

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ЧАСТНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

Перхальский А.В.,

студент 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Иванова Ж.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + dy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 = Q(x, y), \\ \dot{y} = ax + by + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 = P(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ взаимно простые многочлены с действительными коэффициентами, имеющую алгебраический интеграл третьего порядка

$$F(x, y) = x^3 + \alpha_1y^2 + \alpha_2x + \beta_2y + \alpha_3 = 0 \quad (2)$$

Многие вопросы естествознания приводят к изучению таких систем. Однако в большинстве случаев невозможно найти их решения в виде элементарных функций. Для прикладных задач зачастую важнее знать не сами решения, а развитие процессов, которые описываются такими системами, во времени. Такими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений.

Цель исследования заключается в выделении классов систем типа (1), обладающих интегралом вида (2), а также в нахождении состояний равновесия для этих систем и в определении их типов, что позволит проанализировать общее поведение их траекторий на протяжении любого интервала времени.

Материал и методы. Материал исследования – автономные системы дифференциальных уравнений второго порядка, имеющие алгебраические интегралы третьего порядка. Методами исследования являются методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Результаты и их обсуждение. Если (2) является частным интегралом системы (1), то имеет место соотношение

$$F'_x \cdot Q + F'_y \cdot P = FL, \quad (3)$$

где $L = rx + sy + l$, r, s, l – действительные коэффициенты [1]. Кроме того, в [1] доказано, что все состояния равновесия системы (1) лежат или на интеграле (2) или на прямой $rx + sy + l = 0$. Предположим, что состояние равновесия $O(0;0)$ лежит на прямой L , тогда $l = 0$. Предположим также, что $b_1 = b_2 = 1$. Этого всегда можно добиться, изменив масштаб на координатных осях и на временной шкале. Тогда, на основании (3), находим соотношения, связывающие коэффициенты системы (1) и коэффициенты интеграла (2):

В нашем случае соотношения имеют вид:

$$s = 6, \quad r = 3a_2, \quad c_2 = 0, \quad c = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad 4\alpha_1 = r\alpha_1, \quad 2\alpha_1c_1 = s\alpha_1$$

Следовательно, или $\alpha_1 = 0$, или $\alpha_1 \neq 0$, тогда $r = 4, \quad s = 2c_1$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$a_2 = \frac{4}{3}, \quad d = 2b, \quad a_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(3a - 2b)}{b}, \quad c_1 = 3,$$

$$\alpha_1 = -\frac{9}{2} \cdot \frac{b^2}{3a-2b}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{4}b^2, \quad \beta_2 = -\frac{3b^3}{3a-2b}, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{ab^3}{3a-2b}. \quad (4)$$

В этом случае система (1) и интеграл (2) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2by + \frac{4}{3}x^2 + 2xy, \\ \dot{y} = ax + by + \frac{2}{3} \cdot \frac{(3a-2b)}{b}x^2 + 2xy + 3y^2. \end{cases}$$

$$F(x, y) = x^3 - \frac{9}{2} \cdot \frac{b^2}{3a-2b}y^2 - \frac{3}{4}b^2x - \frac{3b^3}{3a-2b}y - \frac{3}{4} \cdot \frac{ab^3}{3a-2b} = 0.$$

Пусть $a = \alpha b, x = b\bar{x}, y = b\bar{y}, t = \frac{\bar{t}}{b}$, тогда, перейдя к старым обозначениям, получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + \frac{4}{3}x^2 + 2xy, \\ \dot{y} = \alpha x + y + \frac{2}{3} \cdot (3\alpha - 2)x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases} \quad (5)$$

с интегралом $F(x, y) = x^3 - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3\alpha-2}y^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{3\alpha-2}y - \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha}{3\alpha-2} = 0.$

Данная система имеет следующие состояния равновесия в конечной части плоскости: при $\alpha > \frac{3}{4}, \alpha \neq \frac{3}{2}$ – точка $O(0;0)$, точка $A_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$; при $\alpha = \frac{3}{4}$ – точка $O(0;0)$, точка $A_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, точка $A_2(3, -\frac{3}{2})$; при $\alpha < \frac{3}{4}$ – точка $O(0;0)$, точка $A_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, точка $A_2(-\frac{3(\alpha-1)+\sqrt{3(3-4\alpha)}}{3\alpha-2}, \frac{7\alpha-6-(\alpha-2)\sqrt{3(3-4\alpha)}}{2(3\alpha-2)})$, точка $A_3(-\frac{3(\alpha-1)-\sqrt{3(3-4\alpha)}}{3\alpha-2}, -\frac{(7\alpha-6)+(\alpha-2)\sqrt{3(3-4\alpha)}}{2(3\alpha-2)})$.

Для $\alpha \geq \frac{3}{4}$ исследован характер состояний равновесия системы (5): при $\alpha > \frac{3}{4}, \alpha \neq \frac{3}{2}$ – точка O – седло, точка A_1 – устойчивый фокус; при $\alpha = \frac{3}{4}$ – точка O – седло, точка A_1 – устойчивый фокус, A_2 – сложное состояние равновесия с двумя гиперболическими и одним параболическим секторами (седло-узел).

Заключение. В данной работе получены условия существования у систем (1) частных интегралов (2), выделены классы таких систем, найдены состояния равновесия в конечной части плоскости и для $\alpha \geq \frac{3}{4}$ определен их тип.

1. Яблонский, А.И. Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений / А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6. № 5. – С. 279–285.

2. Иванова, Ж.В. О предельных циклах одной квадратичной системы с алгебраическим интегралом четвертого порядка / Ж.В. Иванова. – Текст: электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/8249> (дата обращения: 10.03.2025). – Электрон. версия ст. из: Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П. М. Машэрава. 1999. № 3(13). С. 41–48.