

А.К. Старовойтов, М.Н. Подоксёнов¹

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь*

¹SPIN-код: 5120-2532

СВОЙСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $SL(2, R)$

В работе [1] была построено однородное многообразие четырехмерной группы Ли $A^+(1) \times A^+(1)$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой, обладающее максимальной группой изометрий. Мы поставили задачу: попытаться построить однородное многообразие трехмерной группы Ли $SL(2, R)$, для которого группа изометрий также будет иметь максимальную размерность.

Принцип построения изометрий группы Ли $SL(2, R)$ следующий: мы находим лоренцево скалярное произведение в алгебре Ли $SL(2, R)$, при котором группа автоизометрий этой алгебры Ли имеет максимальную размерность. Пусть $F: SL(2, R) \rightarrow SL(2, R)$ – одна из автоизометрий, а

$$\exp: SL(2, R) \rightarrow SL(2, R) \quad (1)$$

есть экспоненциальное отображение. Тогда преобразование F определяет изометрию f группы Ли $SL(2, R)$ по правилу:

$$f = \exp \circ F \circ \exp^{-1}.$$

Этот принцип работает не только в случае, когда экспоненциальное отображение является гомеоморфизмом. Например, в работе [2] он применялся для построения группы подобий неограниченного многообразия группы Ли $SE(2) \times R^+$.

В данной работе мы получим формулы экспоненциального отображения (1) и исследуем его свойства.

Алгебра Ли $SL(2, R)$ состоит из матриц, след которых равен 0. Запишем такую матрицу в виде

$$U = \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 u_1 \end{pmatrix},$$

и припишем ей координаты (u_1, u_2, u_3) . Будем искать матрицу $X = \exp U$ посредством перехода к комплексным рядам. Если обозначить $w = u_1^2 + u_2 u_3 = -\det U$, и ввести подстановку $w = z^2$ ($z \in \mathbb{C}$), то

$$U^2 = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix}, \quad U^{2n} = \begin{pmatrix} w^n & 0 \\ 0 & w^n \end{pmatrix}, \quad U^{2n+1} = \begin{pmatrix} u_1 w^n & u_2 w^n \\ u_3 w^n & -u_1 w^n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{2n!} + u_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{(2n+1)!} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!} + \frac{u_1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{ch} z + \frac{u_1}{z} \operatorname{sh} z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{22} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{2n!} - u_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{(2n+1)!} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!} - \frac{u_1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{ch} z - \frac{u_1}{z} \operatorname{sh} z; \end{aligned}$$

$$x_{12} = u_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{(2n+1)!} = \frac{u_2}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{u_2}{z} \operatorname{sh} z,$$

$$x_{13} = \frac{u_3}{z} \operatorname{sh} z.$$

Пусть теперь w действительное. Обозначим $r = |z| \in \mathbb{R}$. Тогда для неотрицательного w : $w = r^2 = z^2$, а для неположительного w : $w = -r^2 = (ir)^2$. Учитывая, что $\operatorname{ch} ir = \cos r$, $\operatorname{sh} ir = i \sin r$, получаем соответственно матрицы

$$X = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} r + \frac{u_1}{r} \operatorname{sh} r & \frac{u_2}{r} \operatorname{sh} r \\ \frac{u_3}{r} \operatorname{sh} r & \operatorname{ch} r - \frac{u_1}{r} \operatorname{sh} r \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \cos r + \frac{u_1}{r} \sin r & \frac{u_2}{r} \sin r \\ \frac{u_3}{r} \sin r & \cos r - \frac{u_1}{r} \sin r \end{pmatrix}.$$

При $r = 0$ доопределим $\frac{\text{sh } r}{r} = \frac{\sin r}{r} = 1$, и матрицы при этом совпадают.

Для того, чтобы выяснить, является ли экспоненциальное отображение биективным, мы решаем следующие системы с дополнительным условием $r \geq 0$:

$$\begin{cases} 0,5(x_{11} + x_{22}) = \text{ch } r, \\ x_{12} = u_2 \frac{\text{sh } r}{r}, \\ x_{21} = u_3 \frac{\text{sh } r}{r}, \\ 0,5(x_{11} - x_{22}) = u_1 \frac{\text{sh } r}{r} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 0,5(x_{11} + x_{22}) = \cos r, \\ x_{12} = u_2 \frac{\sin r}{r}, \\ x_{21} = u_3 \frac{\sin r}{r}, \\ 0,5(x_{11} - x_{22}) = u_1 \frac{\sin r}{r} \end{cases} \quad (3)$$

Необходимое и достаточное условие существования решения (u_1, u_2, u_3) системы (2): $x_{11} + x_{22} \geq 2$, и тогда оно единственное. Система (3) имеет решение только при условии $2 \leq x_{11} + x_{22} \leq 2$, и, при этом, оно не единственное. Тем самым, отображение (1) ни является сюръективным, ни инъективным.

Часть G_1 алгебры Ли $SL(2, \mathbf{R})$, удовлетворяющая неравенству $u_1^2 + u_2 u_3 < 0$, отображается взаимно-однозначно на открытое подмногообразие группы Ли $SL(2, \mathbf{R})$, которое определяется неравенством $x_{11} + x_{22} > 2$ (элементы, удовлетворяющие этому

условию называются гиперболическими). Очевидно, что G_1 представляет собой внутренность конической поверхности второго порядка, и эта поверхность называется конусом параболических векторов.

Литература

1. Подоксёнов М.Н., Горовая Я.В. Максимальная группа изометрий лоренцевой группы Ли $A^+(1) \times A^+(1)$ // Математические структуры и моделирование. 2022. № 2 (62). С. 154–162.
2. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(2) \times R^+$ // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1 (65) С. 46–54.