

Об отображениях решеток классов Фиттинга

Е. Н. ЗАЛЕССКАЯ, У. А. ПОПОВА

В настоящей работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям: (1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; (2) из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат $\mathfrak{F}$ всегда следует, что их произведение AB принадлежит $\mathfrak{F}$.

Решение многих задач описания строения классов Фиттинга и их классификации связано с применением операторов Локетта « $*$ » и « $_{*}$ » [1].

Напомним, что секцией Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, обозначаемой $Locksec(\mathfrak{F})$ [1], называют совокупность всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^*$, где класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Следуя [2], для пары классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ определим отображение

$$\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}^* \quad (1)$$

из $Locksec(\mathfrak{H})$ в $Locksec(\mathfrak{F})$. В работе [1] Локетт поставил проблему: верно ли, что отображение (1) сюръективно всегда, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп. В дальнейшем эта проблема стала известна как «гипотеза Локетта» [1].

Первоначально гипотеза Локетта была подтверждена Брайсом и Косси [3] для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга. Также гипотеза нашла подтверждение для следующих семейств классов Фиттинга: разрешимых локальных вида $\mathfrak{XN}$, $\mathfrak{XS}_{\pi} \mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман и Хаук [4]), произвольных разрешимых локальных (Н.Т. Воробьев [5]), произвольных локальных (Галледжи [6]).

Напомним, что если $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то отображение $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется ω -локальной функцией Хартли или ω -локальной H -функцией.

Пусть $LR_{\omega}(f) = \{G | G^{\omega} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G^{\omega} = G^{\mathfrak{E}_{\omega}}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_{\omega}$ – класс всех ω -групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется ω -локальным [7], если существует некоторая ω -локальная H -функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$. Доказана следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω -локальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{H}$ – насыщенная радикальная формация, $Char(\mathfrak{X}\mathfrak{H}) \subseteq \omega$, тогда отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $Locksec(\mathfrak{X}_{*}\mathfrak{H})$ сюръективно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lockett P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Bd. 137, N 2. S. 131–136.
- [2] Doerk K., Hawkes T. Finite solvable groups // Walter de Gruyter. 1992. New York, Berlin. 891 p.
- [3] Bryce R.A., Cossey J. A problem in Theory of Normal Fitting classes // Math. Z. 1975. V. 141. N 2. P. 99–100.
- [4] Beidleman J.C., Hauck P. Uber Fittingklassen und die Lockett-Vermutung // Math. Z. 1979. V. 167. N 2. P. 161–167.
- [5] Воробьев Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки. Т. 43, № 2. 1988. С. 161–168.
- [6] Gallego M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture // Comm. Algebra. 1996. V. 24, N 6. P. 2011–2023.
- [7] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск (Беларусь)

E-mail: zalesskayaen@yandex.by, ulyana.popova.01.01@mail.ru