АЛГЕБРА ЛИ $SL(2,\boldsymbol{R})$ С МАКСИМАЛЬНОЙ ГРУППОЙ АВТОИЗОМЕТРИЙ

Старовойтов А.К.,
студент 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

В данной работе мы рассмотрим трехмерную алгебру Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$, соответствующая группа Ли которой есть группа Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$, состоящая из всех квадратных матриц порядка 2 с определителем равным 1. Цель данной работы: найти такое лоренцево скалярное произведение на данной алгебре Ли, при котором данная алгебра Ли допускает максимальную группу автоизометрий.

Материал и методы. Объектом исследования являются трехмерная алгебра Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$, снабженная лоренцевым скалярным произведением. Используются методы линейной алгебры и теории алгебр Ли.

Результаты и их обсуждение. Автоизометрией алгебры Ли будем называть ее линейное преобразование, которое является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и изометрией для заданного в алгебре Ли скалярного произведения.

Алгебра Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ может быть представлена, как состоящая из матриц вида

$$U=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Естественно выбрать базис (E_1, E_2, E_3), состоящий из векторов

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Тогда матрица (1) будет иметь координаты (u_1, u_2, u_3). Базис (2) и координаты, которые он определяет мы назовем *естественными*. Мы заменим это базис на новый, состоящий из векторов $V_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}E_3$, $V_2=\frac{1}{2}E_1$, $V_3=\frac{1}{\sqrt{2}}E_2$. Тогда операция скобки будет выглядеть задаваться равенствами $[V_2, V_3] = V_1$, $[V_3, V_1] = V_3$, $[V_1, V_2] = V_2$.

Можно убедиться, что линейные преобразования $F_1(t)$ и $F_2(t)$ алгебры Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$, действие которых задается базисе (V_1, V_2, V_3) матрицами

$$\mathbf{F}_1(t)=\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}_2(\tau)=\begin{pmatrix} e^{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

являются автоморфизмами алгебры Ли и образуют однопараметрические группы.

Будем говорить, что операция скобки в алгебре Ли имеет диагональный вид, если она задается формулами

$$[W_2, W_3] = \lambda_1 W_1,\ [W_3, W_1] = \lambda_2 W_2,\ [W_1, W_2] = \lambda_3 W_3 \qquad (4)$$

при $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Любой базис, относительно которого операция скобки имеет диагональный вид при $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$, мы будем называть *каноническим*. Например, каноническим является базис, состоящий из векторов

$$W_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}V_1+\frac{1}{\sqrt{2}}V_3,\ W_2=V_2,\ W_3=\frac{1}{\sqrt{2}}V_1+\frac{1}{\sqrt{2}}V_3.$$

Линейные преобразования $F_3(\alpha)$ и $F_4(t)$ алгебры Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$, действие которых задается в базисе (W_1, W_2, W_3) соответственно матрицами

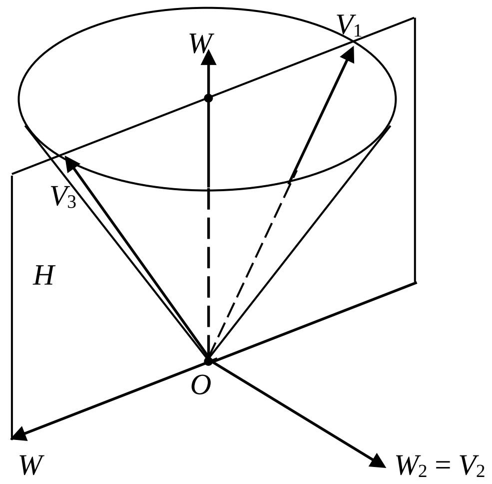
$$\mathbf{F}_3(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}_4(t)=\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

являются автоморфизмами алгебры Ли и образуют однопараметрические группы.

Векторы в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$, естественные координаты которых удовлетворяют условию $u_1^2 + u_2u_3 = 0$, называются параболическими. Если рассматривать алгебру Ли, как аффинное пространство, то все эти векторы, будучи отложенными из начала координат, лежат на конусе, который называется конусом параболических векторов. На рисунке показано расположение базисных векторов двух рассмотренных выше базисов относительно этого конуса.

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ задано лоренцево скалярное произведение. В работе [1] опубликован следующий результат.

Операцию скобки в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ *можно привести к диагональному виду в ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда конусы параболических и изотропных векторов либо совпадают, либо пересекаются по четырем направлениям, либо касаются друг друга по двум направлениям.*



Рисунок

В том и только в том случае, когда конусы параболических и изотропных векторов совпадают, все перечисленные выше однопараметрические группы автоморфизмов будут изометриями. Тем самым, имеет место следующий результат.

Теорема. *В том и только в том случае, когда скалярное произведение задается в каноническом базисе с помощью матрицы Грама*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}, \tag{6}$$

алгебра Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ *имеет максимальную группу автоизометрий.*

Однопараметрические группы $F_2(\tau)$ и $F_4(t)$ состоят из одних и тех же преобразований. Пусть $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Можно сказать, что ни одно из преобразований F_i не может быть получено в результате композиции преобразований из групп F_j и F_k. Тем самым, полная группа автоизометрий порождается тремя однопараметрическими группами. Преобразования $F_1(t)$ (кроме тождественного) имеют один изотропный собственный вектор, $F_2(\tau)$ – два изотропных собственных вектора, а $F_3(\alpha)$ не имеют собственных векторов при $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Заключение. В данной работе мы нашли лоренцево скалярное произведение в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$, при котором она допускает максимальную группу автоизометрий. Этот результат может быть использован при построении самоподобного однородного многообразия группы Ли $SL(2,\boldsymbol{R})$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой.

1. Подоксёнов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы алгебр Ли $SL(2,R)$. / М.Н. Подоксёнов, О.Ю.Кочергина // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам. Материалы международной научно-практической Интернет-конференции, посвящённой 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Н.Т. Воробьёва. Витебск, 21–22 июня 2011 года. Изд-во ВГУ 2011. С. 48–50.