

А.Ю. Столяренко, А.П. Мехович¹

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь*

¹SPIN-код: 6330-9110

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ GAP ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСТРИБУТИВНОСТИ РЕШЁТОК ПОДГРУПП

GAP – это система вычислительной алгебры, специализирующаяся на дискретной алгебре с сильным акцентом на теорию групп. Система предлагает собственный язык программирования, включающий обширную библиотеку функций для реализации алгебраических алгоритмов, а также базу данных алгебраических объектов. GAP широко используется в исследованиях при изучении теории групп, теории представлений, колец, векторных пространств, алгебры, комбинаторных структур [1].

Реализация алгоритма определения дистрибутивности решёток подгрупп на языке GAP является актуальной задачей, поскольку представляет собой вычислительный подход к определению дистрибутивности решёток подгрупп с использованием системы компьютерной алгебры GAP.

Цель работы – описать алгоритм определения дистрибутивности решёток подгрупп на языке GAP.

Используется терминология и методы исследования конечных групп и их решёток, а также вычислительные методы системы компьютерной алгебры GAP.

Напомним, что *решёткой* называется частично упорядоченное множество L , в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, или «пересечение», обозначаемое $x \wedge y$, и точную верхнюю грань, или «объединение», обозначаемое $x \vee y$. Решётка называется *дистрибутивной*, если в ней выполняются тождества:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) [2, \text{с. 44}].$$

Работа алгоритма заключается в нахождении всех троек подгрупп в решётке и проверке для них дистрибутивных тождеств. Для получения точного результата проверяемая решётка подгрупп должна быть конечна.

Реализация алгоритма предоставляет собой комбинацию использования встроенных функций: `ConjugacyClassesSubgroups`, `Representative`, `Intersection`, `ClosureGroup`, `List` и вложенных циклов, с помощью которых производится определение дистрибутивности решётки подгрупп.

Корректность алгоритма определения дистрибутивности решёток подгрупп была проверена на некоторых решётках из [2; 3]. Известно, что решётки M_3 (диамант) и N_5 (пентагон) не являются дистрибутивными. Также решётка подгрупп S_3 не является дистрибутивной так как содержит подрешётку изоморфную пентагону. В свою очередь решётки C_6 , $C_2 \times C_2$ являются дистрибутивными. Описанный в работе алгоритм, подтвердил свойства вышеуказанных решёток подгрупп на предмет их дистрибутивности.

Результатом работы является алгоритм, определяющий дистрибутивность решёток подгрупп в системе компьютерной алгебры GAP.

Литература

1. GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming. URL: <http://www.gap-system.org> (дата обращения: 02.02.2025).
2. Грэтцер Г. Общая теория решёток. М.: Мир, 1982. 456 с.
3. Gratzner G. Lattice theory: First concepts and distributive lattices / George Gratzner – Dover ed. Courier Corporation, 2009. 212 p.