

Ю.А. Шпакова, М.Н. Подоксенов¹

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь*

¹SPIN-код: 5120-2532

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ НА PYTHON ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

В работах [1] и [2] были найдены левоинвариантные лоренцевы метрики на четырехмерных группах Ли $HS \times R^+$ и $SE(2) \times R^+$, при которых данные группы Ли являются самоподобными многообразиями, и доказано, что других метрик не существует. Вычисление вручную тензора кривизны для единственной метрики на группе Ли $SE(2) \times R^+$ показало, что многообразие является плоским. В связи с этим возникла необходимость проверить, не являются ли плоскими три самоподобных многообразия группы Ли $HS \times R^+$. При вычислении вручную приходится совершать большое число математических операций, и нельзя быть уверенным в отсутствии ошибки. Для более удобного отображения входных данных и результатов вычислений, а также большей автоматизации расчётов возникла идея разработки программы на языке программирования Python.

Для разработки программы были выбраны среда разработки Visual Studio 2022 и язык программирования Python. Для создания интерфейса программы была использована библиотека Tkinter. С ее помощью были созданы окно программы, поля ввода и вывода данных, а также кнопки.

Алгоритм вычисления тензора кривизны:

1) Умножаем матрицы: $adE_1, \dots, adE_4$ на матрицу Грама $gram_matrix$ при помощи $np.dot$. Получаем четыре матрицы: $adE_1_G, \dots, adE_4_G$.

2) Вычисляем символы Кристоффеля, при помощи функции $\Gamma(a_1, a_2, a_3, a_4, ch)$. Получаем четыре матрицы: $\Gamma_{1ij}, \dots, \Gamma_{4ij}$.

3) Умножаем обратную матрицу Грама на матрицы, найденные в пункте 2). Получаем четыре матрицы: $G1_{Gamma_{1ij}}$, ..., $G1_{Gamma_{4ij}}$.

4) Транспонируем полученные матрицы при помощи `pr.transpose`. Получаем четыре матрицы: $Nubla_E1$, ..., $Nubla_E4$.

5) Вычисляем шесть матриц $Nubla_E1_E2$, $Nubla_E1_E3$, $Nubla_E1_E4$, $Nubla_E2_E3$, $Nubla_E2_E4$, $Nubla_E3_E4$ операторов $\nabla_{[E_i, E_j]}$.

6) Умножаем попарно матрицы: $Nubla_E1$, ..., $Nubla_E4$. Получаем шесть матриц: $Nubla_12$, $Nubla_13$, $Nubla_14$, $Nubla_23$, $Nubla_24$, $Nubla_34$.

7) Умножаем те же матрицы в обратном порядке. Получаем шесть матриц: $Nubla_21$, $Nubla_31$, $Nubla_41$, $Nubla_32$, $Nubla_42$, $Nubla_43$.

8) Вычисляем шесть матриц: R_E1_E2 , R_E1_E3 , R_E1_E4 , R_E2_E3 , R_E2_E4 , R_E3_E4 при помощи функции $R_E_E(a1, a2, a3)$, элементами которых являются компоненты тензора кривизны типа (3.1).

9) Умножаем матрицу Грама на шесть найденных матриц.

Конечный итог: имеем шесть матриц R_E12 , R_E13 , R_E14 , R_E23 , R_E24 , R_E34 , элементами которых являются компоненты тензора кривизны типа (4.0).

По итогу разработки получена готовая рабочая программа для вычисления тензора кривизны. Для расчета нужно ввести матрицу Грама и структурные константы в виде четырех матриц операторов $ad E_1$, $ad E_2$, $ad E_3$, $ad E_4$ (рис. 1).

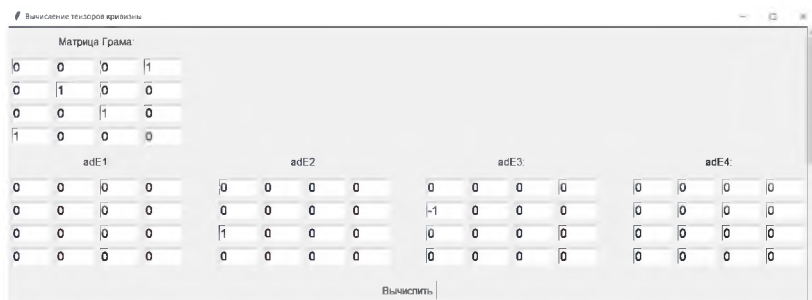


Рис. 1

После выполнения вычислений программа рассчитает тензор кривизны и будет выведена подробная информация о расчете каждого шага. Далее можно пролистать вниз и увидеть финальный результат вычислений (рис. 2).

Результаты тензорных вычислений

R(E_1,E_2)				R(E_1,E_3)				R(E_1,E_4)				R(E_2,E_3)			
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
R(E_2,E_4)				R(E_3,E_4)											
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0								
0.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0								
0.0	0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	0.0	0.0								
0.0	-0.25	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.25	0.0								
R(E_1,E_2,E_k,E_l)				R(E_1,E_3,E_k,E_l)				R(E_1,E_4,E_k,E_l)				R(E_2,E_3,E_k,E_l)			
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
R(E_2,E_4,E_k,E_l)				R(E_3,E_4,E_k,E_l)											
0.0	-0.25	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.25	0.0								
0.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0								
0.0	0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	0.0	0.0								
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0								

Рис. 2

Вычисления показали, что из трех найденных ранее самоподобных многообразий группы Ли $HS \times R^+$, два не являются плоскими. Тем самым доказано, что самоподобные лоренцевы многообразия групп Ли, снабженных левоинвариантными метриками, не обязательно являются плоскими.

Литература

1. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Четырёхмерные самоподобные однородные многообразия группы Ли $HS \times R^+$ // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова. 2022. № 1. С. 5–10.
2. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(2) \times R^+$ // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1 (65). С. 46–54.