

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2025*

УДК 37.016:51(075.8)
ББК 22.1р30я73+74.262.21я73
Р47

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 26.02.2025.

Составители: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук, доцент **В.В. Устименко**; заведующий кафедрой математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Т.Б. Караулова**

Р е ц е н з е н т ы :

доцент кафедры математики и компьютерной безопасности
Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой,
кандидат физико-математических наук, доцент *А.П. Мателенок*;
доцент кафедры прикладного
и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Е.А. Витько*

Решение математических задач с параметрами : методические рекомендации / сост.: В.В. Устименко, Т.Б. Караулова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2025. – 39 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами дисциплин: «Методы решения нестандартных задач», «Решение олимпиадных задач по математике», «Практикум по решению задач по алгебре» – специальностей бакалавриата. Учебное издание содержит краткие теоретические сведения, примеры выполнения заданий и задачи для самостоятельного решения студентами, изучающими различные методы решения уравнений и неравенств с параметрами. Предназначено для всех специальностей факультета математики и информационных технологий.

УДК 37.016:51(075.8)
ББК 22.1р30я73+74.262.21я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. Классификация и исследование уравнений с параметрами	5
1.1 Решение линейных уравнений с параметрами	5
1.2 Решение квадратных уравнений и уравнений, приводи- мых к ним	6
1.3 Задачи, связанные с расположением корней квадратного трехчлена	9
1.4 Решение рациональных уравнений с параметрами	20
2. Классификация и исследование неравенств с параметрами	23
2.1 Линейные неравенства	23
2.2 Квадратные неравенства	25
2.3 Рациональные неравенства	29
2.4 Иррациональные неравенства	33
ОТВЕТЫ	36
ЛИТЕРАТУРА	38

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение уравнений и неравенств с параметрами представляет собой важный этап математического образования, требующий дополнительного внимания и углубленного изучения. Задачи с параметрами представляют серьезные трудности для большинства студентов как с точки зрения логики, так и технического исполнения.

В рекомендациях рассматриваются и систематизируются методы решения уравнений и неравенств с параметрами. Анализируются различные подходы к решению. Основное внимание уделяется логическому разделению решений на ветви, требующему не только технических навыков, но и понимания сути конкретной задачи.

В задачах с параметрами, помимо неизвестных, встречаются величины, численные значения которых, хотя и не явно указаны, считаются известными на определенном числовом промежутке. Решение таких задач означает нахождение ответа при всех допустимых значениях параметра. Параметры, включенные в условие, существенно влияют на логику и техническую сторону решения, а также на формулировку ответа.

В данном издании предполагается не только изучение стандартных методов решения уравнений и неравенств с параметрами, но и обращение к признакам, которые позволяют логически разделять решение на различные ветви, что требует максимальной внимательности и тщательности при объединении результатов, чтобы избежать потери возможных решений и дополнительных трудностей.

Основная цель методических рекомендаций – систематизация методов решения уравнений и неравенств с параметрами, а также развитие логического мышления посредством их решения.

Методические рекомендации построены по следующему принципу: вначале изложены основные теоретические сведения о методах решения уравнений и неравенств с параметрами, затем предложено большое количество иллюстративных примеров различных типов к каждому разделу и задания для самостоятельного решения.

Адресовано студентам факультета математики и информационных технологий Витебского государственного университета имени П.М. Машерова.

Данное издание может применяться для подготовки к занятиям по дисциплинам: «Методы решения нестандартных задач», «Решение олимпиадных задач по математике», «Практикум по решению задач по алгебре».

1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

1.1. Решение линейных уравнений с параметрами

Линейное уравнение с параметрами – это уравнение вида $ax = b$, где a и b – это действительные числа (выражения), которые зависят от значений, x – неизвестная величина.

Решение такого уравнения можно найти следующим образом:

1. Если $a = 0$, то решение уравнения единственно $x = \frac{b}{a}$.
2. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то линейное уравнение не имеет решений, так как получается противоречие.
3. Если $a = 0$ и $b = 0$, то любое число является решением, так как получается тождество.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.1.1.

Решить уравнение $(a - 1)x + 2 = a + 1$ относительно неизвестной x .

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(a - 1)x = a - 1.$$

Если $a - 1 \neq 0$, следовательно, $a \neq 1$, тогда $x = \frac{a-1}{a-1} = 1$.

Если $a = 1$, тогда исходное уравнение будет выглядеть как $0 \cdot x = 0$. Отсюда получаем, что корнем уравнения является любое число из поля действительных чисел, т.е. $x \in R$.

Ответ: $x = 1$ при $a \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $x \in R$ при $a = 1$.

Пример 1.1.2.

Решить уравнение $(a^2 - 1)x + 1 = a$ относительно неизвестной x .

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(a^2 - 1)x = a - 1.$$

Решение данного уравнения разбивается на три случая:

Если $a^2 - 1 \neq 0$, следовательно $a \neq \pm 1$, тогда уравнение будет иметь только один корень, вычисляемый по формуле $x = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}$.

Если $a = 1$, тогда исходное уравнение будет выглядеть как $0 \cdot x = 0$. Получаем, что корнем уравнения является любое число из поля действительных чисел, т.е. $x \in R$.

Если $a = -1$, тогда исходное уравнение примет вид $0 \cdot x = -2$. Получаем, что уравнение не имеет смысла, т.е. $x \in \emptyset$.

Ответ: $x = \frac{1}{a+1}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; $x \in R$ при $a = 1$; $x \in \emptyset$ при $a = -1$.

Пример 1.1.3. Решить уравнение $\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m(x-1)} = m$ относительно неизвестной x .

Решение. Исходное уравнение при помощи равносильных преобразований можно привести к виду $\frac{(m^2-1)x-m^2-m+2}{m(x-1)} = 0$.

В свою очередь данное уравнение будет эквивалентно системе вида:

$$\begin{cases} (m^2 - 1)x = m^2 + m - 3, m \neq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно, при $m = 0$ исходное уравнение не имеет смысла, а значит и решений.

Решим первое уравнение системы $(m^2 - 1)x = m^2 + m - 2$. Преобразуем к виду $x = \frac{m^2+m-2}{m^2-1} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1}$. Для выполнения условия $x \neq 1$ необходимо найти значения параметра m при которых $\frac{m+2}{m+1} = 1$ и исключить их. Решив это уравнение, видим, что такие значения m отсутствуют.

Теперь рассмотрим случаи, когда $m = \pm 1$.

В случае, когда $m = 1$, первое уравнение системы принимает вид $0 \cdot x = 0$. Следовательно, $x \in R$. Тогда множеством решений системы будет объединение интервалов, т.е. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

В случае, когда $m = -1$, первое уравнение системы принимает вид $0 \cdot x = -2$. Следовательно, уравнение не имеет смысла и $x \in \emptyset$. Тогда система не имеет решений.

Ответ: $x = \frac{m+2}{m+1}$ при $m \notin \{-1; 0; 1\}$; $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ при $m = 1$; $x \in \emptyset$ при $m = -1, m = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения относительно неизвестной x .

1.1.1. $x - 1 = a + 2x + 3$.

1.1.2. $ax = 1$.

1.1.3. $a^2x = x + 1 + a$.

1.1.4. $\frac{x+a}{1+a} = \frac{x-a}{2+a}$.

1.1.5. $\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$.

1.2. Решение квадратных уравнений и уравнений, приводимых к ним

Квадратное уравнение с параметром имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, причем $a \neq 0$, где a , b и c – это действительные числа (выражения), которые зависят от значений, x – неизвестная величина. Левая часть уравнения – квадратный трехчлен или многочлен второй степени. Корни такого уравнения вычисляются по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Дискриминант или выражение вида: $D = b^2 - 4ac$ определяет дальнейший ход решения:

если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня, не равных друг другу;

если $D = 0$, то уравнение имеет два действительных корня, равные друг другу;

если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Отдельно можно рассмотреть случай, когда коэффициент b – четный, т.е. $b = 2k$, тогда корни можно вычислить по формуле $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Уравнения, в которых $b = 0$ или $c = 0$, называют неполными квадратными. Их удобно решать при помощи разложения на множители.

Теорема Виета:

Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения, тогда $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, а $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Также верно и обратное, т.е. если x_1, x_2 удовлетворяют условиям теоремы, то они являются корнями уравнения.

Для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ теорема Виета записывается в виде $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

В некоторых случаях есть возможность разложения квадратного трехчлена на множители:

$D > 0$, тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$D = 0$, тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Пример 1.2.1. Найти все значения параметра a , для которых квадратное уравнение $(a + 1)x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0$

а) имеет два различных корня;

б) не имеет корней;

в) имеет два равных корня;

г) имеет хотя бы один общий корень с уравнением $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Решение. Из условия, уравнение является квадратным, следовательно, $a \neq -1$. Необходимо вычислить дискриминант:

$$D = 4(a + 1)^2 - 4(a + 1)(a - 2) = 12(a + 1).$$

1) Если $D > 0$, тогда уравнение имеет два различных корня, т.е. при $a > -1$.

2) Если $D < 0$, тогда уравнение не имеет корней, т.е. при $a < -1$.

3) Если $D = 0$ при $a = -1$, тогда уравнение не может иметь два различных корня, так как это противоречит условию задачи.

4) Решим уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$, т.е. найдем его корни: $x_1 = 1, x_2 = 2$. Из условия, хотя бы один из x_1, x_2 должен являться корнем исходного уравнения. Если $x = 1$ является таковым, то, подставив его в $(a + 1)x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0$, мы должны получить верное равенство:

$$(a + 1) \cdot 1 + 2(a + 1) \cdot 1 + a - 2 = 0 \text{ верно только при } a = -\frac{1}{4}.$$

Аналогично для $x = 2$: $(a + 1) \cdot 2^2 + 2(a + 1) \cdot 2 + a - 2 = 0$ верно только при $a = -\frac{2}{3}$.

Следовательно, при $a = -\frac{1}{4}$ и $a = -\frac{2}{3}$ уравнение будет иметь хотя бы один общий корень с $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ответ: 1) $a \in (-1; +\infty)$; 2) $a \in (+\infty; -1)$; 3) $\emptyset$; 4) $a \in \{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}\}$.

Пример 1.2.2. Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Пусть x_1, x_2, x_3 – попарно различные действительные корни уравнения. Доказать, что в этом случае $a = b = c = 0$.

Решение. Из условия, x_1, x_2, x_3 – попарно различные действительные корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, тогда одновременно будут выполняться три равенства: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$, $ax_3^2 + bx_3 + c = 0$.

Вычтем из 1-го равенства 2-е, а затем 3-е:

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) + c = 0, a(x_1^2 - x_3^2) + b(x_1 - x_3) + c = 0.$$

Из условия $x_1 \neq x_2$ и $x_1 \neq x_3$, тогда получаем систему вида:

$$a(x_1 + x_2) + b = 0, a(x_1 + x_3) + b = 0.$$

Следовательно, $a(x_2 - x_3) = 0$.

Из данного равенства $a = 0$, так как $x_2 - x_3 \neq 0$. Подставим $a = 0$ в равенство $a(x_1 + x_2) + b = 0$, откуда $b = 0$. Тогда из исходного уравнения $c = 0$. Доказано.

Пример 1.2.3. Уравнение $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ имеет рациональные корни. Доказать, что эти корни являются целыми числами.

Решение. Пусть $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ – рациональный корень уравнения, при этом предполагаем, что $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{n^2} + p\frac{m}{n} + q = 0 &\Leftrightarrow m(m + pn) = -qn^2 \Leftrightarrow m^2 + mnp + qn^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m^2 = -n(qn + mp), \end{aligned}$$

откуда следует, что n является делителем m . Однако дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Следовательно, $n = 1$. Таким образом, корень уравнения имеет вид $x = m$, т.е. является целым числом.

Задачи для самостоятельного решения

1.2.1. При всех значениях параметров решить относительно x уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$.

1.2.2. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 + 2a - 3)x^2 - (2a^2 - 3a + 1)x = a^2 - a$ имеет более двух корней?

1.2.3. Доказать, что уравнение $x^2 + (2m + 1)x + 8n + 7 = 0$, если $m, n \in \mathbb{Z}$ не имеет рациональных корней.

1.3. Задачи, связанные с расположением корней квадратного трехчлена

Квадратный трехчлен вполне можно назвать главной функцией всей школьной математики. Безукоризненное знание свойств квадратного трехчлена требуется от каждого поступающего в высшее учебное заведение, так как задачи, связанные с расположением корней квадратного трехчлена, имеют особое значение. Для решения задач такого типа можно было бы сформулировать ряд теорем, однако их количество оказалось бы практически необозримым. Остается только одно – научиться формулировать утверждения о расположении корней квадратного трехчлена в соответствии с требованиями каждой конкретной задачи. Запомнить же следует наиболее общие.

Для формулировки таких утверждений нужно знание свойств квадратного трехчлена, а также умение мыслить одновременно на двух языках – алгебраическом и геометрическом. Это означает, что для любого свойства, сформулированного на алгебраическом языке, нужно уметь давать геометрическую интерпретацию и, наоборот, по поведению графика параболы дать общую оценку коэффициентов квадратного трехчлена и его корней. Например,

- если коэффициент при старшей степени квадратного трехчлена меньше нуля, то ветви параболы направлены вниз;
- если квадратный трехчлен не имеет действительных корней, то парабола не пересекает и не касается оси абсцисс;
- если весь график функции $y = ax^2 + bx + c$ находится выше оси абсцисс, то $a > 0$, а $b^2 - 4ac < 0$.

Пусть $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Все рассуждения будем вести для случая $a > 0$. Если $a < 0$, то нижеследующие рассуждения проводятся аналогично. Обозначим корни квадратного уравнения

$$f(x) = 0 \tag{1.3.1}$$

через x_1 и x_2 , а для дискриминанта будем использовать стандартное обозначение $D = b^2 - 4ac$.

При каких условиях оба корня квадратного уравнения (1.3.1), обязательно различные, больше некоторого числа d ?

График функции $y = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющий требованию задачи, изображен на рисунке 1.3.1.

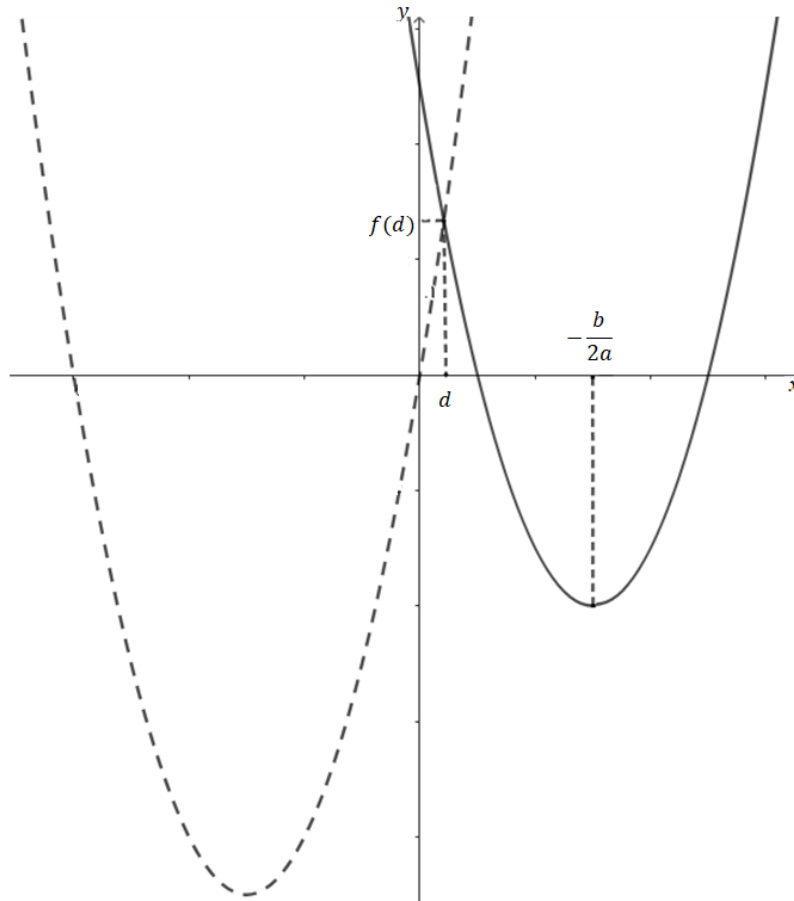


Рисунок 1.3.1

Во-первых, он пересекает ось абсцисс или касается ее, значит, дискриминант $D \geq 0$. Во-вторых, значение квадратного трехчлена в точке d положительно, то есть $f(d) > 0$. В третьих, абсцисса вершины параболы лежит на оси Ox правее точки d , то есть $-\frac{b}{2a} > d$ (квадратный трехчлен, график которого изображен пунктиром, удовлетворяет первым двум условиям, однако не удовлетворяет третьему).

Сформулируем следующее утверждение. При $a > 0$ оба корня квадратного уравнения (1.3.1) больше d в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > d, \\ f(d) > 0. \end{cases}$$

Несложно аналогично провести вывод условий при $a < 0$:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > d, \\ f(d) < 0. \end{cases}$$

Отметим, что эти два утверждения можно объединить: оба корня квадратного уравнения (1.3.1) больше d в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > d, \\ af(d) > 0. \end{cases}$$

При каких условиях оба корня квадратного уравнения (1.3.1), имеющего различные корни, не больше некоторого числа d ?

График квадратного трехчлена, удовлетворяющего требованию задачи, изображен на рисунке (1.3.2).

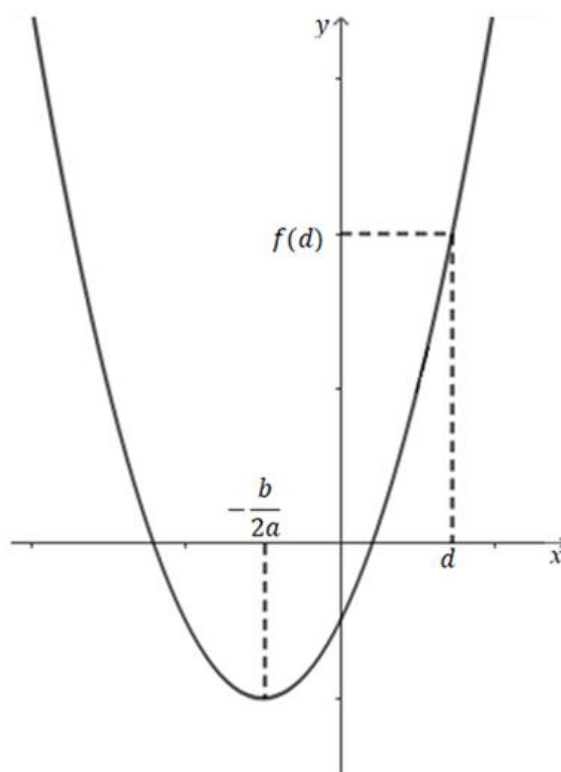


Рисунок 1.3.2

Положение параболы определяется условиями

$$\begin{cases} a > 0, D > 0, \\ f(d) \geq 0, -\frac{b}{2a} < d. \end{cases}$$

При каких условиях корни квадратного уравнения (1.3.1) лежат по разные стороны от числа d ?

Эту задачу можно переформулировать следующим образом. При каких условиях число d лежит между корнями уравнения (1.3.1)? Из графика квадратного трехчлена (рис. 1.3.3), корни удовлетворяют данному ограничению, видно, что для того, чтобы парабола пересекала ось Ox в точках, между которыми лежит точка $(d; 0)$, необходимо и достаточно, чтобы значение квадратного трехчлена в точке d было отрицательным.

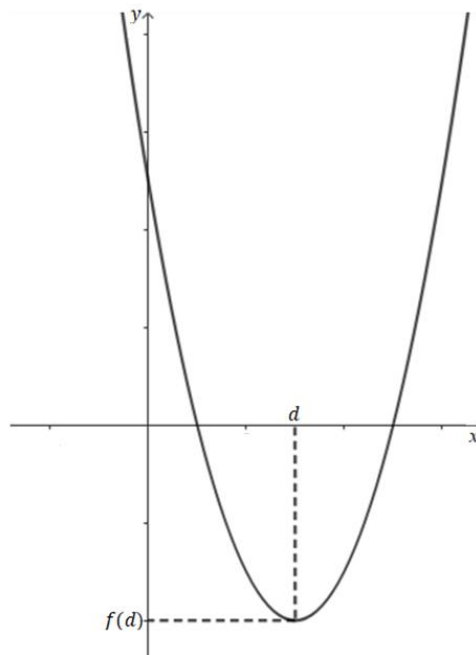


Рисунок 1.3.3

Таким образом, при положительных a искомое условие имеет вид $f(d) < 0$.

При каких условиях ровно один из двух различных корней квадратного уравнения (1.3.1) принадлежит интервалу $(d; e)$?

Из приведенных графиков (рис. 1.3.4) квадратных трехчленов, удовлетворяющих требованию задачи, видно, что для того, чтобы парабола пересекала интервал $(d; e)$ оси Ox в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы значения квадратного трехчлена в точках d и e были разных знаков, то есть искомое условие имеет вид

$$f(d)f(e) < 0.$$

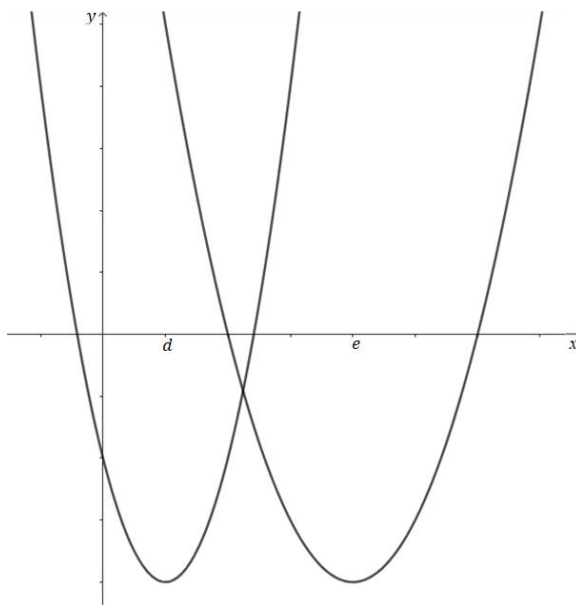


Рисунок 1.3.4

Очевидно, если

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(d) < 0, f(e) > 0, \end{cases}$$

то в рассматриваемом интервале лежит больший корень, а если

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(d) > 0, f(e) < 0, \end{cases}$$

то рассматриваемому интервалу принадлежит меньший корень.

При каких условиях два (необязательно различных) корня квадратного уравнения (1.3.1) лежат на отрезке $[d; e]$?

Рассматривая график квадратного трехчлена, удовлетворяющего требуемым ограничениям (рис. 1.3.5), нетрудно убедиться, что оба корня (различные или совпадающие) лежат на отрезке $[d; e]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, D \geq 0, \\ f(d) \geq 0, \\ f(e) \geq 0, \\ d \leq -\frac{b}{2a} \leq e. \end{cases}$$

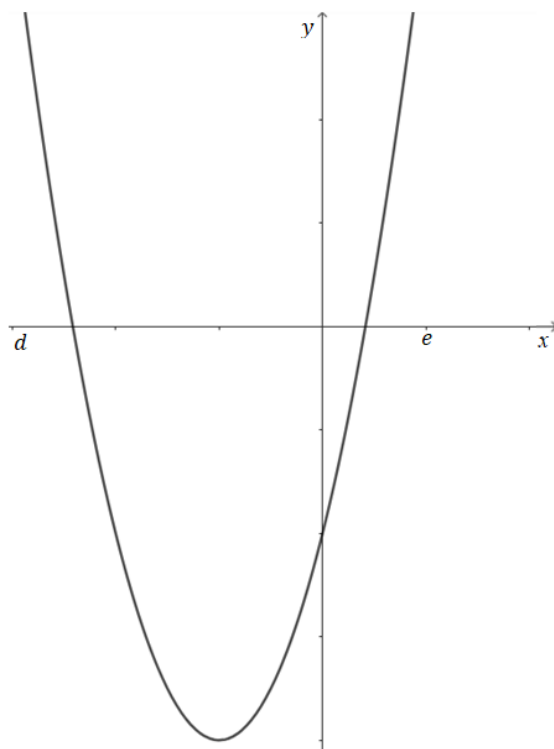


Рисунок 1.3.5

Из приведенных примеров уже достаточно ясно виден общий подход к решению задач рассматриваемого типа. Как правило, задачи с ограничениями на корни квадратного трехчлена сводятся к системе рациональных неравенств, которая решается методом интервалов. При этом для опреде-

ления условий, накладываемых на коэффициенты квадратного трехчлена, исследуются следующие его свойства:

- расположение параболы относительно оси Ox ;
- значения квадратного трехчлена в некоторых заданных точках;
- положение оси симметрии параболы относительно некоторых заданных точек.

Рассматривая примеры, приведенные выше, следует также обратить внимание на то, что, в силу непрерывности квадратичной функции, условие, гарантирующее наличие у квадратного уравнения корней, часто вытекает из такого утверждения, что применение дискриминанта для этих целей оказывается лишним.

Пример 1.3.1. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ действительные, различные и оба больше a .

Решение. Графическая интерпретация поставленной задачи представлена на рисунке 1.3.6.

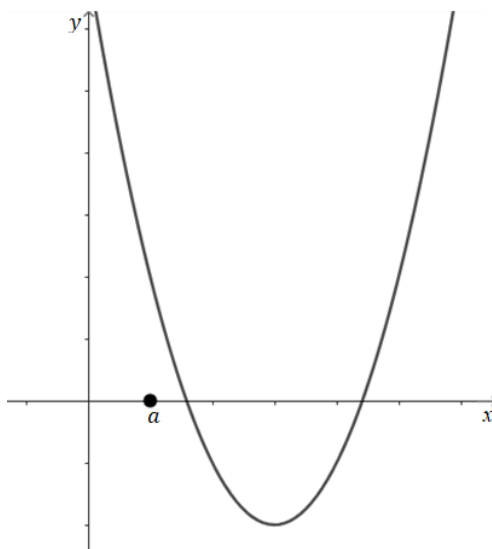


Рисунок 1.3.6

Исходное уравнение будет иметь два различных действительных корня, которые одновременно больше a , тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(a) > 0, \\ x_{\text{в}} > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a > 0, \\ a^2 + 2a > 0, \\ -\frac{1}{2} > a, \end{cases}$$

где $f(x) = x^2 + x + a$, а $x_{\text{в}}$ – абсцисса вершины параболы $y = f(x)$. Решая полученную систему методом интервалов, найдем $a \in (-\infty; -2)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2)$.

Пример 1.3.2. Найти все значения параметра a , при которых корни квадратного уравнения $ax^2 + 2(a + 3)x + a + 2 = 0$ неположительные.

Решение 1. Так как уравнение квадратное, то $a \neq 0$. Рассмотрим два случая.

Пусть $a > 0$ (рис. 1.3.7).

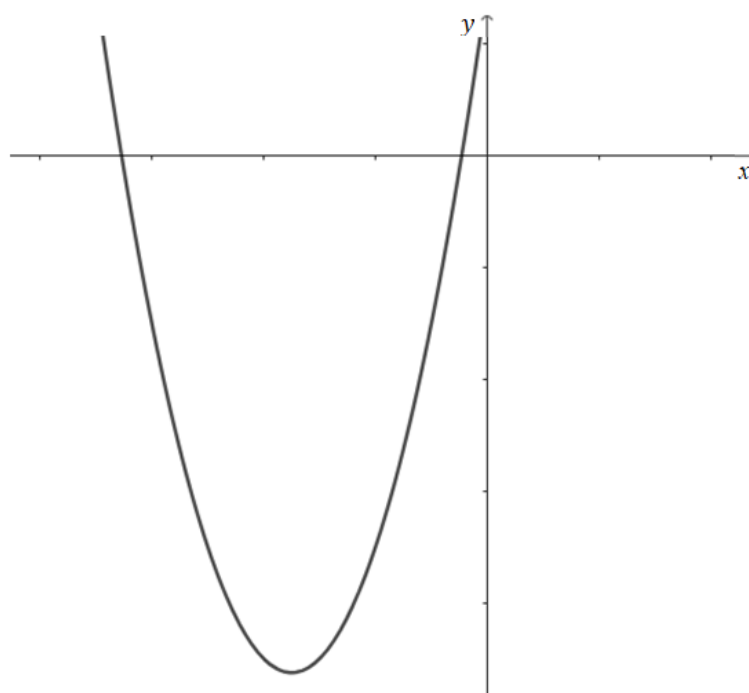


Рисунок 1.3.7

Для того чтобы исходное уравнение имело неположительные корни, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} a > 0, D \geq 0, \\ f(0) \geq 0, x_{\text{в}} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, (a+3)^2 - a(a+2) \geq 0, \\ a+2 \geq 0, -\frac{a+3}{a} \leq 0, \end{cases}$$

где $f(x) = ax^2 + 2(a+3)x + a+2$, $x_{\text{в}}$ – абсцисса вершины параболы $y = f(x)$. Применив к системе метод интервалов, получим $a \in (0; +\infty)$.

Пусть $a < 0$ (рис. 1.3.8).

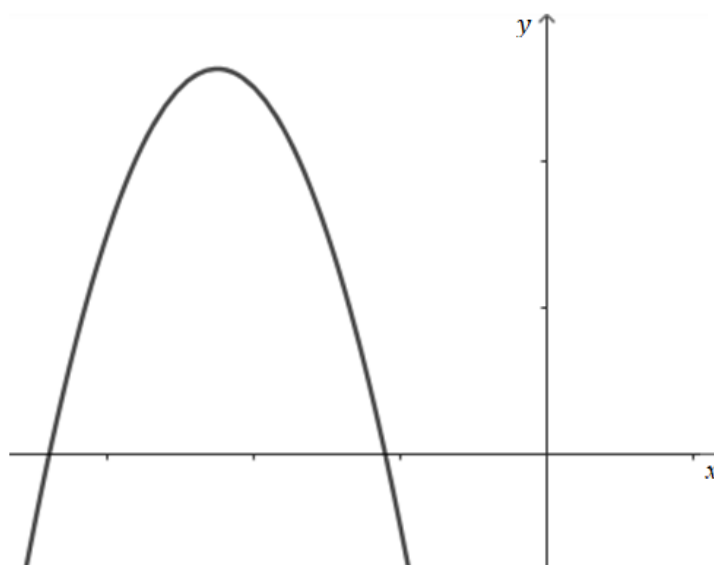


Рисунок 1.3.8

Положение параболы определяется условиями:

$$\begin{cases} a > 0, D \geq 0, \\ f(0) \leq 0, x_B \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, (a+3)^2 - a(a+2) \geq 0, \\ a+2 \leq 0, -\frac{a+3}{a} \leq 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является пустое множество.

Ответ: $a \in (0; +\infty)$.

Решение 2. Этот же ответ можно получить, если использовать теорему Виета. Чтобы у исходного квадратного уравнения существовали корни, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{D}{4} = (a+3)^2 - a(a+2)$ был неотрицательным. Тогда, по теореме Виета, $x_1 x_2 = \frac{a+2}{a}$, и это значение будет больше или равным 0 (так как оба корня одного знака). Кроме того, $x_1 + x_2 = -\frac{a+3}{a} \leq 0$, поскольку корни неположительны. Итак, искомые a удовлетворяют системе

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ \frac{a+2}{a} \geq 0, \\ \frac{a+3}{a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{9}{4}, \\ a \notin (-2; 0], \\ a \notin (-3; 0] \end{cases} \Leftrightarrow a > 0.$$

Пример 1.3.3. При каких значениях параметра a уравнение $2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ имеет корни разных знаков?

Решение. При решении данного примера пользоваться теоремой Виета невыгодно, поскольку получим условия

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^3 + 8a + 1)^2 - 8(a^2 - 4) > 0, \\ a^2 - 4 < 0, \end{cases}$$

но решить первое неравенство сложно. Отметим, что решать его, вообще говоря, и не надо, так как из второго неравенства системы следует, что $-8(a^2 - 4) > 0$, а значит, для всех решений второго неравенства первое выполняется.

Для того, чтобы парабола, являющаяся графиком функции $f(x) = 2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4$, пересекала ось абсцисс в точках, между которыми располагается начало координат, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен $y = f(x)$ принимал в точке $x = 0$ отрицательное значение (рис. 1.3.9), то есть искомое условие имеет вид $f(0) > 0$ или $a^2 - 4 < 0$.

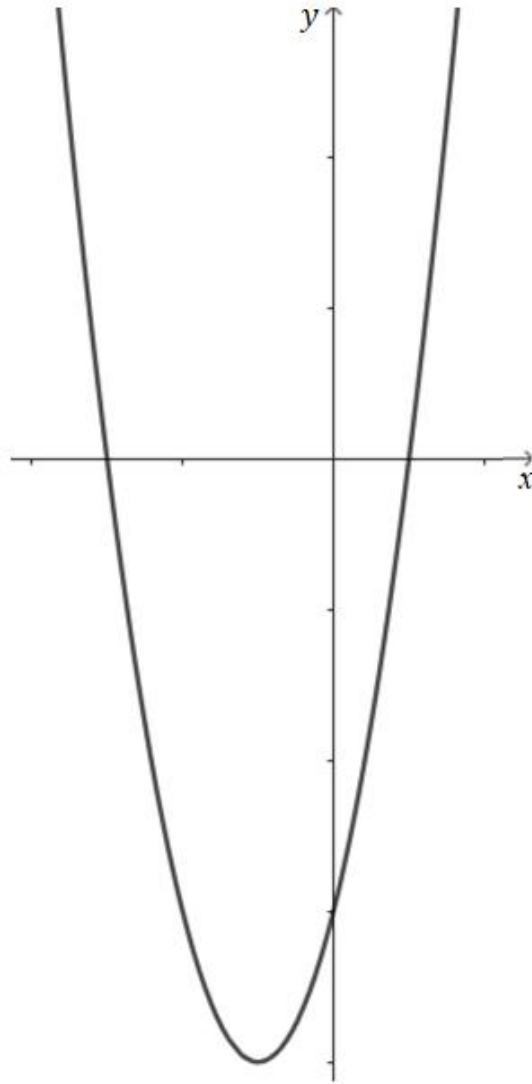


Рисунок 1.3.9

Ответ: $a \in (-2; 2)$.

Пример 1.3.4. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат отрезку $[0; 3]$?

Решение. При требуемом расположении корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - ax + 2$ положение соответствующей параболы (рис. 1.3.10), определяется условиями (x_v – абсцисса вершины параболы $y = f(x)$):

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(0) \geq 0, \\ f(3) \geq 0, \\ 0 \leq x_v \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8 \geq 0, \\ 2 \geq 0, \\ 11 - 3a \geq 0, \\ 0 \leq \frac{a}{2} \leq 3. \end{cases}$$

Данную систему решаем методом интервалов, откуда $a \in \left[2\sqrt{2}; \frac{11}{3}\right]$.

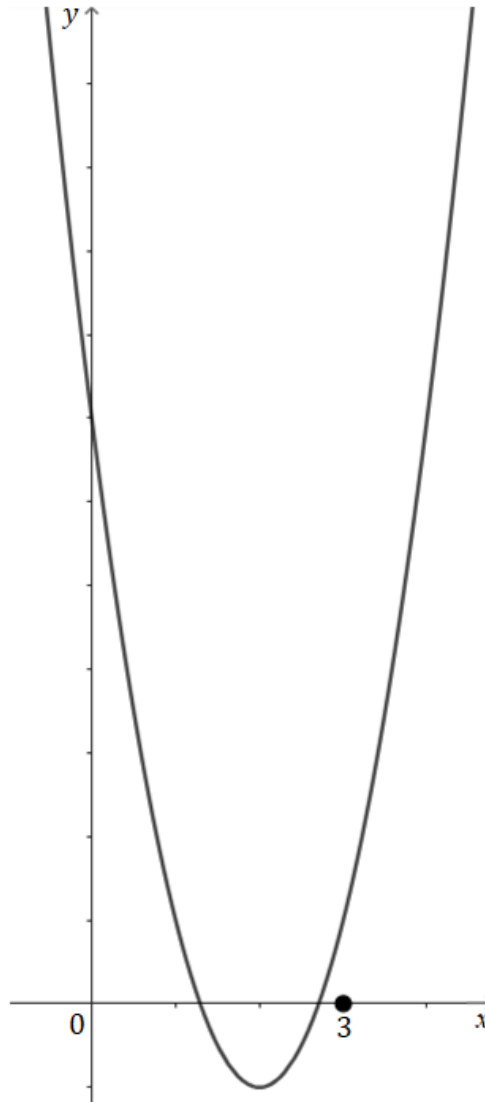


Рисунок 1.3.10

Ответ: $a \in \left[2\sqrt{2}; \frac{11}{3}\right]$.

Пример 1.3.5. При каких значениях параметра a больший корень уравнения $x^2 + 4x - (a - 1)(a - 5) = 0$ принадлежит промежутку $[0; 1)$?

Решение. Положение параболы (рисунок 1.3.11), являющейся графиком квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + 4x - (a - 1)(a - 5)$, при котором только лишь ее правая ветвь пересекает промежуток $[0; 1)$ оси Ox , определяется условиями:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) \leq 0, \\ f(1) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -(a - 1)(a - 5) \leq 0, \\ 5 - (a - 1)(a - 5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(a - 5) \geq 0, \\ a^2 - 6a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} \begin{cases} a \leq 1, \\ a \geq 5, \end{cases} \\ 0 < a < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ 5 \leq a < 6. \end{cases} \end{aligned}$$

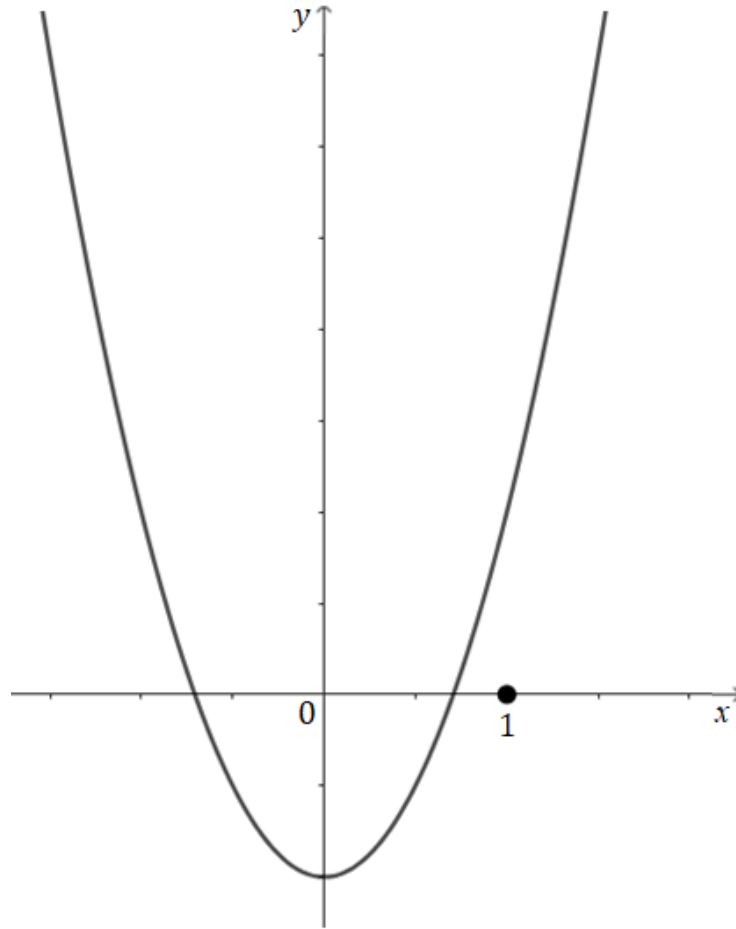


Рисунок 1.3.11

Ответ: $a \in (0; 1] \cup [5; 6)$.

Пример 1.3.6. При каких значениях параметра a все корни уравнения $a^2x^2 - ax - 2 = 0$ лежат все отрезка $[-1; 1]$?

Решение. При $a = 0$ исходное уравнение имеет вид $2 = 0$ и, следовательно, корней не имеет.

Если $a \neq 0$, то нетрудно видеть, что квадратный трехчлен $f(x) = a^2x^2 - ax - 2$ всегда имеет два корня разных знаков, так как $f(0) = -2 < 0$. При реализации требуемых ограничений на корни положение соответствующей параболы показано на рисунок 1.3.12. Необходимые и достаточные условия имеют вид:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + a - 2 < 0, \\ a^2 - a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ -2 < a < 1, \\ -1 < a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

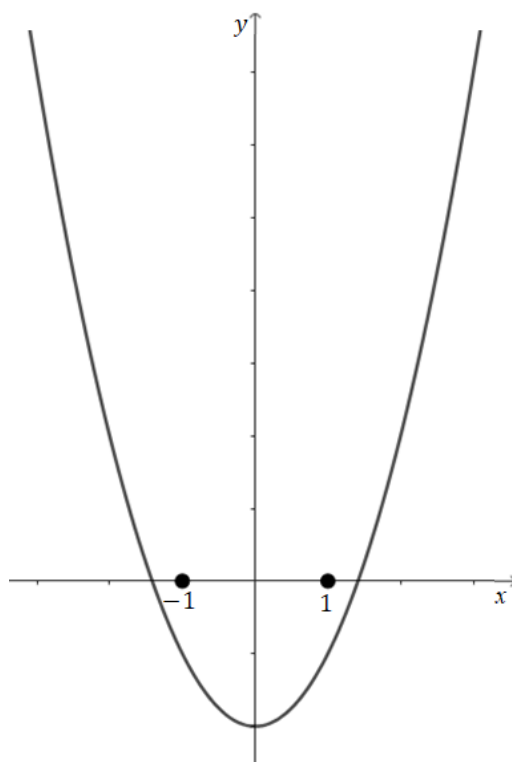


Рисунок 1.3.12

Ответ: $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1.3.1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых все корни уравнений $x^2 + 3x + 2a = 0$ и $x^2 + 6x + 5a = 0$ различны и между двумя корнями одного из них находится ровно один корень другого.

1.3.2. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $ax^2 + 2(a + 3)x + a + 2 = 0$ неотрицательны.

1.3.3. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - 2(a + 3)x + a + a^2 = 0$ не меньше 2.

1.3.4. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $ax^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$ имеют разные знаки.

1.3.5. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - 2(a - 2)x + 3a + a^2 = 0$ меньше -1 .

1.4 Решение рациональных уравнений с параметрами

Отношение многочленов вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называют дробно-рациональным выражением.

Рациональным называют уравнение, которое содержит исключительно дробно-рациональные выражения.

В общем виде они записываются так: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, причем $Q(x) \neq 0$. Таким образом, справедлива следующая система $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Это означает, что решение рационального уравнения сводится к вычислению корней уравнения $P(x) = 0$, при этом удовлетворяющее условию $Q(x) \neq 0$.

Существует несколько методов решения рациональных уравнений:

1) Все дроби приводятся к общему знаменателю, уравнение к стандартному виду.

2) Введение новых переменных. Данный метод один из самых часто встречаемых. В нем, в результате введения новых переменных начальное уравнение сводится к системе уравнений (уравнений и неравенств) более простого вида.

3) Выделение полного квадрата.

4) Метод применения производной пропорции. В случае, если дано $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $bd \neq 0$, тогда для любых m и n , любых α и β таких, что $ma + nb \neq 0$ и $mc + nd \neq 0$, справедливо равенство $\frac{a\alpha + \beta b}{ma + nb} = \frac{a\alpha + \beta d}{mc + nd}$. Такое равенство называют производной пропорцией.

В частном случае из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ могут получиться производные пропорции другого вида: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$, $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$.

Такое свойство пропорций можно применять, однако стоит иметь в виду, что преобразования такого вида могут привести как к потере корней (нули знаменателя производной пропорции), так и появлению новых (нули знаменателя исходной пропорции).

Пример 1.4.1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2}.$$

Решение. Для исходного уравнения составим равносильную систему:

$$\begin{cases} (x+2)(x-2) - (a+1)(2x-a-1) = 0, \\ a \neq -1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы к виду

$$x^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2 - 4 = 0.$$

Корни такого уравнения: $x_1 = a+3$, $x_2 = a-1$.

На следующем шаге рассмотрим значения параметра $a \neq -1$ такие, что корни уравнения удовлетворяют $x \neq 2$.

Если $a \neq -1$ и $a \neq 3$, то оба корня подходят. Если $a = 3$, то подходит только один корень: $x_1 = 6$.

Ответ: $x \in \emptyset$ при $a \neq -1$, $x_1 = 6$ при $a = 3$, $x_1 = a + 3$, $x_2 = a - 1$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Пример 1.4.2. Найти все значений параметра b , при которых уравнение $\frac{x^2 + (3b-1)x + 2b^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$ имеет только одно решение.

Решение. Запишем равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 + (3b - 1)x + 2b^2 - 2 = 0, \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Корни второго уравнения системы: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Следовательно, для того чтобы система имела решение, корни первого уравнения не должны принимать значения $x = -1$; $x = 4$.

Единственное решение система может иметь в трех случаях:

1) Если уравнение $x^2 + (3b - 1)x + 2b^2 - 2 = 0$ имеет единственное решение, причем оно $x \neq -1$; $x \neq 4$. Вычислим дискриминант $D = b^2 - 6b + 9 = (b - 3)^2$. $D = 0$ при $b = 3$. Тогда единственным корнем уравнения является $x = -4$.

2) Если уравнение $x^2 + (3b - 1)x + 2b^2 - 2 = 0$ имеет два различных корня, но один из них совпадает с $x = -1$, а второй отличен от $x = 4$. При $b \neq 3$ корнями уравнения являются $x_1 = -b - 1$, $x_2 = -2b + 2$. Если $-b - 1 = -1$, т.е. $b = 0$, тогда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Значит система имеет единственное решение x_2 . Если $-2b + 2 = -1$, т.е. $b = \frac{3}{2}$, тогда $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -1$. Значит система имеет единственное решение x_1 .

3) Если уравнение $x^2 + (3b - 1)x + 2b^2 - 2 = 0$ имеет два различных корня, но один из них совпадает с $x = 4$, а второй отличен от $x = -1$. Если $-b - 1 = 4$, т.е. $b = -5$, тогда $x_1 = 4$, $x_2 = 12$. Значит система имеет единственное решение x_2 . Если $-2b + 2 = 4$, т.е. $b = -1$, тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Значит система имеет единственное решение x_1 .

Ответ: $b \in \{-5; -1; 0; \frac{3}{2}; 3\}$.

Задачи для самостоятельного решения

При всех значениях параметров решить относительно x уравнения.

1.4.1. $\frac{a}{a-2x} = 3$.

1.4.2. $\frac{(x-4a)(x+2a+3)}{x+3a} = 0$.

1.4.3. $\frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1$.

1.4.4. $\frac{x}{x-m} + \frac{2m}{x+m} = \frac{8m^2}{x^2-m^2}$.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРОМ

2.1. Линейные неравенства

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, где a и b – действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называются линейными неравенствами.

В зависимости от значений коэффициентов a и b решением линейного неравенства может быть как неограниченный промежуток, так и вся числовая прямая, либо вовсе пустое множество.

Решение линейных неравенств вида $ax > b$:

1. если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$;
2. если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$;
3. если $a = 0$ и $b < 0$, то $x \in R$;
4. если $a = 0$ и $b \geq 0$, то $x \in \emptyset$.

Решение линейных неравенств вида $ax < b$:

1. если $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$;
2. если $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$;
3. если $a = 0$ и $b > 0$, то $x \in R$;
4. если $a = 0$ и $b \leq 0$, то $x \in \emptyset$.

Решение линейных неравенств вида $ax \geq b$:

1. если $a > 0$, то $x \geq \frac{b}{a}$;
2. если $a < 0$, то $x \leq \frac{b}{a}$;
3. если $a = 0$ и $b \leq 0$, то $x \in R$;
4. если $a = 0$ и $b > 0$, то $x \in \emptyset$.

Решение линейных неравенств вида $ax \leq b$:

1. если $a > 0$, то $x \leq \frac{b}{a}$;
2. если $a < 0$, то $x \geq \frac{b}{a}$;
3. если $a = 0$ и $b \geq 0$, то $x \in R$;
4. если $a = 0$ и $b < 0$, то $x \in \emptyset$.

Пример 2.1.1. При всех значениях параметра a решить неравенство $5x - a > ax + 3$.

Решение. Равносильными преобразованиями приведем неравенство к виду $(5 - a)x > a + 3$. При решении будем рассматривать три случая.

- 1) Если $a > 5$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a+3}{5-a}\right)$.
 - 2) Если $a < 5$, то $x \in \left(\frac{a+3}{5-a}; +\infty\right)$.
 - 3) Если $a = 5$, то неравенство примет вид $0 \cdot x > 8$, то есть $x \in \emptyset$.
- Ответ: $x \in \left(\frac{a+3}{5-a}; +\infty\right)$ при $a < 5$; $x \in \emptyset$ при $a = 5$; $x \in \left(-\infty; \frac{a+3}{5-a}\right)$ при $a > 5$.

Пример 2.1.2. Решить неравенство $a(3 - x) \geq 3x + a$ относительно x .
 Решение. Первоначальное неравенство приведем к виду $(a + 3)x \leq 2a$.
 Тогда $x \in \left(-\infty; \frac{2a}{a+3}\right]$ при $a > -3$; $x \in \left[\frac{2a}{a+3}; +\infty\right)$ при $a < -3$; $x \in \emptyset$ при $a = -3$.
 Ответ: $x \in \left[\frac{2a}{a+3}; +\infty\right)$ при $a < -3$; $x \in \emptyset$ при $a = -3$; $x \in \left(-\infty; \frac{2a}{a+3}\right]$ при $a > -3$.

Пример 2.1.3. Решить относительно x неравенство $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} > \frac{a+b}{ab}$, $a < 0$, $b < 0$.
 Решение. Неравенство приведем к виду $\frac{b+a}{ab}x > \frac{a+b}{ab}$, где $a < 0$, $b < 0$.
 Так как $a < 0$, $b < 0$, то $a + b < 0$, а $ab > 0$. Значит $\frac{b+a}{ab} < 0$. Учитывая это, разделим левую и правую части исходного неравенства на $\frac{b+a}{ab}$. Тогда мы получим неравенство $x < 1$, которое равносильно условию.
 Ответ: $x \in (-\infty; 1)$.

Пример 2.1.4. Решить относительно x неравенство $x - 2\frac{a-1}{a} \leq \frac{2}{3a}(x + 1)$.
 Решение. Равносильными преобразованиями приведем исходное неравенство к виду $\frac{3a-2}{3a}x \leq \frac{2(3a-2)}{3a}$.
 При $a = 0$ неравенство не имеет смысла.
 Тогда рассмотрим 3 случая, при которых $a \neq 0$.
 1) Пусть $\frac{3a-2}{3a} \geq 0$. При решении этого неравенства методом интервалов, получим $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.
 Если a принимает данные значения, то неравенство равносильно неравенству $x \leq 2$.
 2) Пусть $\frac{3a-2}{3a} < 0$, то есть $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$. В этом случае неравенство будет равносильно неравенству $x \geq 2$.
 3) Пусть $\frac{3a-2}{3a} = 0$, тогда $a = \frac{2}{3}$. При этом значении a неравенство равносильно неравенству $0 \cdot x \leq 0$, а значит $x \in R$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2]$ при $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; $x \in [2; +\infty)$ при $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$; $x \in R$ при $a = \frac{2}{3}$; $x \in \emptyset$ при $a = 0$.

Пример 2.1.5. Решить относительно x неравенство $\frac{3x+1}{a^2-1} - \frac{2x-1}{a-1} \leq \frac{x-1}{a+1}$.

Решение. Имеем $\frac{3x+1}{a^2-1} - \frac{2x-1}{a-1} \leq \frac{x-1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{3x+1-(a+1)(2x-1)-(a-1)(x-1)}{a^2-1} \leq 0$.
Отсюда $\frac{(2-3a)x+(2a+1)}{a^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2-3a}{a^2-1}x \leq -\frac{2a+1}{a^2-1} \Leftrightarrow \frac{3a-2}{a^2-1}x \geq \frac{2a+1}{a^2-1}$.

При решении последнего неравенства будем рассматривать три случая.

1) Пусть $\frac{3a-2}{a^2-1} > 0$. При помощи метода интервалов находим $a \in \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. Если a равно этим значениям, то рассматриваемое нами неравенство будет равносильно неравенству $x \geq \frac{2a+1}{3a-2}$.

2) Пусть $\frac{3a-2}{a^2-1} < 0$. Тогда $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right)$. При этих значениях a получим, что $x \leq \frac{2a+1}{3a-2}$.

3) Пусть $\frac{3a-2}{a^2-1} = 0$. Тогда $a = \frac{2}{3}$. В таком случае последнее неравенство равносильно неравенству $0 \cdot x \geq -\frac{21}{5}$, то есть $x \in R$.

При $a = \pm 1$ исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: $x \in \left[\frac{2a+1}{3a-2}; +\infty\right)$ при $a \in \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; $x \in \left(-\infty; \frac{2a+1}{3a-2}\right]$ при $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right)$; $x \in R$ при $a = \frac{2}{3}$; $x \in \emptyset$ при $a = \pm 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить относительно x неравенства.

2.1.1. $a(2x-1) < ax+5$.

2.1.2. $a^2 + ax < 1 - x$.

2.1.3. $\frac{ax+1}{3} + \frac{4a-x}{2} < \frac{a^2}{6}$.

2.1.4. $2x + 3(ax-8) + \frac{x}{3} < 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 5$.

2.1.5. $\frac{3ax+4}{3a+9} < \frac{x}{a+3} + \frac{3a-5}{3-a}$.

2.2 Квадратные неравенства

Неравенства вида:

$$ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (a \neq 0),$$

где a, b, c — действительные числа или выражения, которые зависят от параметров, называются **квадратными**.

Чтобы решить квадратные неравенства, нужно применить свойства квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Они допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть дано неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ ($a \neq 0$).

Рассмотрим случаи, которые возможны.

1. Если $a > 0$ и дискриминант $D < 0$, то решением неравенства будут все $x \in R$.
2. Если $a > 0$ и $D = 0$, тогда $x \in \left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.
3. Если $a > 0$ и $D > 0$, то $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, где x_1, x_2 — наименьший и наибольший корни квадратного трехчлена соответственно.
4. Если $a < 0$ и $D < 0$, то $x \in \emptyset$.
5. Если $a < 0$ и $D = 0$, то $x \in \emptyset$.
6. Если $a < 0$ и $D > 0$, то $x \in (x_1; x_2)$, где x_1, x_2 — наименьший и наибольший корни квадратного трехчлена соответственно.

Пример 2.2.1. Решить относительно x неравенство

$$mx^2 - 2(m-1)x + (m+2) < 0.$$

Решение. В условии не сказано, что исходное неравенство является квадратным. Тогда при решении данного неравенства будем рассматривать так же случай $m = 0$.

а) Пусть $m = 0$. В этом случае неравенство примет вид $2x + 2 < 0$, откуда $x < -1$.

б) Пусть $m > 0$ и $D = 4(m-1)^2 - 4m(m+2) = 4(1-4m) < 0$, то есть $m \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

В этом случае множество решений исходного неравенства пусто.

в) Пусть $m > 0$ и $D = 4(1-4m) = 0$, то есть $m = \frac{1}{4}$.

В этом случае неравенство тоже не будет иметь решений.

г) Пусть $m > 0$ и $D = 4(1-4m) > 0$, то есть $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. Тогда $x \in (x_1; x_2)$, где $x_1 = \frac{m-1+\sqrt{1-4m}}{m}$, $x_2 = \frac{m-1-\sqrt{1-4m}}{m}$.

Нужно сделать акцент на том, что $m < 0$, а значит x_1 — меньший, а x_2 — больший корень.

Ответ: $x \in (-\infty; -1)$ при $m = 0$;

$x \in \left(-\infty; \frac{m-1+\sqrt{1-4m}}{m}\right) \cup \left(\frac{m-1-\sqrt{1-4m}}{m}; +\infty\right)$ при $m < 0$;

$x \in \left(\frac{m-1-\sqrt{1-4m}}{m}; \frac{m-1+\sqrt{1-4m}}{m}\right)$ при $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$; $x \in \emptyset$ при $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Пример 2.2.2. Найти все значения параметра m , когда неравенство $(m-1)x^2 + (m+1)x + m+1 > 0$ справедливо для любых действительных x .

Решение. Пусть $m = 1$, тогда первоначальное неравенство примет вид $2x + 2 > 0$. Оно будет выполняться не при всех $x \in R$.

Пусть $m \neq 1$. В этом случае квадратный трехчлен

$f(x) = (m - 1)x^2 + (m + 1)x + m + 1$ принимает положительные значения при $x \in R$ тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} m - 1 > 0, \\ D = (m + 1)^2 - 4(m - 1)(m + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0, \\ -3m^2 + 2m + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1, \\ m < -1, \Leftrightarrow m > \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $m \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Пример 2.2.3. Найти все значения параметра a , при которых для всех x , которые по модулю не больше единицы, выполняется неравенство

$$(ax + 1 - a^2)(ax - a(1 - a)) < 0.$$

Решение. При $a = 0$ наше неравенство будет линейным и примет вид $0 < 0$. Это значит, что $a = 0$ не является искомым значением параметра.

При $a \neq 0$ исходное неравенство будет квадратным. В этом случае соответствующий квадратный трехчлен будет иметь два действительных корня $x_1 = \frac{a^2 - 1}{a}$, $x_2 = 1 - a$. Коэффициент при старшей степени квадратного трехчлена $a^2 > 0$. Значит, решением квадратного неравенства при $x_1 \neq x_2$ будут являться все значения x между x_1 и x_2 . Если корни квадратного трехчлена совпадут, то неравенство не будет иметь решений ни при каких значениях x , а значит соответствующие значения a исключаются из рассмотрения.

В условии говорится, что нужно найти те значения параметра a , при которых любое значение x из отрезка $-1 \leq x \leq 1$ лежит в промежутке между числами $\frac{a^2 - 1}{a}$ и $1 - a$. Здесь возможны два случая.

1) Пусть $a < 1 - a$. В этом случае должны выполняться неравенства $\frac{a^2 - 1}{a} < -1 < 1 < 1 - a$. Такое неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{a^2 - 1}{a} < -1, \\ 1 - a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + a - 1}{a} < 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ 0 < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

2) Пусть $1 - a < \frac{a^2-1}{a}$. В этом случае будут выполняться неравенства $1 - a < -1 < 1 < \frac{a^2-1}{a}$. Такое неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - a < -1, \\ \frac{a^2-1}{a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ \frac{a^2-a-1}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < a < 0, \Leftrightarrow a > 2. \\ a > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Если мы объединим множества, которые получили в двух пунктах, то получим ответ.

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

Пример 2.2.4. Найти все значения параметра k , при которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств $x^2 + 4kx + 3k^2$ и $x^2 + 2kx \leq 3k^2 - 8k + 4$.

Решение. Переформулируем данную задачу. Найти все значения параметра k , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1 > 0, \\ x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 \leq 0. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. Возьмем любой фиксированный k , тогда корнями квадратного уравнения $x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 = 0$ являются числа $x_1 = k - 2$, $x_2 = -3k + 2$. Тогда множество решений второго неравенства системы есть интервал, который образуется точками, лежащими между данными корнями.

Найдем все значения параметра k так, чтобы при них исходная система не имела решений. Не иметь решений система будет тогда, когда множество решений первого неравенства не содержит интервал $[x_1, x_2]$, а это выполняется при условии ($f(x) = x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1$):

$$\begin{cases} f(x_1) \leq 0, \\ f(x_2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k^2 + 4k(k-1) - 10k + 3 \leq 0, \\ 4k^2 - 4k(k-1) - 10k + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}.$$

Значит, если исходная система не имеет решений при $k \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, то при $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ данная система имеет хотя бы одно решение.

$$\text{Ответ: } k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить относительно x неравенства.

2.2.1. $x^2 - ax + 3 \leq 0$.

2.2.2. $ax^2 + 3x - 4 \geq 0$.

2.2.3. $x^2 - 2ax + 2a^2 - 2a + 1 > 0$.

2.2.4. $(a+1)x^2 - 2 \geq 0$.

2.2.5. $ax^2 + (a+1)x + 1 > 0$.

2.3 Рациональные неравенства

Рациональным называется такое неравенство, в котором есть только дробно-рациональные выражения. Все рациональные неравенства приводятся к одному из стандартных видов:

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, где $P(x), Q(x)$ – некоторые многочлены, а $Q(x) \not\equiv 0$. Чтобы решить такие неравенства, нужно использовать метод интервалов. Рассмотрим несколько утверждений, на которых базируется этот метод.

1. $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0$.

2. $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) < 0$.

3. $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

4. $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

5. Всякий многочлен $P_n(x)$ степени n на множестве действительных чисел можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - b_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - b_r)^{k_r} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_s = n$, b_i – действительные корни многочлена кратности k_i .

1. Если многочлен имеет действительные корни и $a_0 > 0$, то существует такой корень a_n , что $P_n(x) > 0$ при всех $x > a_n$ (если многочлен $P_n(x)$ не имеет действительных корней, то неравенство $P_n(x) > 0$ выполняется для всех $x \in R$).

2. Если многочлен имеет действительные корни и $a_0 < 0$, то найдется такой корень a_n , что $P_n(x) < 0$ при всех $x > a_n$ (если многочлен $P_n(x)$ не имеет действительных корней, то неравенство $P_n(x) < 0$ выполняется для всех $x \in R$).

3. Многочлен $P_l(x) = \alpha(x - \beta)^l$, $\alpha, \beta \in R, l \in N$, имеет следующие свойства:

а) если l – четное число и $\alpha > 0$, то $P_l(x)$ слева и справа от точки $x = \beta$ будет положительным.

б) если l – четное число и $\alpha < 0$, то $P_l(x)$ слева и справа от точки $x = \beta$ будет отрицательным.

в) если l – нечетное число и $\alpha > 0$, то $P_l(x)$ слева от точки принимает отрицательные значения, а справа – положительные.

г) если l – нечетное число и $\alpha < 0$, то $P_l(x)$ слева от точки принимает положительные значения, а справа – отрицательные.

Пример 2.3.1. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$ax > \frac{1}{x}.$$

Решение. Приведем исходное неравенство к равносильному

$$\frac{ax^2-1}{x} > 0. \quad (2.3.1)$$

Чтобы найти корни числителя и знаменателя в (2.3.1), нужно решить совокупность уравнений $x = 0$ и $ax^2 - 1 = 0$. При решении второго уравнения, а значит, и при решении неравенства (2.3.1), рассмотрим несколько случаев.

Пусть $a = 0$. В этом случае уравнение $ax^2 - 1 = 0$ решений не имеет, а неравенство (2.3.1) принимает вид $-x > 0$, откуда $x < 0$.

Пусть $a < 0$. В этом случае уравнение $ax^2 - 1 = 0$ решений не имеет.

Значит, если применить метод интервалов, то мы найдем, что решением неравенства (2.3.1) будут все $x \in (-\infty; 0)$.

Пусть $a > 0$. В этом случае уравнение $ax^2 - 1 = 0$ имеет два корня $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$. С помощью метода интервалов находим множество решений неравенства (2.3.1), которое состоит из объединения двух промежутков: $(x_1; 0) \cup (x_2; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0)$ при $a \leq 0$; $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{a}}; +\infty\right)$ при $a > 0$.

Пример 2.3.2. При всех значениях параметра a решить неравенство $x^4 - ax + 1 < 0$.

Решение. Чтобы определить корни многочлена, составим систему

$$\begin{cases} y = x^2, y \geq 0, \\ y^2 - ax + 1 = 0. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Пусть $f(y) = y^2 - ay + 1$. Уравнение $y^2 - ay + 1 = 0$ не может иметь корни разных знаков, так как $f(0) = 1$. При решении исходного неравенства рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть уравнение $y^2 - ay + 1 = 0$ (2.3.3) имеет два различных положительных корня. Это будет в том случае, если выполняются условия

$$\begin{cases} D = a^2 - 4 > 0, \\ y_B = \frac{a}{2} > 0, \\ f(0) = 1 > 0. \end{cases}$$

Решим данную систему и получим, что решением данной системы являются все $a \in (2; +\infty)$. Получим, что решение системы (2.3.2) состоит из

четырех чисел: $x_1 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$,
 $x_4 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$.

Если применим к исходному неравенству метод интервалов, то найдем, что его решениями являются все значения $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; x_4)$.

2) Если уравнение (2.3.3) имеет два корня, которые совпадают и положительны, то указанное расположение корней определяется условиями

$$\begin{cases} D = a^2 - 4 = 0, \\ y_b = \frac{a}{2} > 0, \\ f(0) = 1 > 0. \end{cases}$$

При решении получим, что $a = 2$, при этом данное решение будет единственным. При $a = 2$ многочлен $P_4(x) = x^4 - ax^2 + 1$ имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, причем эти корни являются корнями частной кратности. Значит, значения многочлена $P_4(x)$ остаются положительными при переходе через эти точки, значит решение исходного неравенства есть пустое множество.

3) При других значениях параметра a система (2.3.2) решений не имеет. В связи с этим многочлен $P_4(x)$ принимает исключительно положительные значения на множестве действительных чисел. Это означает, что при $a \in (-\infty; 2)$ у исходного неравенства нет решений.

Ответ: $x \in \emptyset$ при $a \in (-\infty; 2]$; при $a \in (2; +\infty)$

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}; -\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}} \right) \cup \left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}; \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}} \right).$$

Пример 2.3.3. При всех $a \geq 0$ решить неравенство

$$a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geq 0.$$

Решение. Неравенство принимает вид $-x + 3 \geq 0$ при $a = 0$. Отсюда следует, что решениями являются все $x \in (-\infty; 3]$. Проведем над левой частью неравенства следующие преобразования:

$$\begin{aligned} a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 &= a(a^2x^4 + 6ax^2 + 9) - x + 3 = \\ &= a(ax^2 + 3)^2 - x + 3 = a((ax^2 + 3)^2 - x^2) + ax^2 - x + 3 = \\ &= a(ax^2 + 3 - x)(ax^2 + 3 + x) + ax^2 - x + 3 = \\ &= (ax^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax + 3a + 1) \end{aligned}$$

Второй множитель – квадратный трехчлен. Его дискриминант $D = -a^2(12a + 3) < 0$.

Значит при $a \neq 0$ неравенство $a^2x^2 + ax + 3a + 1 > 0$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, первоначальное неравенство равносильно неравенству

$$ax^2 - x + 3 \geq 0. \quad (2.3.4)$$

Так как $a \neq 0$, то неравенство (2.3.4) является квадратным неравенством относительно x . Дискриминант равен $D = 1 - 12a$. В случае, когда $D \leq 0$, то есть $a \in \left[\frac{1}{12}; +\infty \right)$, то неравенство (2.3.4) выполняется при всех

$x \in R$. В случае, когда $D > 0$, $a \in \left(0; \frac{1}{12}\right)$, а решением является множество $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}; +\infty\right)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3]$ при $a = 0$; $x \in R$ при $a \in \left[\frac{1}{12}; +\infty\right)$;

$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}; +\infty\right)$ при $a \in \left(0; \frac{1}{12}\right)$.

Пример 2.3.4. Решить относительно x неравенство

$$x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + a^2 - a > 0.$$

Решение. Решим уравнение

$$x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + a^2 - a = 0. \quad (2.3.5)$$

Перепишем уравнение (2.3.5) как квадратное относительно a :

$$(1-x)a^2 + (x-1)a + x^3 - 2x^2 + x = 0.$$

Левая часть этого уравнения легко раскладывается на множители $(x-1)(-a^2 + a + x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-a)(x-1+a) = 0$, так как $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. Из этого следует, что уравнение (2.3.5) имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = a$ и $x_3 = 1 - a$.

К исходному неравенству применим метод интервалов. При этом будем учитывать, что взаимное расположение точек x_1 , x_2 , x_3 на числовой прямой будет меняться в зависимости от значения параметра a .

Если $x_1 = x_2$, то $a = 1$, при этом $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$. В этом случае решением исходного неравенства является множество всех значений $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Если $x_1 = x_3$, то $a = 0$, при этом $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = 0$. В этом случае решением исходного неравенства является множество всех значений $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Если $x_2 = x_3$, то $a = 0,5$, при этом $x_2 = x_3 = 0,5$, $x_1 = 1$. В этом случае решением исходного неравенства является множество всех значений $x \in (1; +\infty)$.

При $a < 0$ имеем $x_2 < x_1 < x_3$. Решением данного неравенства является множество $(a; 1) \cup (1 - a; +\infty)$.

При $0 < a < 0,5$ имеем $x_2 < x_3 < x_1$. Решением исходного неравенства является множество $(a; 1 - a) \cup (1; +\infty)$.

При $0,5 < a < 1$ имеем $x_3 < x_2 < x_1$. Решением исходного неравенства является множество $(1 - a; a) \cup (1; +\infty)$.

При $a > 1$ имеем $x_3 < x_1 < x_2$. Решением исходного неравенства является множество $(1 - a; 1) \cup (a; +\infty)$.

Ответ: $x \in (a; 1) \cup (1 - a; +\infty)$ при $a < 0$; $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ при $a = 0$; $x \in (a; 1 - a) \cup (1; +\infty)$ при $0 < a < 0,5$; $x \in (1; +\infty)$ при $a = 0,5$; $x \in (1 - a; a) \cup (1; +\infty)$ при $0,5 < a < 1$; $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ при $a = 1$; $x \in (1 - a; 1) \cup (a; +\infty)$ при $a > 1$.

Пример 2.3.5. При каких значениях параметра m неравенство $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4} > -1$ выполняется при всех $x \in R$?

Решение. Перенесем -1 влево и получим неравенство

$$\frac{2x^2-(m+3)x+2}{x^2-3x+4} > 0. \quad (2.3.6)$$

Так как $x^2 - 3x + 4 > 0$ при всех $x \in R$, то неравенство (2.3.6) равносильно неравенству $2x^2 - (m+3)x + 2 > 0$.

Это неравенство выполняется только тогда, когда

$$D = (m+3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

Ответ: $m \in (-7; 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

При всех значениях параметра a решить неравенство.

$$2.3.1. \frac{x-a}{x+2a} > 0.$$

$$2.3.2. \frac{(x-a)(x+2a)}{x+3a} < 0.$$

$$2.3.3. ax \leq \frac{1}{x-1}.$$

$$2.3.4. \frac{ax-(1-a)a}{a^2-ax-1} > 0.$$

$$2.3.5. \frac{2ax+3}{5x-4a} < 4.$$

2.4 Иррациональные неравенства

В процессе решения иррациональных неравенств применяются те же приемы, что и при работе с иррациональными уравнениями. Эти методы включают в себя шаги, такие как возведение обеих сторон неравенства в одну и ту же натуральную степень, введение новых переменных, умножение на определенные функции и использование свойств функций, присутствующих в обеих частях неравенства.

В отличие от подхода к уравнениям, где часто используются преобразования, приводящие к уравнению-следствию, и затем производится проверка и исключение лишних корней, основной метод решения иррациональных неравенств заключается в приведении их к равносильной системе рациональных неравенств или к набору таких систем. Следовательно, для успешного решения иррациональных неравенств необходимо умение обоснованно выполнять равносильные переходы на всем допустимом множестве значений переменной или его подмножествах.

Рассмотрим некоторые стандартные иррациональные неравенства.

$$1. \sqrt[n]{f(x)} < \varphi(x), n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < (\varphi(x))^{2n}, \\ f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

$$2. \sqrt[2n]{f(x)} < \varphi(x), n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^{2x}. \end{cases}$$

$$3. \frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\varphi(x)} > 1, n \in N, \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > 0. \\ f(x) > (\varphi(x))^{2n}. \end{cases}$$

$$4. \frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\varphi(x)} < 1, n \in N, \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (\varphi(x))^{2n}. \end{cases}$$

$$5. \sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, n \in N, \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > f(x). \end{cases}$$

$$6. \sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), n \in N, \Leftrightarrow f(x) > (g(x))^{2n+1}$$

$$7. \sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)}, n \in N, \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

Пример 2.4.1. При всех параметрах a решить неравенство $(1-a)\sqrt{2x+1} < 1$.

Решение. Если $a \geq 1$, то левая часть исходного неравенства является неположительной. Это значит, что исходное неравенство будет выполняться при всех x из ОДЗ переменной: $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Если $1-a > 0$, то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ 2x+1 < \frac{1}{(1-a)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, \\ x < \frac{2a-a^2}{2(a^2-2a+1)} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < \frac{2a-a^2}{2(a^2-2a+1)}.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ при $a \geq 1$; $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{2a-a^2}{2(a^2-2a+1)}\right)$ при $a < 1$.

Пример 2.4.2. При всех значениях параметра a решить неравенство $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x-a}$.

Решение. Составим равносильную исходному неравенству систему

$$\begin{cases} x+2 \geq x-a, \\ x-a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2, \\ x \geq a. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [a; +\infty)$ при $a \geq -2$; $x \in \emptyset$ при $a < -2$.

Пример 2.4.3. Решить относительно x неравенство $\sqrt{x} + 2ax + 3x > 0$.
Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} & \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}(2a + 3)) > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 0, \\ \sqrt{x}(2a + 3) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x}(2a + 3) > -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

При $2a + 3 \geq 0$ второе неравенство в системе (2.4.1) выполняется при всех $x > 0$, потому что слева неотрицательное выражение, а справа число -1 .

При $a \geq -\frac{3}{2}$ решениями системы (2.4.1) являются все $x > 0$.

При $2a + 3 < 0$, то есть, когда $a < -\frac{3}{2}$, нижнее неравенство в системе (2.4.1) равносильно неравенству $\sqrt{x} < \frac{-1}{2a+3} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{(2a+3)^2}$. Это значит, что решением системы (2.4.1) при $a < -\frac{3}{2}$ будет промежуток $\left(0; \frac{1}{(2a+3)^2}\right)$.

Ответ: $x \in (0; +\infty)$ при $a \geq -\frac{3}{2}$; $x \in \left(0; \frac{1}{(2a+3)^2}\right)$ при $a < -\frac{3}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить относительно x неравенство.

2.4.1. $(a + 1)\sqrt{2 - x} < 1$.

2.4.2. $(1 - a)\sqrt{3x + 4} < 2$.

2.4.3. $\sqrt{1 - x^2} < x + a$.

2.4.4. $(1 + a)\sqrt{4 - x} < 1$.

2.4.5. $\sqrt{2 + x} > a + 1$.

ОТВЕТЫ

1.1.1. $x = -a - 4$ при любом a . 1.1.2. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет. 1.1.3. Если $a \notin \{\pm 1\}$, то $x = \frac{1}{a-1}$; если $a = -1$, то x – любое число; если $a = 1$, то решений нет. 1.1.4. $x \in \emptyset$ при $a \in \{-2; -1\}$; $x = -2a^2 - 3a$ при $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$. 1.1.5. $x \in \emptyset$ при $a \in \{0; 2\}$; $x = \frac{3a+7}{2-a}$ при $a \notin \{0; 2\}$.

1.2.1. Если $a = 0$, то $x = 3$; если $a = \frac{1}{12}$, то $x = 6$; если $-\infty < a < 0$ или $0 < a < \frac{1}{12}$, то $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{2a}$; если $a > \frac{1}{12}$, то решений нет. 1.2.2. $a = 1$.

1.3.1. $a \in (0; 1)$. 1.3.2. $a \in (-3; -2]$. 1.3.3. $a \geq \frac{3+\sqrt{41}}{2}$. 1.3.4. $a \in (-3; 0)$. 1.3.5. $a < \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$.

1.4.1. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{3}$; если $a = 0$, то решений нет. 1.4.2. Если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x_1 = 4a$, $x_2 = -2a - 3$; если $a = 0$, то $x = -2a - 3$; если $a = 3$, то $x = 12$. 1.4.3. При $a = 0$ нет решений, при $a \neq 0$ $x \in \{a + 1, 1 + \frac{1}{a}\}$. 1.4.4. $x_1 = -5t$, $x_2 = 2t$ при $t \neq 0$; $x \in \emptyset$ при $t = 0$.

2.1.1. $x \in (-\infty; \frac{a+5}{a})$ при $a > 0$; $x \in (\frac{a+5}{a}; +\infty)$ при $a < 0$; $x \in \emptyset$ при $a = 0$. 2.1.2. $x \in (-\infty; 1-a)$ при $a > -1$; $x \in (1-a; +\infty)$ при $a < -1$; $x \in \emptyset$ при $a = -1$. 2.1.3. $x \in (\frac{a^2-12a-2}{2a+3}; +\infty)$ при $a < 1,5$; $x \in \emptyset$ при $a = 1,5$; $x \in (-\infty; \frac{a^2-12a-2}{2a+3})$ при $a > 1,5$. 2.1.4. $x \in (-\infty; \frac{63}{9a-5})$ при $a > \frac{5}{9}$; $x \in (\frac{63}{9a-5}; +\infty)$ при $a < \frac{5}{9}$; $x \in \emptyset$ при $a = \frac{5}{9}$. 2.1.5. $x \in (-\infty; \frac{a+1}{a-3})$ при $a \in (-\infty; -3) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$; $x \in (\frac{a+1}{a-3}; +\infty)$ при $a \in (-3; 1)$; $x \in \emptyset$ при $a \in \{-3; 1; 3\}$.

2.2.1. $x = \sqrt{3}$ при $a = 2\sqrt{3}$; $x = -\sqrt{3}$ при $a = -2\sqrt{3}$; $x \in \left[\frac{a-\sqrt{a^2-12}}{2}; \frac{a+\sqrt{a^2-12}}{2}\right]$ при $a \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$; нет решений при остальных a . 2.2.2. Пусть $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16a}}{2a}$; $x \in (-\infty; x_2] \cup [x_2; +\infty)$ при $a > 0$; $x \in [\frac{4}{3}; +\infty)$ при $a = 0$; $x \in [x_1; x_2]$ при $-\frac{9}{16} \leq a < 0$; нет решений при $a < -\frac{9}{16}$. 2.2.3. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ при $a = 1$, $x \in \mathbb{R}$ при $a \neq 1$.

2.2.4. Если $a > -1$, то $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{a+1}}\right] \cup \left(\sqrt{\frac{2}{a+1}}; +\infty\right]$; если $a \leq -1$, то нет решений. 2.2.5. Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{a}; +\infty\right)$; если $a = 1$, то $x \in R$ и $x \neq 1$; если $0 < a < 1$, то $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{a}\right) \cup (-1; +\infty)$; если $a = 0$, то $x \in (-1; +\infty)$; если $a < 0$, то $x \in \left[-1; -\frac{1}{a}\right)$.

2.3.1. Если $a = 0$, то $x \in R \setminus \{0\}$; если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -2a) \cup (a; +\infty)$; если $a < 0$, то $x \in (-\infty; a) \cup (-2a; +\infty)$. 2.3.2. Если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0)$; если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -3a) \cup (-2a; a)$; если $a < 0$, то $x \in (-\infty; a) \cup (-2a; -3a)$. 2.3.3. Если $a > 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}\right] \cup \left(1; \frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2a}\right]$; если $a \in (-4; 0]$, то $x \in (1; +\infty)$; если $a = -4$, то $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1; +\infty)$; если $a < -4$, то $x \in \left[\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{a}; \frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}\right] \cup (1; +\infty)$. 2.3.4. $x \in \left(\frac{a^2-1}{a}; 1-a\right)$ при $a \in (-\infty; -0,5) \cup (0; 1)$; $x \in \left(1-a; \frac{a^2-1}{a}\right)$ при $a \in (-0,5; 0) \cup (1; +\infty)$; $x \in \emptyset$ при $a \in \{-0,5; 0; 1\}$. 2.3.5. $x \in \left(-\infty; \frac{4a}{5}\right) \cup \left(\frac{3+16a}{20-2a}; +\infty\right)$ при $a < 10$; $x \in (-\infty; 8)$ при $a = 10$; $x \in \left(\frac{3+16a}{20-2a}; \frac{4a}{5}\right)$ при $a > 10$.

2.4.1. Если $a \leq -1$, то $x \leq 2$; если $a > -1$, то $x \in \left[2 - \frac{1}{(a+1)^2}; 2\right]$. 2.4.2. Если $a \geq 1$, то $x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$; если $-\infty < a < 1$, то $x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{4a(a-2)}{3(1-a)^2}\right)$. 2.4.3. Если $a \leq -1$, то $x \in \emptyset$; если $a \in (-1; 1]$, то $x \in (x_1; 1]$; если $a \in (1; \sqrt{2}]$, то $x \in [-1; x_1) \cup (x_2; 1]$; если $a > \sqrt{2}$, то $x \in [-1; 1]$, где $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}$. 2.4.4. Если $a \leq -1$, то $x \in (-\infty; 4]$, если $a > -1$, то $x \in \left(4 - \frac{1}{(1+a)^2}; 4\right]$. 2.4.5. Если $a \leq -1$, то $x \in [-2; +\infty)$; если $a = -1$, то $x \in (-2; +\infty)$; если $a > -1$, то $x \in ((a+1)^2 - 2; +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азаров, А.И. Математика для старшеклассников: методы решения задач с параметрами: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Федосенко. – Мн.: Аверсэв, 2005. – 272 с.
2. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – Просвещение, 2010. – 306 с.
3. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.
4. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.
5. Прокофьев, А.А. Задачи с параметрами / А.А. Прокофьев. – М.: МИЭТ, 2004. – 258 с.
6. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. – Просвещение, 2011. – 366 с.
7. Кабиров, Н.Н. Визуализация понятия дифференцируемости функции одной переменной / Н.Н. Кабиров // Современные проблемы науки и пути их решения / Сб. научных статей. Выпуск 28. Ч. 3. – Уфа: НИЦ Омега Сайнс, 2016. – С. 3 – 6.

Учебное издание

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Методические рекомендации

Составители:

УСТИМЕНКО Владимир Викторович

КАРАУЛОВА Татьяна Борисовна

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

А.В. Табанюхова

Подписано в печать

2025. Формат 60х84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,27. Уч.-изд. л. 2,18. Тираж

экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.