Теорема. Для того, чтобы для системы $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, набора $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и числа $n \in \mathbb{Z}^+$ задача Э-Л имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица $H_{n, \vec{m}}$ была матрицей полного ранга, т.е. чтобы $\text{rank } H_{n, \vec{m}} = 2m$.

Если $\text{rank } H_{n, \vec{m}} = 2m$, то при определённом выборе нормирующего множителя ($j \in \{1, 2, \dots, k\}$)

$$Q_{n, \vec{m}}(z) = D(n, \vec{m}; z),$$

$$P_{n, \vec{m}}^j(z) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \vec{m}) z^p,$$

$$Q_{n, \vec{m}}(z) f_j(z) - P_{n, \vec{m}}^j(z) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left(d_p^j(n, \vec{m}) z^p + d_{-p}^j(n, \vec{m}) z^{-p} \right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2021-2025 годы.

Литература

1. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. М.: Наука, 1988.

ПРОИЗВОДНЫЕ РЕЗУЛЬТАНТОВ И ОБЩИЕ КРАТНЫЕ КОРНИ ПАР ПОЛИНОМОВ

М.М. Чернявский

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова,
 Московский 33, 2100038 Витебск, Беларусь
 misha360ff@mail.ru

Известным математическим инструментом для определения наличия общих корней у пар полиномов являются результанты. При этом, в современной математической литературе имеется крайне мало информации о способах точного вычисления общего корня двух полиномов через их коэффициенты. Случай, когда общий корень имеет кратность больше, чем единица, вообще не упоминается. Таким образом, объектом исследования в настоящей работе являются пары двух алгебраических полиномов с комплексными коэффициентами, имеющие общий кратный корень.

Предварительные сведения. Пусть $f(z) := \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$ ($a_0 \neq 0$) и $g(z) := \sum_{j=0}^m b_j z^{m-j}$ ($b_0 \neq 0$) – два многочлена, имеющие корни $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ соответственно. Напомним, что *результантом* многочленов f и g , называется произведение [1, §54]

$$R(f, g) := a_0^m b_0^n \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j). \tag{1}$$

Если многочлены f и g имеют хотя бы один общий корень, то значение результанта, составленного из них, равно нулю.

Так как $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$, $g(z) = b_0 \prod_{j=1}^m (z - \beta_j)$, то их результант $R(f, g)$ можно представить в виде $R(f, g) = a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \dots g(\alpha_n) = (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \dots f(\beta_m)$.

Если $s = n$, т. е. $f(z) = a_0(z-w)^n$, то для $r < n$ выполняется равенство (3) и

$$\frac{\partial^n R}{\partial b_{j_n} \dots \partial b_{j_1}} = a_0^n n! w^{nm - (j_n + \dots + j_1)} \quad (j_k = 0, 1, \dots, m).$$

Ниже представлена связь между общим кратным корнем двух полиномов и отношением частных производных от результата, составленного из данных полиномов.

Теорема 2. Пусть $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$ ($a_0 \neq 0, a_n \neq 0$), и $g(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{m-j}$ ($b_0 \neq 0, b_m \neq 0$). Если многочлены f и g имеют ровно один общий корень w кратности s для f и кратности p для g , то тогда w удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \dots \partial b_{j_1}} : \frac{\partial^s R}{\partial b_{k_s} \dots \partial b_{k_1}} = w^{(k_s + \dots + k_1) - (j_s + \dots + j_1)} \quad (j_r, k_r = 0, 1, \dots, m).$$

и

$$\frac{\partial^p R}{\partial a_{i_p} \dots \partial a_{i_1}} : \frac{\partial^p R}{\partial a_{l_p} \dots \partial a_{l_1}} = w^{(l_p + \dots + l_1) - (i_p + \dots + i_1)} \quad (i_r, l_r = 0, 1, \dots, n).$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (рег. № 20231184).

Литература

1. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. СПб.: Лань, 2013.
2. Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Boston: Birkhauser, 1994.

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, В КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРОГО ВХОДЯТ МНОГОЧЛЕНЫ

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, a.p.shilin@gmail.com

Продолжено исследование уравнения

$$\sum_{k=0}^n \left[(a(t)p_k(t) + b(t)q_k(t)) \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{\pi i} (a(t)p_k(t) - b(t)q_k(t)) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right] = f(t), \quad t \in L. \quad (1)$$

Здесь L – простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. На кривой L непрерывные по Гельдеру функции $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0, p_k(t), q_k(t), f(t)$ заданы, а непрерывная по Гельдеру вместе со своими производными до порядка n функция $\varphi(t)$ является искомой. Все функции комплекснозначны, $n \in \mathbb{N}$, интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару. Общая схема исследования уравнения (1) указана в [1]. Эта схема содержит возможность подбирать функции $p_k(t), q_k(t)$, для которых исследование уравнения (1) носит законченный конструктивный характер. Укажем два новых таких случая.

1. $p_k(t) = (A_k - (\mu_1 + \mu_2)A_{k+1} + \mu_1\mu_2A_{k+2})t^2 + ((\mu_1 + \mu_2)A_{k+2} - 2A_{k+1})t + 2A_{k+2}$, $q_k(t) = (B_k - (\sigma_1 + \sigma_2)B_{k+1} + \sigma_1\sigma_2B_{k+2})t^2 + ((\sigma_1 + \sigma_2)B_{k+2} - 2B_{k+1})t + 2B_{k+2}$, $k = \overline{0, n}$, $n \geq 3$, где $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, A_k, B_k$ – заданные комплексные числа, подчиненные некоторым несложным ограничениям.

2. $p_k(t) = (A_k - \alpha A_{k+1})P(t) - A_{k+1}P'(t)$, $q_k(t) = (B_k - \beta B_{k+1})Q(t) - B_{k+1}Q'(t)$, $k = \overline{0, n}$, $n \geq 2$, где $P(t), Q(t)$ – произвольные заданные многочлены, а α, β, A_k, B_k – заданные комплексные числа, подчиненные незначительным ограничениям.

В этих случаях явно указаны условия разрешимости уравнения (1). При их выполнении дано точное аналитическое решение уравнения. Приведены примеры. Часть результатов подробно опубликована в [2].