

С.М. Бородич¹, Т.В. Кавитова²

¹*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь*

SPIN-код: 5379-9020

²*Средняя школа № 42 г. Витебска им. Д.Ф. Райцева, г. Витебск, Беларусь*

SPIN-код: 4044-6196

О БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА – ХОПФА В ОДНОЙ СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy - v\alpha x^3, \\ \dot{y} = -ly + bxy + v\beta y^3, \end{cases} \quad (1)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, v – положительный параметр, коэффициенты k, l, a, b, α и β положительны и удовлетворяют условию

$$0 < 2 \left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{k}{l} \right) < \frac{k}{l} - 1. \quad (2)$$

Система (1) относится к системам типа Лотки – Вольтерры, описывающим различные экологические модели.

При каждом допустимом значении параметра v рассматриваемая система имеет единственную стационарную точку (x_v, y_v) с положительными компонентами, причём (x_v, y_v) непрерывно зависит от v . Исследуется возможность качественной перестройки фазового портрета системы в окрестности стационарной точки при изменении параметра v .

Через $U_r(x_v, y_v)$ обозначаем открытый круг радиуса r с центром в точке (x_v, y_v) .

Под *диаметром* $D(\omega)$ *периодической орбиты* ω понимаем точную нижнюю грань множества диаметров всех кругов в фазовом пространстве системы, содержащих ω .

Методами, изложенными в [1; 2], устанавливается, что значение

$$\nu_0 = \frac{(la\sqrt{\alpha/\beta} - bk)(a\sqrt{\alpha/\beta} - b)}{\alpha(k-l)^2} \quad (3)$$

является бифуркационным для параметра ν , причём существуют такие $r > 0$ и $\delta > 0$, что выполняются условия:

1) для любого $\nu \in (\nu_0 - \delta, \nu_0]$ стационарная точка (x_ν, y_ν) является устойчивым фокусом и $U_r(x_\nu, y_\nu)$ не содержит периодических орбит системы (1);

2) для любого $\nu \in (\nu_0, \nu_0 + \delta)$ стационарная точка (x_ν, y_ν) – неустойчивый фокус, а в $U_r(x_\nu, y_\nu)$ существует единственная периодическая орбита ω_ν системы (1), причём ω_ν асимптотически устойчива и $D(\omega_\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \nu_0 +$.

Значение ν_0 параметра ν , удовлетворяющее указанным выше условиям, называется *точкой бифуркации Андронова – Хопфа*. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. При выполнении условия (2) система (1) имеет единственную точку бифуркации Андронова – Хопфа, которая находится по формуле (3).

Литература

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 6-е изд. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019.
2. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.