от стока.. Для каждой из этих дуг находим величину $h_{ij} = \varepsilon_i + l_{ij}$, где ε_i – числа (метки) приписанные вершинам $E_i \in R$.

Находим значение $\varepsilon_j = \min h_{ij}$ и выделяем дуги, на которых достигается этот минимум. Вершинам $E_j \in \bar{R}$, являющимся конечными вершинами выделенных дуг, приписываем значение ε_j . Так как появились новые помеченные вершины, то находим новый разрез $(R, \bar{R})$.

Действие 2. Проверяем, выполняется ли условие $\varepsilon_i + l_{ij} \geq \varepsilon_j$ для всех дуг сети, оба конца которых принадлежат R . Если это условие для какой-либо дуги не выполняется, т.е. $\varepsilon_j > \varepsilon_i + l_{ij}$, то соответствующее значение ε_j , заменяем на $\varepsilon_i + l_{ij}$, выделяем дугу (E_i, E_j) и переходим к выполнению действия 1 б).

Пометку вершин продолжаем до тех пор, пока не будет помечен сток E_n . Метка ε_n равна длине кратчайшего пути из E_0 в E_n . Переходим к заключительному шагу.

Заключительный шаг. Определяем оптимальный путь или оптимальные пути (если их несколько), двигаясь по выделенным дугам от стока E_n к источнику E_0 в обратном направлении. При этом в путь включаются те дуги (E_i, E_j) , для которых $\varepsilon_j = \varepsilon_i + l_{ij}$.

Пример. Найти кратчайший маршрут из E_0 в E_5 на сети, показанной на рисунке 1. Дугам (ребрам) сети приписаны значения l_{ij} — длины дуг (ребер).

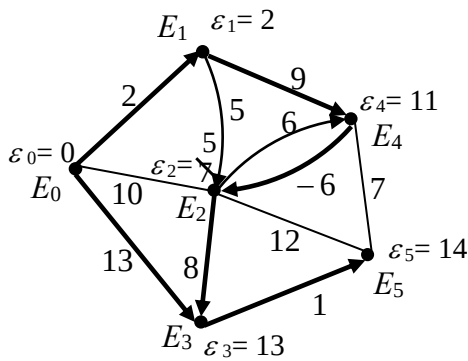


Рис. 1

Решение. Предварительный шаг.

Помечаем источник E_0 меткой $\varepsilon_0 = 0$.

Общий шаг. Действие 1. а) Вершина E_0 является помеченной, и множество всех вершин графа разбивается на два подмножества: подмножество R , состоящее из вершины E_0 , и подмножество $\bar{R}$ всех остальных непомеченных вершин.

б) Определяем разрез $(R, \bar{R})$ — множество всех дуг, началом которых является вершина E_0 :

$$(R, \bar{R}) = \{(E_0, E_1), (E_0, E_2), (E_0, E_3)\}.$$

Находим:

$$h_{01} = \varepsilon_0 + l_{01} = 0 + 2 = 2,$$

$$h_{02} = \varepsilon_0 + l_{02} = 0 + 10 = 10,$$

$$h_{03} = \varepsilon_0 + l_{03} = 0 + 13 = 13.$$

$$\min(h_{01}, h_{02}, h_{03}) = \min(2, 10, 13) = 2.$$

$\min h_{ij}$ достигается на дуге (E_0, E_1) , поэтому вершине E_1 приписываем пометку $\varepsilon_1 = 2$ и выделяем дугу (E_0, E_1) (на рисунке 1 дуга выделена жирной линией).

Теперь $R = \{E_0, E_1\}$, $(R, \bar{R}) = \{(E_0, E_2), (E_0, E_3), (E_1, E_2), (E_1, E_4)\}$.

Действие 2. Для всех дуг сети, обе вершины которых принадлежат множеству R , проверяем выполняется ли условие $\varepsilon_i + l_{ij} \geq \varepsilon_j$.

В нашем случае мы должны проверить это условие для дуги (E_0, E_1) : $\varepsilon_0 + l_{01} = 0 + 2 = 2 = \varepsilon_1$. Условие выполняется. **Переходим к действию 1 б).**

Действие 1. б) Находим:

$$h_{12} = \varepsilon_1 + l_{12} = 2 + 5 = 7,$$

$$h_{14} = \varepsilon_1 + l_{14} = 2 + 9 = 11,$$

$h_{02}=10, h_{03}=13$ (найдено на предыдущей итерации),

$\min(h_{02}, h_{03}, h_{12}, h_{14}) = \min(10, 13, 7, 11) = 7.$

$\min h_{ij}$ достигается на дуге (E_1, E_2) . Помечаем вершину E_2 меткой $\varepsilon_2 = 7$ и выделяем дугу (E_1, E_2) .

Теперь $R = \{E_0, E_1, E_2\}$, разрез $(R, \bar{R}) = \{(E_0, E_3), (E_1, E_4), (E_2, E_3), (E_2, E_4), (E_2, E_5)\}$.

Действие 2. Для всех дуг сети, обе вершины которых принадлежат множеству R , проверяем, выполняется ли условие $\varepsilon_i + l_{ij} \geq \varepsilon_j$.

$(E_0, E_1): \varepsilon_0 + l_{01} = 0 + 2 = 2 = \varepsilon_1, \quad (E_0, E_2): \varepsilon_0 + l_{02} = 0 + 10 = 10 > \varepsilon_2,$

$(E_1, E_2): \varepsilon_1 + l_{12} = 2 + 5 = 7 = \varepsilon_2.$

Условие выполняется. **Переходим к действию 1 б).**

Действие 1. б) На предыдущих итерациях найдены $h_{03}=13, h_{14}=11$. Находим:

$h_{23} = \varepsilon_2 + l_{23} = 7 + 8 = 15, \quad h_{24} = \varepsilon_2 + l_{24} = 7 + 6 = 13, \quad h_{25} = \varepsilon_2 + l_{25} = 7 + 12 = 19.$

$\min(h_{03}, h_{14}, h_{23}, h_{24}, h_{25}) = 11$ достигается на дуге (E_1, E_4) . Вершине E_4 приписываем метку $\varepsilon_4 = 11$ и выделяем дугу (E_1, E_4) .

$R = \{E_0, E_1, E_2, E_4\}$, разрез $(R, \bar{R}) = \{(E_0, E_3), (E_2, E_3), (E_2, E_5), (E_4, E_5)\}$.

Действие 2. Для всех дуг сети, обе вершины которых принадлежат множеству R , проверяем, выполняется ли условие $\varepsilon_i + l_{ij} \geq \varepsilon_j$.

$(E_0, E_1): \varepsilon_0 + l_{01} = 0 + 2 = 2 = \varepsilon_1, \quad (E_0, E_2): \varepsilon_0 + l_{02} = 0 + 10 = 10 > \varepsilon_2,$

$(E_0, E_3): \varepsilon_0 + l_{03} = 0 + 13 = 13 = \varepsilon_3, \quad (E_1, E_2): \varepsilon_1 + l_{12} = 2 + 5 = 7 = \varepsilon_2,$

$(E_1, E_4): \varepsilon_1 + l_{14} = 2 + 9 = 11 = \varepsilon_4, \quad (E_2, E_3): \varepsilon_2 + l_{23} = 7 + 8 = 15 > \varepsilon_3,$

$(E_2, E_4): \varepsilon_2 + l_{24} = 7 + 6 = 13 > \varepsilon_4, \quad (E_4, E_2): \varepsilon_4 + l_{42} = 11 - 6 = 5 < \varepsilon_2.$

Неравенство не выполняется для дуги (E_4, E_2) . Заменяем $\varepsilon_2 = 7$ на $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 + l_{42} = 5$, убираем выделение дуги (E_1, E_2) и выделяем дугу (E_4, E_2) . **Переходим к действию 1 б).**

Действие 1. б) $h_{03} = 13$. Находим:

$h_{23} = \varepsilon_2 + l_{23} = 5 + 8 = 13, \quad h_{25} = \varepsilon_2 + l_{25} = 5 + 12 = 17, \quad h_{45} = \varepsilon_4 + l_{45} = 11 + 7 = 18.$

$\min(h_{03}, h_{23}, h_{25}, h_{45}, h_{25}) = 13$, достигается на дуге (E_2, E_3) и на дуге (E_0, E_3) . Вершине E_3 приписываем метку $\varepsilon_3 = 13$ и выделяем дуги (E_2, E_3) и (E_0, E_3) .

$R = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\}$, разрез $(R, \bar{R}) = \{(E_2, E_5), (E_3, E_5), (E_4, E_5)\}$.

Проводим вычисления, аналогичные предыдущим, найдем $\varepsilon_5 = 14$ и выделим дугу (E_3, E_5) .

Заключительный шаг. Находим оптимальный маршрут, двигаясь от вершины E_5 к вершине E_0 . При этом в маршрут включаем те дуги (E_i, E_j) , для которых выполняется условие $\varepsilon_j - l_{ij} = \varepsilon_i$.

Так как $\varepsilon_5 - l_{35} = 13 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 - l_{03} = 0 = \varepsilon_0$, то (E_3, E_5) – последняя дуга, а (E_3, E_5) – начальная дуга искомого маршрута. Получим маршрут $\mu_1 = (E_0 - E_3 - E_5)$ минимальной длины.

Аналогично находим второй кратчайший маршрут $\mu_2 = (E_0 - E_1 - E_4 - E_2 - E_3 - E_5)$. Длины маршрутов μ_1 и μ_2 равны 14 единиц.

3. Задания для лабораторной работы

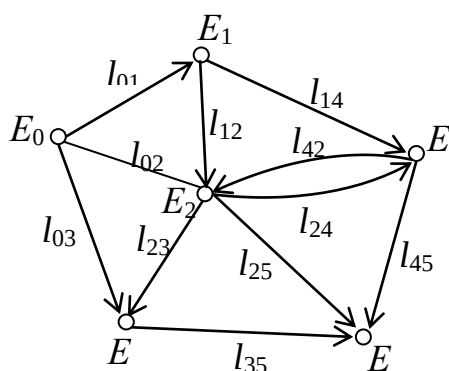


Рис. 2

Задание. На рисунке 2 показано расположение дуг сети $G=(E, e)$ с источником в вершине E_0 и стоком в вершине E_5 . Длины дуг l_{ij} , соединяющих данные вершины, заданы в соответствии с вариантом в таблице 1. Найдите кратчайший путь из вершины E_0 в вершину E_5 .

Таблица 1

Вариант	l_{ij}
1.	$l_{01} = 12, l_{02} = l_{20} = 18, l_{03} = 13, l_{12} = 17, l_{14} = 8, l_{23} = 15, l_{24} = 3, l_{25} = 9, l_{35} = 9, l_{42} = -8, l_{45} = 9.$
2.	$l_{01} = 10, l_{02} = l_{20} = 15, l_{03} = 8, l_{12} = 11, l_{14} = 12, l_{23} = -8, l_{24} = 8, l_{25} = 17, l_{35} = 16, l_{42} = -7, l_{45} = 2.$
3.	$l_{01} = 13, l_{02} = l_{20} = 15, l_{03} = 19, l_{12} = 20, l_{14} = 12, l_{23} = 9, l_{24} = 10, l_{25} = 14, l_{35} = 19, l_{42} = -11, l_{45} = 17.$
4.	$l_{01} = 15, l_{02} = l_{20} = 12, l_{03} = 11, l_{12} = 10, l_{14} = 6, l_{23} = 14, l_{24} = 13, l_{25} = 15, l_{35} = 16, l_{42} = -9, l_{45} = 16.$
5.	$l_{01} = 11, l_{02} = l_{20} = 16, l_{03} = 12, l_{12} = 12, l_{14} = 7, l_{23} = -5, l_{24} = 12, l_{25} = 13, l_{35} = 10, l_{42} = -3, l_{45} = 3.$
6.	$l_{01} = 10, l_{02} = l_{20} = 14, l_{03} = 17, l_{12} = 13, l_{14} = 14, l_{23} = 11, l_{24} = 10, l_{25} = 16, l_{35} = 13, l_{42} = -11, l_{45} = 6.$
7.	$l_{01} = 8, l_{02} = l_{20} = 10, l_{03} = 10, l_{12} = 6, l_{14} = 13, l_{23} = -1, l_{24} = 10, l_{25} = 13, l_{35} = 13, l_{42} = -5, l_{45} = 11.$
8.	$l_{01} = 16, l_{02} = l_{20} = 10, l_{03} = 19, l_{12} = -7, l_{14} = 11, l_{23} = 15, l_{24} = 17, l_{25} = 19, l_{35} = 14, l_{42} = -3, l_{45} = 2.$

9.	$l_{01} = 11, l_{02} = l_{20} = 8, l_{03} = 9, l_{12} = -4, l_{14} = 10, l_{23} = 12, l_{24} = 15, l_{25} = 17, l_{35} = 15, l_{42} = -8, l_{45} = 14.$
10.	$l_{01} = 10, l_{02} = l_{20} = 10, l_{03} = 8, l_{12} = -1, l_{14} = 11, l_{23} = 12, l_{24} = 14, l_{25} = 15, l_{35} = 10, l_{42} = -3, l_{45} = 3.$
11.	$l_{01} = 9, l_{02} = l_{20} = 5, l_{03} = 7, l_{12} = -9, l_{14} = 4, l_{23} = 2, l_{24} = 10, l_{25} = 12, l_{35} = 13, l_{42} = -3, l_{45} = 4.$
12.	$l_{01} = 12, l_{02} = l_{20} = 10, l_{03} = 13, l_{12} = 3, l_{14} = 4, l_{23} = 5, l_{24} = 6, l_{25} = 12, l_{35} = 10, l_{42} = -9, l_{45} = 8.$
13.	$l_{01} = 12, l_{02} = l_{20} = 10, l_{03} = 11, l_{12} = 5, l_{14} = 3, l_{23} = 2, l_{24} = 8, l_{25} = 8, l_{35} = 7, l_{42} = -6, l_{45} = 3.$
14.	$l_{01} = 13, l_{02} = l_{20} = 19, l_{03} = 14, l_{12} = 18, l_{14} = 9, l_{23} = 16, l_{24} = 4, l_{25} = 10, l_{35} = 10, l_{42} = -8, l_{45} = 10.$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Задача о потоке минимальной стоимости

1. Вопросы к лабораторной работе

1. Дайте определения дуговой стоимости.
2. Что называется стоимостью потока из источника в сток?
3. Как найти путь из вершины E_0 и вершину E_n наименьшей стоимости?
4. Сформулируйте задачу о потоке минимальной стоимости.
5. Постройте математическую модель задачи.

2. Алгоритм Басакера – Гоуэна нахождения оптимального потока. Рассмотрим сеть $G=(E, \vec{e})$. Пусть сеть имеет источник E_0 и сток E_n , остальные вершины являются промежуточными. Обозначим через c_{ij} стоимость доставки единицы потока по дуге (E_i, E_j) , через b_{ij} – пропускную способность дуги (ребра) (E_i, E_j) . Требуется найти поток из источника E_0 в сток E_n наименьшей стоимости, если плановая мощность потока равна B .

Нулевой шаг. В исходной сети все дуговые потоки и величину потока из E_0 в E_n , полагаем равными нулю.

Первый шаг. Находим путь μ минимальной стоимости из E_0 в E_n , используя стоимости, приписанные дугам на первой итерации, и модифицированные стоимости на последующих итерациях.

Второй шаг. Определяем пропускную способность θ пути μ :

$$\theta = \min_{(E_i, E_j) \in \mu} (b_{ij}).$$

Добавляем к величине старого потока $v_{стар}$ величину $\theta' = \min(\theta, B - v_{стар})$ и сравниваем с заданной величиной потока B . Если величина суммарного потока равна заданной величине B , то задача решена и переходим к пятому шагу. В противном случае переходим к третьему шагу.

Третий шаг. Находим величину потока по каждой дуге, принадлежащей пути μ , для чего к старым величинам дуговых потоков пути μ добавляем θ . Определяем остаточные пропускные способности b_{ij}^* дуг данного пути. Пропускные способности дуг, симметричных дугам пути μ , полагаем равными величинам соответствующих дуговых потоков, т.е. $b_{ij} = x_{ij}$.

Четвертый шаг. Определяем модифицированные дуговые стоимости c_{ij}^* :

$$c_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } b_{ij}^* > 0; \\ \infty, & \text{если } b_{ij}^* = 0. \end{cases}$$

Если для какой-либо дуги $x_{ij} > 0$, то модифицированная стоимость симметричной ей дуги (E_j, E_i) равна величине c_{ij} , взятой с обратным знаком. Переходим к выполнению второго шага.

Пятый шаг. Минимальную стоимость потока заданной величины определяем по формуле

$$f = \sum c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

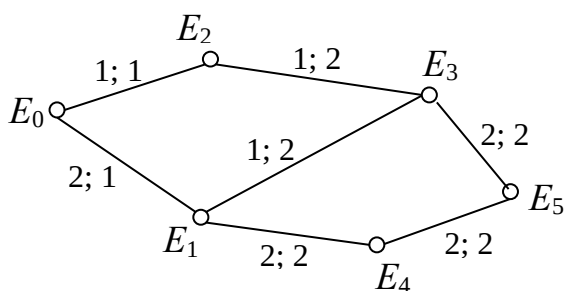


Рис. 1

Пример. Дана сеть, представленная неориентированным графом, изображенным на рисунке 1. Найти поток минимальной стоимости из источника E_0 в сток E_5 величиной $B = 3$. Первое число, приписанное каждому ребру, означает пропускную способность ребра, второе – стоимость доставки единицы потока по ребру из одной вершины в другую. Доставка потока по ребру может осуществляться в любом направлении.

Итерация 1. Нулевой шаг. Полагаем величину потока по каждому ребру сети равной нулю ($x_{ij} = 0$).

Первый шаг. Находим пути из источника E_0 в сток E_5 , на которых стоимость доставки единицы потока будет наименьшей. Для этого используем алгоритм нахождения кратчайшего пути из E_0 в E_5 , в котором вместо длин дуг рассматриваются дуговые стоимости. Наименьшая стоимость доставки единицы потока из E_0 в E_5 равна $\varepsilon_5 = 4$ единицы и достигается по

путям $\mu_1 = (E_0 - E_1 - E_3 - E_5)$ и $\mu_2 = (E_0 - E_2 - E_3 - E_5)$. На рисунке 2 эти пути выделены жирными линиями.

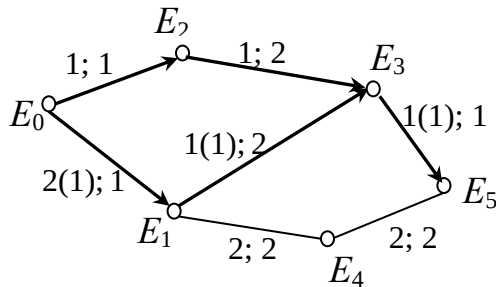


Рис. 2.

Второй шаг. Определяем пропускные способности выделенных путей μ_1 и μ_2 :

$$\theta_1 = \min_{(E_i, E_j) \in \mu_1} b_{ij} = \min(2, 1, 1) = 1.$$

$$\theta_2 = \min_{(E_i, E_j) \in \mu_2} b_{ij} = \min(1, 1, 1) = 1.$$

Каждый из этих путей содержит дугу (E_3, E_5) с пропускной способностью $b_{35} = 1$, которая не позволяет использовать два пути одновременно, поэтому выберем один из них, например первый. Учитывая, что $\theta_1 = 1 < B = 3$, переходим к четвертому шагу.

Третий шаг. Величины потоков по дугам пути μ_1 , равны: $x_{01} = x_{13} = x_{35} = 0 + 1 = 1$. Потоки, идущие по дугам пути μ_1 , на рисунке 2 отмечены в скобках. Найдем остаточные пропускные способности дуг этого пути:

$$b_{01}^* = b_{01} - x_{01} = 2 - 1 = 1, \quad b_{13}^* = b_{13} - x_{13} = 1 - 1 = 0, \quad b_{35}^* = b_{35} - x_{35} = 1 - 1 = 0.$$

Пропускные способности дуг, симметричных дугам пути, равны:

$$b_{10} = x_{01} = 1, \quad b_{31} = x_{13} = 1, \quad b_{53} = x_{35} = 1.$$

Четвертый шаг. Определяем модифицированные стоимости: так как $b_{01}^* = 1 > 0$, то модифицированная стоимость дуги (E_0, E_1) равна $c_{01}^* = 1$ (это означает, что по дуге можно еще пропустить вещество, следовательно, включить ее в новый путь), модифицированная стоимость симметричной дуги (E_1, E_0) равна $c_{10}^* = -1$. Так как $b_{13}^* = b_{35}^* = 0$, то $c_{13}^* = \infty$, $c_{31}^* = -2$, $c_{35}^* = \infty$, $c_{53}^* = -1$. Следовательно, дуги (E_1, E_3) и (E_3, E_5) нельзя включить в какой-нибудь другой путь, так как стоимость доставки вещества по этому пути будет равна бесконечности. На остальных дугах дуговые стоимости не изменятся, так как потоки по этим дугам равны нулю, следовательно, пропускные способности дуг остались прежними.

На рисунке 3 изображена сеть с новыми (модифицированными) стоимостями. Первые числа дуг, составляющих путь μ_1 , есть остаточные пропускные способности этих дуг, в скобках отмечены дуговые потоки.

Итерация 2. Первый шаг. Находим пути минимальной стоимости:

$$\mu_3 = (E_0 - E_1 - E_4 - E_5); \quad \mu_4 = (E_0 - E_2 - E_3 - E_1 - E_4 - E_5).$$

На рисунке 3 эти пути выделены жирными линиями. Стоимость доставки потока по каждому из этих путей равна 5 единиц.

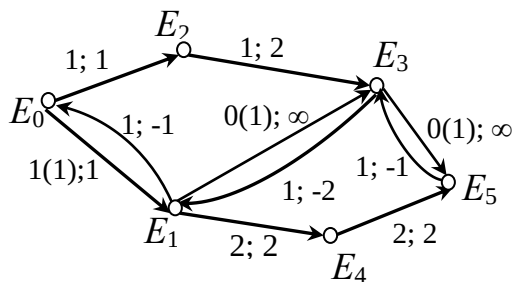


Рис. 3

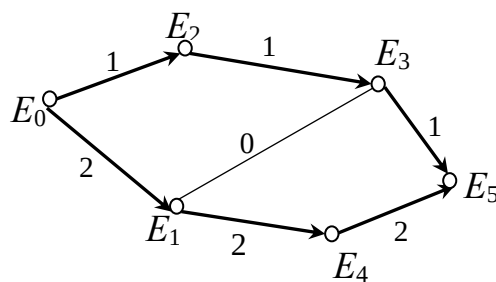


Рис. 4

Второй шаг. Найдем пропускные способности путей μ_3 и μ_4 :

$$\theta_3 = \min (1, 2, 2) = 1, \quad \theta_4 = \min (1, 1, 1, 2, 2) = 1.$$

В этом случае поток пропускаем сразу по обоим путям, так как пропускные способности общих дуг (E_1, E_4) и (E_4, E_5) равны 2 ед. Сумма потоков по сети $\theta_1 + \theta_3 + \theta_4 = 3$ и равна заданной величине потока. Следовательно, задача решена.

Пятый шаг. Оптимальная стоимость потока

$$\begin{aligned} f &= c_{01}x_{01} + c_{13}x_{13} + c_{35}x_{35} + c_{02}x_{02} + c_{23}x_{23} + c_{31}x_{31} + c_{14}x_{14} + c_{45}x_{45} = \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 14. \end{aligned}$$

На рисунке 4 изображена сеть, дугам которой приписаны дуговые потоки найденного потока. Поток по дугам (E_1, E_3) и (E_3, E_1) «обнулится».

3. Задания для лабораторной работы

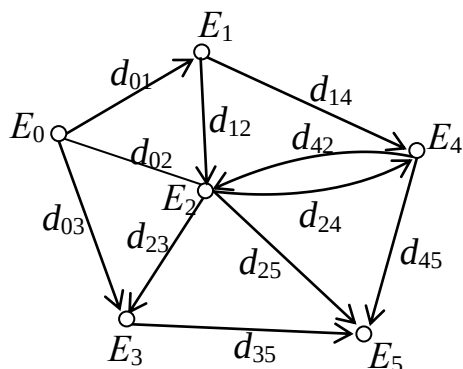


Рис. 5.

Задание. На рисунке 5 задана сеть $G=(E, e)$ с источником в вершине E_0 и стоком в вершине E_5 . d_{ij} – пропускные способности дуг графа; c_{ij} – стоимости транспортировки вещества по дугам; R – плановая мощность потока. Величины d_{ij} , c_{ij} и R заданы в соответствии с вариантом в таблице 1. Найдите оптимальный поток плановой мощности.

Таблица 1

Вариант	d_{ij}	c_{ij}, R
1.	$d_{01} = 12, d_{02} = d_{20} = 18, d_{03} = 13,$ $d_{12} = 17, d_{14} = 9, d_{23} = 15, d_{24} = 3,$ $d_{25} = 9, d_{35} = 5, d_{42} = 7, d_{45} = 9.$	$c_{01} = 4, c_{02} = c_{20} = 3, c_{03} = 6, c_{12} = 2,$ $c_{14} = 3, c_{23} = 5, c_{24} = 3, c_{25} = 2,$ $c_{35} = 4, c_{42} = 5, c_{45} = 3. R = 26.$

2.	$d_{01} = 10, c_{02} = d_{20} = 15, d_{03} = 8,$ $d_{12} = 13, d_{14} = 12, d_{23} = 9, d_{24} = 8,$ $d_{25} = 17, d_{35} = 13, d_{42} = 9, d_{45} = 5.$	$c_{01} = 2, c_{02} = c_{20} = 4, c_{03} = 3, c_{12} = 6,$ $c_{14} = 4, c_{23} = 5, c_{24} = 4, c_{25} = 2,$ $c_{35} = 3, c_{42} = 4, c_{45} = 6. R = 30.$
3.	$d_{01} = 13, d_{02} = d_{20} = 15, d_{03} = 19,$ $d_{12} = 20, d_{14} = 17, d_{23} = 9, d_{24} = 10,$ $d_{25} = 14, d_{35} = 19, d_{42} = 11, d_{45} = 17.$	$c_{01} = 2, c_{02} = c_{20} = 4, c_{03} = 3, c_{12} = 6,$ $c_{14} = 4, c_{23} = 5, c_{24} = 4, c_{25} = 2,$ $c_{35} = 3, c_{42} = 4, c_{45} = 6. R = 40.$
4.	$d_{01} = 15, d_{02} = c_{20} = 12, d_{03} = 11,$ $d_{12} = 10, d_{14} = 9, d_{23} = 14, d_{24} = 13,$ $d_{25} = 16, d_{35} = 10, d_{42} = 3, d_{45} = 16.$	$c_{01} = 5, c_{02} = c_{20} = 4, c_{03} = 2, c_{12} = 4,$ $c_{14} = 1, c_{23} = 6, c_{24} = 3, c_{25} = 4,$ $c_{35} = 5, c_{42} = 4, c_{45} = 6. R = 32.$
5.	$d_{01} = 11, d_{02} = d_{20} = 14, d_{03} = 12,$ $d_{12} = 12, d_{14} = 7, d_{23} = 5, d_{24} = 12,$ $d_{25} = 13, d_{35} = 9, d_{42} = 7, d_{45} = 7$	$c_{01} = 4, c_{02} = c_{20} = 5, c_{03} = 3, c_{12} = 5,$ $c_{14} = 3, c_{23} = 4, c_{24} = 2, c_{25} = 4,$ $c_{35} = 5, c_{42} = 4, c_{45} = 5. R = 25.$
6.	$d_{01} = 10, d_{02} = d_{20} = 14, d_{03} = 17,$ $d_{12} = 13, d_{14} = 14, d_{23} = 11, d_{24} = 8,$ $d_{25} = 19, d_{35} = 12, d_{42} = 14, d_{45} = 6.$	$c_{01} = 2, c_{02} = c_{20} = 4, c_{03} = 3, c_{12} = 6,$ $c_{14} = 4, c_{23} = 5, c_{24} = 4, c_{25} = 2,$ $c_{35} = 3, c_{42} = 4, c_{45} = 6. R = 35.$
7.	$d_{01} = 8, d_{02} = d_{20} = 10, d_{03} = 10,$ $d_{12} = 6, d_{14} = 13, d_{23} = 12, d_{24} = 10,$ $d_{25} = 12, d_{35} = 5, d_{42} = 12, d_{45} = 11.$	$c_{01} = 4, c_{02} = c_{20} = 3, c_{03} = 6, c_{12} = 4,$ $c_{14} = 5, c_{23} = 6, c_{24} = 3, c_{25} = 4,$ $c_{35} = 6, c_{42} = 2, c_{45} = 7. R = 20.$
8.	$d_{01} = 15, d_{02} = d_{20} = 10, d_{03} = 19,$ $d_{12} = 18, d_{14} = 11, d_{23} = 15, d_{24} = 17,$ $d_{25} = 14, d_{35} = 14, d_{42} = 16, d_{45} = 23.$	$c_{01} = 4, c_{02} = c_{20} = 5, c_{03} = 3, c_{12} = 5,$ $c_{14} = 3, c_{23} = 4, c_{24} = 2, c_{25} = 4,$ $c_{35} = 5, c_{42} = 4, c_{45} = 5. R = 30.$
9.	$d_{01} = 11, d_{02} = d_{20} = 9, d_{03} = 9,$ $d_{12} = 5, d_{14} = 10, d_{23} = 12, d_{24} = 15,$ $d_{25} = 17, d_{35} = 9, d_{42} = 13, d_{45} = 14.$	$c_{01} = 2, c_{02} = c_{20} = 4, c_{03} = 3, c_{12} = 6,$ $c_{14} = 4, c_{23} = 5, c_{24} = 4, c_{25} = 2,$ $c_{35} = 3, c_{42} = 4, c_{45} = 6. R = 28.$
10.	$d_{01} = 10, d_{02} = d_{20} = 10, d_{03} = 8,$ $d_{12} = 7, d_{14} = 11, d_{23} = 12, d_{24} = 14,$ $d_{25} = 13, d_{35} = 9, d_{42} = 14, d_{45} = 12.$	$c_{01} = 4, c_{02} = c_{20} = 5, c_{03} = 4, c_{12} = 4,$ $c_{14} = 3, c_{23} = 4, c_{24} = 2, c_{25} = 4,$ $c_{35} = 5, c_{42} = 4, c_{45} = 5. R = 18.$
11.	$d_{01} = 16, d_{02} = c_{20} = 16, d_{03} = 13,$ $d_{12} = 10, d_{14} = 9, d_{23} = 14, d_{24} = 13,$ $d_{25} = 16, d_{35} = 10, d_{42} = 15, d_{45} = 15.$	$c_{01} = 4, c_{02} = c_{20} = 8, c_{03} = 2, c_{12} = 4,$ $c_{14} = 3, c_{23} = 6, c_{24} = 3, c_{25} = 7,$ $c_{35} = 5, c_{42} = 4, c_{45} = 9. R = 30.$
12.	$d_{01} = 13, d_{02} = d_{20} = 14, d_{03} = 12,$ $d_{12} = 12, d_{14} = 7, d_{23} = 5, d_{24} = 12,$ $d_{25} = 13, d_{35} = 9, d_{42} = 14, d_{45} = 12$	$c_{01} = 5, c_{02} = c_{20} = 5, c_{03} = 3, c_{12} = 5,$ $c_{14} = 4, c_{23} = 4, c_{24} = 2, c_{25} = 4,$ $c_{35} = 5, c_{42} = 4, c_{45} = 5. R = 25.$
13.	$d_{01} = 17, d_{02} = c_{20} = 17, d_{03} = 14,$ $d_{12} = 11, d_{14} = 10, d_{23} = 15, d_{24} = 14,$ $d_{25} = 17, d_{35} = 11, d_{42} = 16, d_{45} = 16.$	$c_{01} = 5, c_{02} = c_{20} = 9, c_{03} = 3, c_{12} = 5,$ $c_{14} = 4, c_{23} = 7, c_{24} = 4, c_{25} = 8,$ $c_{35} = 6, c_{42} = 5, c_{45} = 10. R = 30.$

14.	$d_{01} = 12, d_{02} = d_{20} = 13, d_{03} = 11,$ $d_{12} = 11, d_{14} = 6, d_{23} = 5, d_{24} = 12,$ $d_{25} = 12, d_{35} = 8, d_{42} = 13, d_{45} = 11$	$c_{01} = 4, c_{02} = c_{20} = 5, c_{03} = 3, c_{12} = 4,$ $c_{14} = 3, c_{23} = 3, c_{24} = 2, c_{25} = 3,$ $c_{35} = 4, c_{42} = 3, c_{45} = 4. R = 24.$
-----	---	--

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Игры с нулевой суммой

1. Вопросы к лабораторной работе

1. Какая дисциплина называется теорией игр?
2. Дайте определение игры. Кого называют игроками?
3. Как в теории игр называется целевая функция? Что называется ходом, стратегией, оптимальной стратегией, партией?
4. Какие игры называются парными и множественными?
5. Какие игры называются играми с нулевой суммой, играми с постоянной разностью?
6. Какие игры называются кооперативными играми, азартными, стратегическими, антагонистическими?
7. Какая матрица называется платежной матрицей (матрицей выигрышей)?
8. В чем заключается принцип минимакса (принцип осторожности)? Что называется нижней ценой игры, верхней ценой игры?
9. Сформулируйте теорему о нижней и верхней цене игры. Какие ситуации в играх с нулевой суммой называются равновесными, неравновесными?
10. Какая игра называется игрой с седловой точкой? В чем заключаются оптимальные стратегии игроков в игре с седловой точкой? Какие стратегии называются чистыми? Что такое чистая цена игры?
11. Какие стратегии называются доминирующими, дублирующими в играх с нулевой суммой для игрока A и игрока B ? Как упростить платежную матрицу?

2. Игры с седловой точкой. Пусть игра с нулевой суммой задана своей платежной матрицей (таблица 1).

Таблица 1

$A \backslash B$	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Для нахождения чистой цены игры в каждой строке платежной матрицы найдем наименьший элемент α_i ($i = \overline{1, m}$). Выберем из этих значений наибольшее

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Выбрав стратегию, соответствующую выигрышу α , игрок A может быть уверен, что при любом пове-

дении противника выиграет не меньше, чем α денежные единицы. Такая стратегия называется **максиминной** стратегией игрока A . Величина α – гарантированный выигрыш игрока A , называется **нижней ценой игры (максимином)**.

Найдем максимальные значения элементов каждого столбца – β_j ($j = \overline{1, n}$). Выберем из этих значений наименьшее

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Выбрав стратегию, соответствующую элементу β , игрок B проиграет не более β денежных единиц. Эта стратегия называется **минимаксной** стратегией игрока B . Величина β – гарантированный проигрыш игрока B , называется **верхней ценой игры (минимаксом)**.

Если $\alpha = \beta$, то игра называется **игрой с седловой точкой**. В этом случае максиминная стратегия игрока A и минимаксная стратегия игрока B являются оптимальными для игроков. Пара оптимальных стратегий (A_{opt}, B_{opt}) называется **седловой точкой**.

Пример 1. Найти оптимальные стратегии матричной игры (4×5), матрица выигрышей которой дана в таблице 2.

Таблица 2

$B \backslash A$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	5	4	3	7
A_2	1	6	5	4	5
A_3	2	3	4	5	6
A_4	3	4	2	4	8

Таблица 3

$B \backslash A$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	3	5	4	3	7	<u>3</u>
A_2	1	6	5	4	5	1
A_3	2	3	4	5	6	2
A_4	3	4	2	4	8	2
β_j	<u>3</u>	6	5	5	8	

Решение. Добавим в таблице еще один столбец и одну строку (таблица 3). В правом добавочном столбце запишем минимальные значения элементов каждой строки – α_i ($i = \overline{1, 4}$). В нижней строке запишем максимальные значения элементов каждого столбца – β_j ($j = \overline{1, 5}$).

Выберем из значений α_i ($i = \overline{1, 4}$) наибольшее

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max (3, 1, 2, 2) = 3.$$

Ему соответствует стратегия A_1 , которая является максиминной стратегией для игрока A . Величина $\alpha = 3$ – нижняя цена игры.

Выберем из значений β_j ($j = \overline{1, 5}$) наименьшее

$$\beta = \min_j \beta_j = \min (3, 6, 5, 5, 8) = 3,$$

ему соответствует стратегия B_1 игрока B – минимаксная стратегия игрока B . Величина $\beta = 3$ является верхней ценой игры.

Так как $\alpha = \beta = 3$, то игра является игрой с седловой точкой. Стратегии A_1 и B_1 являются оптимальными стратегиями игроков A и B . Пара оптимальных стратегий (A_1, B_1) является седловой точкой в данной игре.

3. Упрощение игры. В играх без седловой точки размерностью $m \times n$, прежде чем находить оптимальные стратегии игроков, необходимо упростить игру, то есть убрать все доминируемые и дублируемые стратегии.

Стратегия A_i игрока A называется **доминирующей** над стратегией A_k , если в строке A_i стоят выигрыши не меньше, чем соответствующие выигрыши, стоящие в строке A_k , т.е. для всех элементов выполняется неравенство $a_{ij} \geq a_{kj}$, при этом хотя бы один из выигрышей строки A_i больше соответствующего выигрыша строки A_k .

Если все элементы строки A_i равны соответствующим элемента строки A_k , то стратегии A_i и A_k называются **дублирующими**.

Аналогично определяются доминирующие и дублирующие стратегии для игрока B . Доминирующей для игрока B называется та стратегия, при которой выигрыши игрока A (проигрыши игрока B) не больше, а, по крайней мере, один из них строго меньше, чем соответствующие выигрыши при другой его стратегии.

Естественно, что стратегию можно отбросить, если для нее есть доминирующая или дублирующая стратегия.

Пример 2. Упростить игру, платежная матрица которой дана в таблице 4.

Таблица 4

$B \backslash A$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	4	4	3	1
A_2	5	7	4	5	5
A_3	6	8	9	3	6
A_4	8	2	2	2	8
A_5	9	4	8	4	8

Таблица 5

$B \backslash A$	B_3	B_4
A_2	4	5
A_3	9	3
A_5	8	4

Решение. Упростим платежную матрицу. Просматривая строки, видим, что стратегия A_5 доминирует над стратегией A_1 , так как $a_{51} > a_{11}$, $a_{52} = a_{12}$, $a_{53} > a_{13}$, $a_{54} > a_{14}$, $a_{55} > a_{15}$. Придерживаясь стратегии A_5 игрок A получит больший выигрыш, чем если бы он выбрал стратегию A_1 . Поэтому первую строку в матрице выигрышей можно отбросить. Аналогично можно доказать, что стратегия A_5 доминирует над стратегией A_4 , поэтому отбрасываем стратегию A_4 .

Просматриваем столбцы, ориентируясь на невычеркнутые элементы. Стратегия B_4 доминирует над стратегией B_1 , так как $b_{24} = b_{21}$, $b_{34} < b_{31}$, $b_{54} < b_{51}$. Придерживаясь стратегии B_4 игрок B получит меньший проиг-

рыш, чем если бы он выбрал стратегию B_1 . Поэтому первый столбец в матрице выигрышей можно отбросить. Аналогично, можно доказать, что стратегия B_4 доминирует над стратегией B_2 и над стратегией B_5 . Вычеркиваем второй и пятый столбцы.

После упрощения получим матрицу (таблица 5).

4. Задания для лабораторной работы

Задание. 1. По следующему описанию конфликтной ситуации постройте формальную математическую модель. В ходе переговоров между работодателем и профсоюзом о повышении ставки почасовой оплаты работодатель выдвинул предложение – увеличение составит A руб., а профсоюз в своем требовании указал B руб. Так как самостоятельно договориться не получилось, стороны пришли к соглашению о привлечении стороннего арбитра. Сторонний арбитр запросил у сторон их новые предложения о значении повышения ставки (округленные до 0,1) в диапазоне от A до B . Всем известно, что привлеченный арбитр встанет на сторону того, кто больше отступит от своего первоначального предложения, а если оба отступят одинаково, то арбитр назначает $(A+B)/2$. Найдите оптимальные стратегии работодателя и профсоюза.

Задание 2. Для антагонистической игры, заданной своей платежной матрицей, найдите верхнюю и нижнюю цену игры и решение в чистых стратегиях.

Задание 3. Для антагонистической игры, заданной своей платежной матрицей, удалите все доминируемые и дублируемые стратегии (ни у одного игрока не должно после этого оставаться ни одной доминируемой или дублирующей стратегий).

Вариант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
1.	$A = 1,50$ $B = 2,00$	$C = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 5 & 6 & 19 \\ 10 & 3 & 11 & 4 & 7 \\ 17 & 10 & 9 & 8 & 16 \\ 5 & 9 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
2.	$A = 0,70$ $B = 1,20$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.	$A = 1,70$ $B = 2,20$	$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 8 & 22 & 10 \\ 7 & 11 & 14 & 9 & 6 \\ 11 & 20 & 12 & 17 & 12 \\ 9 & 8 & 13 & 12 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 8 & 6 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
4.	$A = 0,80$ $B = 1,30$	$C = \begin{pmatrix} 24 & 14 & 13 & 15 & 28 \\ 20 & 20 & 10 & 11 & 17 \\ 26 & 19 & 19 & 17 & 24 \\ 14 & 19 & 18 & 16 & 15 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
5.	$A = 2,40$ $B = 2,90$	$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 12 & 6 & 9 \\ 6 & 11 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
6.	$A = 1,40$ $B = 1,90$	$C = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 6 & 4 & 17 \\ 8 & 9 & 7 & 9 & 5 \\ 15 & 6 & 8 & 7 & 14 \\ 9 & 10 & 8 & 8 & 11 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 8 & 6 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$A = 1,10$ $B = 1,60$	$C = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 3 & 15 \\ 10 & 7 & 7 & 11 & 9 \\ 13 & 8 & 6 & 5 & 13 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 7 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
8.	$A = 2,00$ $B = 2,50$	$C = \begin{pmatrix} 20 & 9 & 11 & 8 & 22 \\ 13 & 7 & 6 & 14 & 10 \\ 20 & 11 & 13 & 12 & 19 \\ 8 & 9 & 12 & 13 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
9.	$A = 1,30$ $B = 1,80$	$C = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 15 & 14 & 22 \\ 18 & 13 & 10 & 20 & 17 \\ 23 & 17 & 16 & 18 & 25 \\ 16 & 15 & 13 & 19 & 14 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 6 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
10.	$A = 2,30$ $B = 2,80$	$C = \begin{pmatrix} 23 & 14 & 16 & 14 & 28 \\ 19 & 20 & 10 & 13 & 16 \\ 26 & 18 & 19 & 17 & 25 \\ 14 & 19 & 18 & 15 & 14 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

11.	$A = 0,60$ $B = 1,10$	$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 7 & 3 & 13 \\ 6 & 8 & 5 & 5 & 10 \\ 11 & 6 & 4 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
12.	$A = 2,20$ $B = 2,70$	$C = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 & 2 & 15 \\ 6 & 4 & 3 & 7 & 3 \\ 13 & 5 & 6 & 5 & 12 \\ 5 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
13.	$A = 2,10$ $B = 2,60$	$C = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 12 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
14.	$A = 1,20$ $B = 1,70$	$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 14 & 8 \\ 9 & 13 & 10 & 10 & 11 \\ 6 & 7 & 11 & 8 & 5 \\ 4 & 15 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 5 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Игры в смешанных стратегиях

1. Вопросы к лабораторной работе

1. Что такое смешанные стратегии игроков?
2. В каком случае применяют смешанные стратегии.
3. Какие стратегии называют активными, неактивными?
4. Сформулируйте теорему об активных стратегиях.
5. Как найти оптимальные стратегии игроков в игре 2×2 без седловой точки?
6. Как найти оптимальные стратегии игроков в игре $2 \times n$, $m \times 2$ без седловой точки?
7. Как свести игры с нулевой суммой к задаче линейного программирования?

2. Методы решения игр 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$

Аналитический метод решения 2×2 . Рассмотрим игру 2×2 , которая не имеет седловой точки (таблица 1).

Таблица 1

A \ B	B	B ₁	B ₂
	A ₁	a ₁₁	a ₁₂
	A ₂	a ₂₁	a ₂₂

В этом случае игрокам не выгодно применять свои максиминную (для игрока A) и минимаксную (для игрока B) стратегии. Игроки должны придерживаться смешанных стратегий. Пусть $\bar{p}^* = (p_1, p_2)$ – оптимальная смешанная

стратегия игрока A (p_1 и p_2 – вероятности выбора стратегий игроком A). Пусть $\bar{q}^* = (q_1, q_2)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока B (q_1 и q_2 – вероятности выбора стратегий игроком B). Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры v .

Пусть игрок A выбирает свою оптимальную стратегию $\bar{p}^* = (p_1, p_2)$, а игрок B – стратегию B_1 . Тогда средний выигрыш игрока A при многократном повторении игры будет равен $a_{11}p_1 + a_{21}p_2$. Если игрок A выбирает свою оптимальную стратегию, а игрок B – стратегию B_2 , то средний выигрыш игрока A будет равен $a_{12}p_1 + a_{22}p_2$. Очевидно, что в игре 2×2 все стратегии игроков являются активными. Поэтому, применяя свою оптимальную смешанную стратегию, игрок A получит средний выигрыш равный цене игры v , независимо от того какую стратегию применяет игрок B . Следовательно, вероятности p_1, p_2 можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Аналогично, для игрока B . Если игрок B выбирает свою оптимальную стратегию $\bar{q}^* = (q_1, q_2)$, а игрок A – стратегию A_1 , то средний проигрыш игрока B при многократном повторении игры будет равен $a_{11}q_1 + a_{12}q_2$. Если игрок B выбирает свою оптимальную стратегию, а игрок A – стратегию A_2 , то средний проигрыш игрока B будет равен $a_{21}q_1 + a_{22}q_2$. Учитывая сказанное выше, вероятности q_1, q_2 можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Графический метод решения игр $2 \times n$ и $m \times 2$

Теорема 1. Любая конечная игра размером $m \times n$ имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит $I = \min(m, n)$.

Следовательно, в играх $2 \times n$ и $m \times 2$ число активных стратегий каждого из игроков не превосходит двух. Если эти стратегии будут найдены, то игра сведется к игре 2×2 .

Игра $2 \times n$ строится следующим образом:

- 1) строится графическое изображение игры, где на оси абсцисс откладываем вероятности p_1 и p_2 выбора стратегий игроком A ;
- 2) находится нижняя граница выигрыша и точка, принадлежащая этой границе, с наибольшей ординатой выигрыша, равной цене игры v (абсцисса этой точки указывает на вероятности, входящие в оптимальную стратегию игрока A);
- 3) определяется пара стратегий игрока B , пересекающихся в точке оптимума, которые и являются активными стратегиями игрока B ;
- 4) чтобы найти решение игры, исключим из платежной матрицы неактивные стратегии игрока B и получим игру 2×2 , которую можно решить аналитически.

Игра $m \times 2$ решается аналогично:

- 1) строится графическое изображение игры, где на оси абсцисс откладываем вероятности q_1 и q_2 выбора стратегий игроком B ;
- 2) находится верхняя граница выигрыша и точка, принадлежащая этой границе, с наименьшей ординатой выигрыша, равной цене игры v (абсцисса этой точки указывает на вероятности, входящие в оптимальную стратегию игрока B);
- 3) определяется пара стратегий игрока A , пересекающихся в точке оптимума, которые и являются активными стратегиями игрока A ;
- 4) чтобы найти решение игры, исключим из платежной матрицы неактивные стратегии игрока A и получим игру 2×2 , которую можно решить аналитически.

Пример 1. Найти оптимальные стратегии игроков и дать геометрическую интерпретацию игры из примера 2 лабораторной работы № 5.

Решение. Найдем нижнюю и верхнюю цены игры. Нижняя цена игры $\alpha = 4$, верхняя цена игры $\beta = 5$.

Данная игра не имеет седловой точки, поэтому решение ищем в смешанных стратегиях. Пусть $\bar{p}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ – смешанная стратегия игрока A , $\bar{q}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ – смешанная стратегия игрока B , цена игры $4 \leq v \leq 5$.

После упрощения игры, получим матрицу (таблица 2)

Таблица 2

A \ B	B	
	B_3	B_4
A_2	4	5
A_3	9	3
A_5	8	4

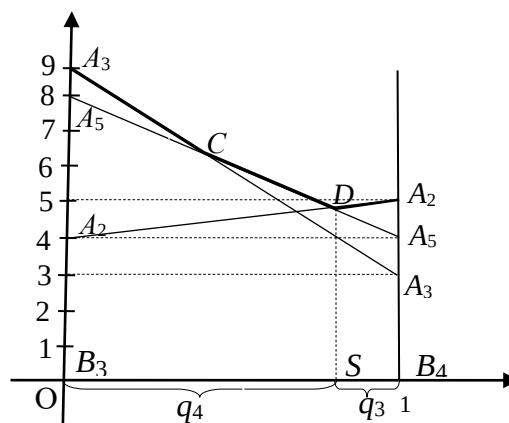


Рис. 1

Найдем графическое решение игры. Проводим координатные оси, где на оси абсцисс откладываем вероятности выбора игроком B своих стратегий (рисунок 1). Для этого на оси абсцисс откладываем отрезок $[0, 1]$ длина которого равна 1. Точка $(0, 0)$ соответствует значениям вероятностей $q_3 = 1$ и $q_4 = 0$. Точка $(1, 0)$ соответствует значениям вероятностей $q_3 = 0$ и $q_4 = 1$. (Значения вероятностей $q_3 = 1$ и $q_4 = 0$ говорит о том, что игрок B в процессе игры выбирает только чистую стратегию B_3 ; значения вероятностей $q_3 = 0$ и $q_4 = 1$ говорит о том, что игрок B в процессе игры выбирает только чистую стратегию B_4). В точке S , изображенной на рис. 1, игрок B придерживается смешанной стратегии (q_3, q_4) , т.е. при многократном повторении игры он выбирает активную стратегию B_3 с вероятностью q_3 , а активную стратегию B_4 с вероятностью q_4 .

В точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$ восстанавливаем перпендикуляры, на которых будем откладывать проигрыши игрока B , при выборе им своих активных чистых стратегий B_3 и B_4 , если игрок A выбирает стратегии A_2, A_3 и A_5 . Тогда абсциссы точек на прямой A_iA_i ($i = 2, 3, 5$) указывают на вероятности выбора игроком B своих стратегий, ординаты — на проигрыши игрока B , если он придерживается смешанной стратегии с выбранными вероятностями.

Ординаты точек выделенной ломаной A_3CDA_2 определяют наибольшие проигрыши игрока B , в зависимости от выбранной им смешанной стратегии. Тогда наименьший гарантированный проигрыш игрока B и вероятности оптимальной смешанной стратегии этого игрока соответствуют точке D .

Таблица 3

A \ B	B	
	B_3	B_4
A_2	4	5
A_5	8	4

Так как игрок B располагает двумя активными стратегиями, то и игрок A располагает двумя активными стратегиями. Это стратегии A_2 и A_5 , так как точка D — точка пересечения прямых A_2A_2 и A_5A_5 . Стратегию A_3 игрока A можно отбросить, как неактивную. Получаем игру 2×2 с платежной матрицей, которая приведена в таблице 3.

Для определения оптимальной смешанной стратегии игрока A , используем алгебраический метод решения игры. Получаем систему

$$\begin{cases} 4p_2 + 8p_5 = v, \\ 5p_2 + 4p_5 = v, \\ p_2 + p_5 = 1, \end{cases}$$

из которой находим $p_2 = \frac{4}{5}$, $p_5 = \frac{1}{5}$, $v = 4\frac{4}{5}$. Это соответствует оптималь-

ной смешанной стратегии игрока A : $\bar{p}^* = \left(0, \frac{4}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}\right)$ и цене игры $v = 4\frac{4}{5}$.

Для определения оптимальной смешанной стратегии игрока B рассматриваем систему

$$\begin{cases} 4q_3 + 5q_4 = v, \\ 8q_3 + 4q_4 = v, \\ q_3 + q_4 = 1, \end{cases}$$

где $v = 4\frac{4}{5}$ – цена игры. Решая эту систему, получим оптимальную сме-

шанную стратегию игрока B : $\bar{q}^* = \left(0, 0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$.

Таблица 4

$A \backslash B$	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

3. Сведение игры с нулевой суммой к задаче линейного программирования.

Пусть игра с нулевой суммой, не имеющая седловой точки, задана своей платежной матрицей заданной в таблице 4.

Пусть $\bar{p}^*(p_1, p_2, \dots, p_m)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока A , $\bar{q}^*(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока B , v – цена игры

$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

Если игрок A применяет свою оптимальную смешанную стратегию $\bar{p}^*$, а игрок B свою активную стратегию B_j , то по теореме об активных стратегиях средний выигрыш игрока A будет равен

$$v_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{mj}p_m = v.$$

Но так как заранее не известно, является ли стратегия B_j активной, то $v_j \geq v$, $j = \overline{1, n}$. Следовательно, имеет место система

[illegible]

Разделим левую и правую части неравенств и последнего равенства на $\nu > 0$ и обозначим $\frac{p_i}{\nu} = x_i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда система неравенств имеет вид

[illegible]

Из последнего равенства системы следует $x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_m = \frac{1}{\nu}$.

Мы получили задачу линейного программирования с целевой функцией $\frac{1}{v}$. Так как целью игрока A является максимизация выигрыша, то

функция $f(\bar{x}) = \frac{1}{\nu} \rightarrow \min$. Решив полученную задачу линейного программирования, найдем цену игры $\nu = \frac{1}{f(\bar{x})}$ и вероятности

$p_i = x_i \cdot v, \quad i = \overline{1, m}$, а значит и оптимальную смешанную стратегию $\bar{p}^*(p_1, p_2, \dots, p_m)$ игрока A .

Рассуждая аналогично, получим систему, связывающую вероятности $q_1, q_2, \dots, q_n$ оптимальной стратегии $\bar{q}^*$ игрока B и цену игры v .

$$\begin{aligned}
& a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1j}q_j + \dots + a_{1n}q_n \leq \nu, \\
& a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2j}q_j + \dots + a_{2n}q_n \leq \nu, \\
& \dots\dots\dots \\
& a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{ij}q_j + \dots + a_{in}q_n \leq \nu, \\
& \dots\dots\dots \\
& a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mj}q_j + \dots + a_{mn}q_n \leq \nu. \\
& q_1 + q_2 + \dots + q_j + \dots + q_n = 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Разделим левую и правую части неравенств и последнего равенства на $\nu > 0$ и обозначим $\frac{q_j}{\nu} = y_j, \quad j = \overline{1, n}$. Получим задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
& a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1j}y_j + \dots + a_{1n}y_n \leq 1, \\
& a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2j}y_j + \dots + a_{2n}y_n \leq 1, \\
& \dots\dots\dots \\
& a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{ij}y_j + \dots + a_{in}y_n \leq 1, \\
& \dots\dots\dots \\
& a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mj}y_j + \dots + a_{mn}y_n \leq 1, \\
& y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{4}$$

с целевой функцией $\frac{1}{\nu} = y_1 + y_2 + \dots + y_j + \dots + y_n \rightarrow \max$.

При этом задачи (2) и (4) являются двойственными. Поэтому, решая задачу (4) симплекс-методом, мы одновременно можем найти и решение задачи (2).

Пример 2. У игроков A и B есть по три карточки, на каждой из которых записано по одной цифре 1, 2 или 3. Игроки одновременно показывают друг другу одну из трех карточек. Пусть игрок A выбирает карточку с цифрой u , а игрок B – с цифрой v . Игрок A выигрывает, если сумма $u + v$ – четная и его выигрыш равен $u \cdot v$. Игрок B выигрывает, если сумма $u + v$ – нечетная и его выигрыш равен $u + v$. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Решение. Стратегии игроков A и B состоят в выборе одной из карточек с цифрой 1, 2 или 3. В платежной матрице (таблица 5) приведены выигрыши игрока A . Если элемент $a_{ij} > 0$, то игрок A выигрывает у игрока B сумму равную a_{ij} . Если $a_{ij} < 0$, то игрок A , на самом деле, проигрывает игроку B сумму равную $|a_{ij}|$. В дополнительном столбце указаны наименьшие выигрыши игрока A при выборе той или иной стратегии, в дополнительной строке – наибольшие проигрыши игрока B . Нижняя цена игры $\alpha = -3$,

верхняя цена игры $\beta = 3$. Игра не имеет седловой точки и игрокам для достижения наилучшего для себя результата стоит придерживаться смешанных стратегий.

Таблица 5

$B \backslash A$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	-3	3	-3
A_2	-3	4	-5	-5
A_3	3	-5	9	-5
β_j	3	4	9	

Таблица 6

$B \backslash A$	B_1	B_2	B_3
A_1	6	2	8
A_2	2	9	0
A_3	8	0	14

Пусть $\bar{p}^*(p_1, p_2, p_3)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока A , $\bar{q}^*(q_1, q_2, q_3)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока B , цена игры $-3 \leq v \leq 3$. Чтобы не иметь дела с отрицательными числами, прибавим ко всем элементам матрицы число 5. Получим игру с платежной матрицей, заданной в таблице 6. При этом оптимальные стратегии игроков не изменятся, цена игры v увеличится на 5 единиц.

Оптимальную стратегию игрока A находим из системы

$$\begin{cases} 6p_1 + 2p_2 + 8p_3 \geq v, \\ 2p_1 + 9p_2 \geq v, \\ 8p_1 + 14p_3 \geq v, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Оптимальную стратегию игрока B находим из системы

$$\begin{cases} 6q_1 + 2q_2 + 8q_3 \leq v, \\ 2q_1 + 9q_2 \leq v, \\ 8q_1 + 14q_3 \leq v, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Разделим левые и правые части неравенств и последнего равенства систем (5) и (6) на $v > 0$ и обозначим $\frac{p_i}{v} = x_i, i = \overline{1,3}$, $\frac{q_j}{v} = y_j, j = \overline{1,3}$, получим пару двойственных задач линейного программирования:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 1, \\ 8x_1 + 14x_3 \geq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}, \end{cases} \quad \begin{cases} 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \leq 1, \\ 2y_1 + 9y_2 \leq 1, \\ 8y_1 + 14y_3 \leq 1, \\ y_i \geq 0, i = \overline{1,3}, \end{cases}$$

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{v} = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min. \quad f(\bar{y}) = \frac{1}{v} = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max.$$

С помощью симплекс-метода, находим оптимальное решение двойственной задачи линейного программирования:

$\bar{y} = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, 0\right)$, $f(\bar{y})_{\max} = \frac{5}{24}$. Находим цену игры $\bar{v}$, платежная матрица которой представлена в таблице 6, и оптимальную стратегию игрока B :

$$\bar{v} = \frac{1}{f(\bar{y})} = \frac{24}{5}, \quad q_1 = y_1 \cdot \bar{v} = \frac{1}{8} \cdot \frac{24}{5} = \frac{3}{5}, \quad q_2 = y_2 \cdot \bar{v} = \frac{1}{12} \cdot \frac{24}{5} = \frac{2}{5}, \quad q_3 = 0.$$

Таким образом, $\bar{q} * \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока B .

Оптимальное решение прямой задачи линейного программирования получим, используя двойственные оценки, найденные на последней итерации решения двойственной задачи:

$$\bar{x} = \left(0, \frac{1}{9}, \frac{7}{72}\right), \quad f(\bar{x})_{\min} = \frac{5}{24}.$$

Отсюда определяем цену игры и вероятности выбора активных стратегий игроком A для игры, заданной таблицей 6:

$$\bar{v} = \frac{1}{f(\bar{x})} = \frac{24}{5}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = x_2 \cdot \bar{v} = \frac{1}{9} \cdot \frac{24}{5} = \frac{8}{15}, \quad p_3 = x_3 \cdot \bar{v} = \frac{7}{72} \cdot \frac{24}{5} = \frac{7}{15}.$$

Значит, оптимальная смешанная стратегия игрока A : $\bar{p} * \left(0, \frac{8}{15}, \frac{7}{15}\right)$.

Стратегии $\bar{q} * = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$, $\bar{p} * = \left(0, \frac{8}{15}, \frac{7}{15}\right)$ являются оптимальными стратегиями игроков и в игре, заданной платежной матрицей, представленной в таблице 5. Цена этой игры $v = v * -5 = \frac{24}{5} - 5 = -\frac{1}{5}$ (т.е. в этой игре выиграл игрок B).

4. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Найти оптимальные стратегии и цену игры из задания 3 лабораторной работы № 4.

Задание 2. Приведите матричную игру к задаче линейного программирования. Найдите смешанные стратегии игроков.

Вариант		Вариант	
1.	$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	2.	$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3.	$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	4.	$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
5.	$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	6.	$C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
7.	$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	8.	$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
9.	$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	10.	$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
11.	$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$	12.	$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
13.	$C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 10 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	14.	$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6.

Игры с природой

1. Вопросы к лабораторной работе

1. Какие игры называются играми с природой?
2. Какой игрок называется «Природой»?
3. Как упростить матрицу выигрышей в играх с природой?
4. Что называется риском в игре с природой и как строится матрица рисков?

5. Какие задачи называются «задачами в условиях неопределенности»?

6. Какие задачи называются «задачами в условиях риска»?

7. Перечислите критерии оптимальности в играх с природой, в случае, когда неизвестны вероятности проявления состояний природы. В чем они заключаются?

8. Перечислите критерии оптимальности в играх с природой, в случае, когда известны вероятности проявления состояний природы. В чем они заключаются?

2. Постановка задачи игры с природой. Пусть некоторому лицу или группе лиц необходимо выполнить операцию, на ход которой влияют как контролируемые, так и неконтролируемые факторы. Неконтролируемые факторы «безразличны» к целям оперирующей стороны, но оказывают существенное влияние на ход операции. В этом случае такую операцию можно рассматривать как игру, в которой игроку A (оперирующей стороне) противостоит некоторая объективная реальность (природа), не преследующая собственных целей. Природа принимает случайным образом одно из своих состояний $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Игра с природой определяется платежной матрицей $A = \{a_{ij}\}$. Элементы платежной матрицы a_{ij} – это выигрыши игрока A , если он выбирает свою стратегию A_i , а природа реализует состояние P_j . При этом выигрыши игрока A не являются проигрышами природы.

3. Анализ матрицы выигрышей. В играх с природой требуется:

1) упростить матрицу выигрышей, отбросив дублируемые и заведомо невыгодные стратегии игрока A (стратегии природы отбрасывать нельзя, так как у природы нет выигрышных и проигрышных состояний);

2) построить матрицу рисков, для этого от максимально возможного выигрыша игрока A при определенном состоянии природы отнимаем выигрыш, который получает игрок A , выбрав стратегию A_i в тех же условиях;

3) применить критерии оптимальности для определения оптимальной стратегии игрока A .

Критериями оптимальности при решении задачи принятия решений в условиях неопределенности являются: критерий Вальда, критерий оптимизма, критерий пессимизма, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица. В задачах принятия решений в условиях риска можно применять следующие критерии: критерий Байеса; критерий Лапласа; критерий Гермейера.

Оптимальной стратегией игрока A в играх с природой является та его стратегия, на которую указало большинство критериев оптимальности.

Пример 1. Сельскохозяйственное предприятие имеет три участка земли: влажный A_1 , средней влажности A_2 , сухой A_3 . Одним из этих участков предполагается воспользоваться для выращивания картофеля, двумя остальными для выращивания зеленой массы. Известно, что получение хо-

рошего урожая картофеля зависит от наличия определенного количества влаги в почве. На участке A_1 средняя урожайность картофеля составляет 200, 100 и 250 ц. с га. если за лето выпадает, соответственно, нормальное количество осадков, больше и меньше нормы. Аналогично на участке A_2 урожайность составляет 230, 120 и 200 ц., на участке A_3 – 240, 260 и 100 ц. Требуется определить, на каком участке сажать картофель, чтобы получить наибольший урожай. Средняя урожайность картофеля (в ц. с 1 га) при различных погодных условиях указана в таблице 1

Таблица 1

к-во осадков участки	меньше нормы	в норме	больше нормы
A_1	250	200	100
A_2	200	230	120
A_3	100	240	260

Решение. Ситуация является полностью неопределенной, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний природы, поэтому эта задача является задачей принятия решений в условиях неопределенности.

Построим матрицу рисков для данной задачи, для этого в каждом столбце определим наибольший элемент:

$$\beta_1 = \max (250, 200, 100) = 250,$$

$$\beta_2 = \max (200, 230, 240) = 240,$$

$$\beta_3 = \max (100, 120, 260) = 260.$$

Получим матрицу рисков (таблица 2), элементы которой рассчитываем по формуле:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

Таблица 2.

к-во осадков участки	меньше нормы	в норме	больше нормы
A_1	0	40	160
A_2	50	10	140
A_3	150	0	0

Находим оптимальную стратегию предприятия, применяя критерии оптимальности в задачах принятия решений в условиях неопределенности.

Критерий Вальда (критерий гарантированного результата, максиминный критерий). Оптимальная стратегия игрока находится по формуле:

$$W = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно. В данном примере:

$$W_1 = \min (a_{11}, a_{12}, a_{13}) = \min(250, 200, 100) = 100;$$

$$W_2 = \min (a_{21}, a_{22}, a_{23}) = \min(200, 230, 120) = 120;$$

$$W_3 = \min (a_{31}, a_{32}, a_{33}) = \min(100, 240, 260) = 100;$$

$$W = \max W_i = 120.$$

Следовательно, оптимальной стратегией предприятия по критерию Вальда является стратегия A_2 .

Критерий оптимизма (критерий максимакса). Оптимальная стратегия игрока находится по формуле:

$$M = \max_i \max_j a_{ij}$$

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице выигрышей.

В данном примере:

$$M_1 = \max (a_{11}, a_{12}, a_{13}) = \max(250, 200, 100) = 250;$$

$$M_2 = \max (a_{21}, a_{22}, a_{23}) = \max(200, 230, 120) = 230;$$

$$M_3 = \max (a_{31}, a_{32}, a_{33}) = \max(100, 240, 260) = 260;$$

$$M = \max M_i = 260.$$

Следовательно, оптимальной стратегией предприятия по критерию оптимизма является стратегия A_3 .

Критерий пессимизма. Критерий пессимизма предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы выигрышей из её минимально возможных элементов:

$$P = \min_i \min_j a_{ij}.$$

В нашем примере: $P = \min_i \min_j a_{ij} = 100$. Соответствует стратегиям A_1 и A_3 .

Критерий пессимизма предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска Сэвиджа) предназначен для выбора минимального элемента матрицы рисков (таблица 2) из её максимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}.$$

В нашем примере: $S = \min_i \max_j r_{ij} = 140$, что соответствует стратегии A_2 .

Критерий Сэвиджа позволяет провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна.

Критерий Гурвица. Критерий Гурвица предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы выигрышей, отличающегося от крайних состояний – минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i (\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min_j a_{ij}).$$

Показатель λ $0 < \lambda < 1$ выбирает лицо, принимающее решение, исходя из складывающейся обстановки.

Пусть в нашем примере $\lambda = 0.5$, тогда

$$H_1 = 0.5 \cdot 250 + 0.5 \cdot 100 = 175,$$

$$H_2 = 0.5 \cdot 230 + 0.5 \cdot 120 = 175,$$

$$H_3 = 0.5 \cdot 260 + 0.5 \cdot 100 = 180,$$

$H = \max_i H_i = 180$, что соответствует стратегии A_3 .

Сравним полученные при различных критериях результаты: для критерия Вальда оптимальной является стратегия A_2 ; для критерия оптимизма – стратегия A_3 ; для критерия пессимизма – стратегии A_1 и A_3 ; для критерия Сэвиджа – стратегия A_2 , для критерия Гурвица – стратегия A_3 .

Выбираем стратегию, которая является оптимальной для большинства критериев. Следовательно, оптимальной для сельскохозяйственного предприятия является стратегия A_3 .

Таблица 3

$A \backslash P$	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15
q_i	0.2	0.3	0.5

и состояниях спроса задана в таблице 3. Найти оптимальную стратегию магазина.

Решение. Так как в этой задаче известны вероятности возникновения состояний природы, то данная задача является задачей принятия решений

Пример 2. Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов (A_1, A_2, A_3). Их реализация и прибыль зависит от вида товара и спроса на него. Спрос имеет три состояния – P_1, P_2, P_3 . Известны вероятности q_1, q_2, q_3 наступления этих состояний. Ожидаемая прибыль при различных стратегиях магазина

в условиях риска. Для определения оптимальной стратегии магазина можно воспользоваться критериями Байеса, Лапласа, Гермейера.

Критерий Байеса. В критерии Байеса оптимальной является та стратегия, которая соответствует максимальному среднему значению выигрыша:

$$B = \max_i B_i,$$

где B_i – математическое ожидание выигрышей, расположенных в i -той строке платежной матрицы, представленной в таблице 3:

$$B_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} q_j, \quad i = \overline{1, 3}.$$

В нашем случае:

$$B_1 = \sum_{j=1}^3 a_{1j} q_j = 20 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 13,5;$$

$$B_2 = \sum_{j=1}^3 a_{2j} q_j = 16 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,5 = 13,8;$$

$$B_3 = \sum_{j=1}^3 a_{3j} q_j = 13 \cdot 0,2 + 18 \cdot 0,3 + 15 \cdot 0,5 = 15,5.$$

$\max(B_1, B_2, B_3) = 15,5$, что соответствует стратегии A_3 игрока A .

Таблица 4

$A \backslash \Pi$	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0
q_j	0.2	0.3	0.5

Критерий Байеса относительно рисков. Построим матрицу рисков (таблица 4) (от наибольшего элемента каждого столбца отнимаем соответствующий элемент).

Критерий Байеса относительно рисков позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы.

Оптимальной является та стратегия, которая соответствует минимальному среднему значению рисков:

$$B^r = \min_i B_i^r,$$

где B_i^r – математическое ожидание рисков, расположенных в i -той строке

матрицы рисков: $B_i^r = \sum_{j=1}^3 q_j r_{ij}, \quad i = \overline{1, 3}.$

$$B_1^r = 0 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,5 = 3,4,$$

$$B_2^r = 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 = 3,1,$$

$$B_3^r = 7 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 = 1,4,$$

$\min (B_1^r, B_2^r, B_3^r) = 1,4$, что также соответствует стратегии A_3 игрока A .

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

Критерий Геймейера. Оптимальная стратегия по данному критерию, находится с помощью анализа матрицы Геймейера (таблица 5).

Таблица 5

$A \backslash P$	P_1	P_2	...	P_n
A_1	$a_{11} q_1$	$a_{12} q_2$	...	$a_{1n} q_n$
A_2	$a_{21} q_1$	$a_{22} q_2$	...	$a_{2n} q_n$
...	...	...	...	...
A_m	$a_{m1} q_1$	$a_{m2} q_2$	...	$a_{mn} q_n$
q_j	q_1	q_2		q_n

Оптимальной стратегией игрока A по критерию Геймейера, является максиминная стратегия относительно матрицы Геймейера, которая находится по формуле

$$G = \max_i \min_j a_{ij} q_j.$$

Таблица 6

$A \backslash P$	P_1	P_2	P_3
A_1	0.4	4.5	5
A_2	3.2	3.6	7
A_3	2,6	5.4	7.5
q_j	0.2	0.3	0.5

Для нашей задачи матрица Геймейера представлена в таблице 6.

Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию

возможных рисков одновременно. В данном примере:

$$G_1 = \min (a_{11}q_1, a_{12}q_2, a_{13}q_3) = \min(0.4, 4.5, 5) = 0.4;$$

$$G_2 = \min (a_{21}q_1, a_{22}q_2, a_{23}q_3) = \min(3.2, 3.6, 7) = 3.2;$$

$$G_3 = \min (a_{31}q_1, a_{32}q_2, a_{33}q_3) = \min(2.6, 5.4, 7.5) = 2.6;$$

$$G = \max G_i = 3.2.$$

Следовательно, оптимальной стратегией предприятия по критерию Геймейера является стратегия A_2 .

Критерий Лапласа относительно выигрышей. Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные.

$$q_1 = \frac{1}{n}, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1.$$

Этот принцип называется – принцип недостаточного основания Лапласа.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Лапласа относительно выигрышей является средне арифметическое выигрышей при этой стратегии.

$$L_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.

$$L = \max_i L_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

В нашем случае

$$L_1 = \frac{1}{3} (20 + 15 + 10) = 15;$$

$$L_2 = \frac{1}{3} (16 + 12 + 14) = 14;$$

$$L_3 = \frac{1}{3} (13 + 18 + 15) = 15\frac{1}{3};$$

следовательно, $L = \max(L_1, L_2, L_3) = 15\frac{1}{3}$, что соответствует стратегии A_3 .

Выбираем стратегию, которая является оптимальной для большинства критериев. Следовательно, оптимальной в данной задаче является стратегия A_3 .

4. Задания для лабораторной работы

Задание 1. По следующему описанию ситуации постройте формальную математическую модель игры с природой. Найдите оптимальную стратегию а) в случае, когда вероятности p_i , с которыми проявляются состояния природы, не известны; б) в случае известных вероятностей наступления состояний природы.

Вариант 1. Руководство универмага заказывает товар вида A . Спрос на этот товар колеблется от 6 до 9 единиц. Если товара не достаточно, то руководство универмага может срочно заказать и завезти недостающее количество, если спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе универмага. Требуется определить такой объем заказа, чтобы доход от реализации товара был наибольшим, учитывая дополнительные траты на хранение и срочный заказ, если заку-

почная цена единицы товара 50 руб., торговая надбавка – 30%, расходы на хранение – 1 руб., за срочный заказ и доставку – 2 руб. Вероятности того, что понадобится: 6 ед. товара – 0.2; 7 ед. товара – 0.3; 8 ед. товара – 0.4; 9 ед. товара – 0.1.

Вариант 2. Для повышения прибыльности кафе летом решено провести три акции: A_1 : «При покупке 4 стаканов сока – 1 пирожное в подарок», A_2 : «При покупке 5 пирожных – 2 чашки кофе в подарок» и A_3 : «При покупке 3 пицц – 1 коктейль в подарок». Посещаемость кафе так же зависит от погодных условий, описанных тремя состояниями природы: B_1 – теплая, B_2 – прохладная, B_3 – холодная. Рассчитать какая акция приносит больше прибыли, если в день *в теплую погоду* поступает в среднем 25 заказов по акции A_1 , 10 заказов по акции A_2 , 3 заказа по акции A_3 ; *в прохладную погоду* поступает в среднем 5 заказов по акции A_1 , 15 заказов по акции A_2 , 8 заказов по акции A_3 ; *в холодную погоду* поступает в среднем 1 заказ по акции A_1 , 15 заказов по акции A_2 , 20 заказов по акции A_3 . Стоимость 1 стакана сока – 2.40 руб., 1 чашки кофе – 3 руб., 1 пиццы – 10 руб., 1 коктейль – 5 руб. (для части б) известны вероятности состояний природы: теплой – 0.5; прохладной – 0.3; холодной – 0.2)

Вариант 3. Необходимо определить, какую электростанцию следует построить в одном из районов страны, чтобы эффективность использования капиталовложений была наибольшей при различных состояниях природы: P_1 – благоприятные, P_2 – неблагоприятные, P_3 – экстремальные. У планирующего органа три стратегии: построить гидроэлектростанцию, тепловую электростанцию, атомную электростанцию. Для упрощения задачи полагаем, что издержки на строительство равномерно распределены по годам. Доходы от работы электростанций (млн. руб.) в зависимости от состояний природы, издержки на строительство (млн. руб.), эксплуатационные расходы (млн. руб.) в расчете на год и вероятности состояний природы отражены в таблице.

	P_1	P_2	P_3	издержки на строительство	эксплуатационные расходы
A_1	5.7	4.5	2.5	2	0.3
A_2	6	4	3,5	2.5	0.2
A_3	7	5.5	5	3.5	0.1
P	0.55	0.4	0.05		

Вариант 4. Сельскохозяйственное предприятие может реализовать некоторую продукцию: A_1 – сразу после уборки; A_2 – в зимние месяцы; A_3 – в весенние месяцы. Прибыль зависит от цены реализации в данный период времени, затрат на хранение и возможных потерь, а также от спроса (состояния природы), который может быть высокий P_1 , умеренный P_2 , низ-

кий P_3 . Цена 1 кг. продукции: 1.70 руб. сразу после уборки, 2 руб. зимой, 2.50 руб. весной. Если предприятие реализует свою продукцию сразу после уборки, то издержки составляют 10 коп./кг., в зимние месяцы – 15 коп./кг., весной – 20 коп./кг. Спрос на продукцию (кг.), рассчитанный для разных состояний природы P_1 , P_2 и P_3 и вероятность наступления состояний природы представлены в виде матрицы. Определить оптимальную стратегию предприятия.

$A \backslash P$	P_1	P_2	P_3
A_1	3500	3000	2500
A_2	3000	2700	2000
A_3	2400	2100	1650
q_i	0.3	0.4	0.3

Вариант 5. Швейное предприятие шьет костюмы и платья и реализует свою продукцию через магазин. Сбыт, а следовательно и прибыль, зависит от состояния погоды: P_1 – холодная, P_2 – теплая, P_3 – жаркая. Предприятие может реализовать в месяц 800 костюмов и 300 платьев в холодную погоду, 400 костюмов и 500 платьев в теплую, 100 костюмов и 700 платьев в жаркую. Определить оптимальную стратегию предприятия, если предприятие может реализовать костюмы по 120 руб. за 1 штуку, платья – 80 руб. за 1 штуку. Себестоимость пошива 1 костюма – 20 руб., 1 платья – 5 руб. Найти оптимальную стратегию предприятия. Для части б) известны вероятности состояний природы: прохладной – 0,3; теплой – 0,5; жаркой – 0,2.

Вариант 6. Проектируется строительство дамбы, защищающей от наводнения (наводнения бывают каждый год). Уровень наводнения можно предсказать лишь приблизительно, можно лишь надеяться, что он не выше 5 метров. Ущерб от наводнения, уровень которого выше уровня дамбы на один метр, равен 8 млн. руб. Если уровень наводнения выше уровня дамбы на 2, 3 метра, то убытки соответственно равны 10, 13 млн. руб. Сметные затраты на строительство дамбы высотой x метров составляют $3,1 \cdot x$ тыс. руб. Определить оптимальную высоту дамбы минимизирующую общие затраты. Для части б) вероятность, того что уровень наводнения не превысит 5 метров равна 0.3, уровень не превысит 6 метров – 0.25, не превысит 7 метров – 0,25, не превысит 8 метров – 0,2.

Вариант 7. Агрофирма занимается выращиванием томатов в теплицах, при этом она может воспользоваться одной из трех технологий (стратегии A_1 , A_2 , A_3). Производственные расходы на отопление свет, полив и т.д. для различных стратегий зависят от состояний природы: P_1 – теплая, P_2 – умеренно холодная, P_3 – очень холодная. Урожайность при стратегии A_1 составляет 10 т. в месяц с одной теплицы, при стратегиях A_2 и A_3 – 8 тонн

и 12 тонн соответственно. Фирма может реализовать свою продукцию по 2 руб. за килограмм. При этом, заработная плата рабочим, обслуживающим теплицу в случае, если агрофирма придерживается стратегии A_1 составят 2800 руб в месяц, при стратегии A_2 – 3000 руб, при стратегии A_3 – 1500 руб. Производственные расходы (тыс. руб.) для различных состояний природы и вероятности их наступления отражены в таблице. Определить оптимальную стратегию агрофирмы.

$\begin{matrix} P \\ A \end{matrix}$	P_1	P_2	P_3
A_1	5	7,2	8
A_2	2	3	4
A_3	9,5	10,3	11,5
q_i	0.3	0.4	0.3

Вариант 8. Банк имеет возможность выделить 20 млн. руб. на формирование портфеля акций. Ценные бумаги можно приобрести у компаний K_1, K_2, K_3 . Номинальная стоимость акций компании K_1 составляет 610 тыс. руб, компании K_2 – 580 тыс. руб., компании K_3 – 920 тыс. руб. На конец года рынок ценных бумаг может оказаться в одном из двух состояний C_1, C_2 . Эксперты установили, что дивиденды компании K_1 для состояния C_1 на конец года составят 10,5% от номинальной стоимости акций, а для состояния C_2 – 11%; для компании K_2 – соответственно 11% и 10,5%; для компании K_3 – соответственно 11,8% и 12%. Сформировать портфель акций банка, обеспечив ему возможно большую прибыль, при условии, что банк покупает акции только у одной компании (часть денег может быть не использована). Вероятности появления состояний природы $C_1 = 0,65, C_2 = 0,35$.

Вариант 9. Решить задачу для варианта 8 при условии, что банк покупает акции у двух компаний. При этом у каждой компании банк покупает по 50% акций. Вероятности появления состояний природы $C_1 = 0,55, C_2 = 0,45$.

Вариант 10. Медпункту для выполнения необходимых назначений пациентам требуется от 450 до 730 ед. лекарств с ограниченным сроком хранения. Первоначально лекарство закупают в упаковке по 20 штук по цене 3100 руб. за упаковку. Если для выполнения всех назначений лекарства не хватает, его закупают в такой же упаковке, но по цене 4200 руб. за упаковку. Если же запас лекарств окажется лишним, его сдают на переработку, что приносит убыток в 1700 руб. за упаковку. Дать рекомендации по организации запасов лекарств в медпункте с минимальными затратами, если число назначений принимает значения из $\{450, 520, 590, 660\}$. Вероятности появления состояний природы $q_1 = 0,2, q_2 = 0,25, q_3 = 0,2, q_4 = 0,35$.

Вариант 11. Некоторая фирма договаривается о поставке станков для последующей их реализации. Спрос на станки колеблется от 10 до 15 единиц в месяц. Если станков недостаточно, то фирма может срочно заказать и завезти недостающее количество, если спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе. Требуется определить такой объем заказа, чтобы доход от реализации товара был наибольшим, учитывая дополнительные траты на хранение и срочный заказ, если закупочная цена единицы товара 10 тыс.руб., торговая надбавка – 30%, расходы на хранение – 100 руб., за срочный заказ и доставку – 200 руб. Для части б) известны вероятности того, что понадобится: 10 ед.товара – 0.1, 11 ед.товара – 0.2, 12 ед.товара – 0.2, 13 ед.товара – 0.3, 14 ед.товара – 0.1, 15 ед.товара – 0.1.

Вариант 12. Домовладелец заблаговременно планирует запастись углем для отопления дома зимой. Если зима будет мягкой, то на обогрев дома необходимо 8 т. угля, если обычной – 12 т., если холодной – 10 т. Летом тонна угля стоит – 150 руб., в мягкую зиму – 180 руб., в обычную – 220 руб., в холодную – 260 руб. Если закупленного летом угля не хватит, то его можно докупить зимой, а излишки продать весной по цене 150 руб. за тонну. Выработать рекомендации для домовладельца по закупке угля. Для части б) вероятности появления состояний природы: мягкая зима – 0,3, обычная – 0,45, холодная – 0,25.

Вариант 13. Сельскохозяйственное предприятие планирует выращивать капусту. Урожайность зависит от погодных условий и от количества внесенных удобрений. При благоприятных погодных (Π_1) условиях урожайность составляет 55 т. с га., при не очень благоприятных (Π_2) – 45 т. с га, при неблагоприятных (Π_3) – 40 т. с га. Внесение удобрений позволяет повысить урожайность. Существует три стратегии внесения удобрений. Повышение урожайности в %, при соблюдении стратегий A_1 , A_2 , A_3 для разных состояний природы указаны в таблице. 1 кг. комплексных удобрений стоит 1.30 руб. При стратегии A_1 необходимо внести 10 кг. удобрений на 10 м² за сезон, при стратегии A_2 – 15 кг. на 10 м², при стратегии A_3 – 18 кг. на 10 м². Найти оптимальную стратегию предприятия для получения максимальной прибыли, при условии, что 1 кг. капусты предприятие реализует по 50 коп. за 1 кг. Вероятности q_i наступления состояний природы указаны в последней строке таблицы.

$\begin{matrix} \backslash \\ A \end{matrix} \Pi$	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	5	8	12
A_2	10	12	14
A_3	15	18	20
q_i	0.3	0.4	0.3

Вариант 14. За зиму потребление мазута на ТЭЦ в зависимости от средней температуры (в норме, ниже нормы, выше нормы) составляет 26, 20 или 32 тонны. Если для обеспечения заданной температуры теплоносителя объема запасенного мазута окажется недостаточно, то можно закупить недостающее количество мазута в отопительный сезон, что потребует дополнительных затрат в размере 300 руб. за одну тонну. Если же запас мазута превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 200 руб. за одну тонну. Цена одной тонны мазута – 1200 рублей. Требуется найти оптимальный уровень запаса мазута, при котором затраты на приобретение и хранение будут минимальными. Вероятности того, что средняя температура зимы будет в норме, ниже нормы, выше нормы, равны соответственно 0.4, 0.25, 0.35.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: БГУ, 1981. – 350 с
2. Альсевич, В.В. Методы оптимизации: упражнения и задания / В.В. Альсевич. – Минск: БГУ, 2005. – 405 с.
3. Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – Москва: Советское радио, 1972. – 552 с.
4. Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
5. Краснопрошин, В.В. Исследование операций: учеб. пособие / В.В. Краснопрошин, Н.А. Лепешинский. – Минск: БГУ, 2013. – 191 с.
6. Костевич, Л.С. Исследование операций. Теория игр: учеб. пособие / Л.С. Костевич, А.А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – 368 с.
7. Сурин, Т.Л. Ситуационный анализ и моделирование управленческих решений / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Текст: электронный // Репозиторий ВГУ имени П.М. Машерова. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/33448> (дата обращения: 01.04.2025). – Электрон. копия печ. изд.: Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. 47 с.
8. Сурин, Т.Л. Методы оптимизации. Нелинейное программирование: метод. рекомендации / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Текст: электронный // Репозиторий ВГУ имени П.М. Машерова. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/22033> (дата обращения: 01.04.2025). – Электрон. копия печ. изд.: Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. 47 с.
9. Токарев, В.В. Методы оптимизации: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным и экономическим направлениям / В.В. Токарев – Москва: Юрайт, 2021. – 438 с.
10. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации» для специальности 1-31 03 07-03 01 Прикладная информатика (по направлениям) / Система управления обучением ВГУ имени П.М. Машерова. – URL: <https://newsdo.vsu.by/course/view.php?id=2564>, <https://newsdo.vsu.by/course/view.php?id=11935>.
11. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Исследование операций» для специальности «Прикладная математика» [/ Система управления обучением ВГУ имени П.М. Машерова. – URL: <https://newsdo.vsu.by/course/view.php?id=2931>.

Учебное издание

ИВАНОВА Жанна Викторовна

СУРИН Татьяна Леонидовна

БАРАНКОВА Юлия Андреевна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Сетевые модели. Теория игр

Методические рекомендации

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

Л.В. Рудницкая

Подписано в печать 21.05.2025. Формат 60х84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,45. Тираж 30 экз. Заказ 67.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.