аппроксимации и, соответственно, существует восемь разных обобщенных решений задачи Коши с заданными начальными условиями. Вид обобщенного решения зависит от расположения полюсов функции $w_\varepsilon(x)$ выше или ниже вещественной оси.

В зависимости от начальных условий возможны также вырожденные случаи, когда формальное решение на прямой имеет один или два полюса. Тогда задача Коши имеет меньшее количество обобщенных решений.

Литература

1. Грицук Е. В., Кузьмина Е. В. *Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве* // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. 2017. № 2. С. 64-–72.

2. Кузьмина Е. В. *Обобщенные решения уравнения Риккати* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58, № 2. С. 144–154.

3. Кузьмина Е. В. *Обобщенные решения второго уравнения иерархии Риккати* // Проблемы физики, математики и техники. 2022. № 2 (51). С. 68-–75.

ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ АДАМАРА И МЕТОДЕ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА – ЛАГРАНЖА – ЭЙТКЕНА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

А.В. Лебедев[1], Ю.В. Трубников[2], М.М. Чернявский[2]

[1]Белорусский государственный университет, пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
lebedev@bsu.by
[2]Витебский государственный университет, Московский просп. 33, 210038 Витебск, Беларусь,
yurii_trubnikov@mail.ru, misha360ff@mail.ru

В докладе развит метод Эйлера – Лагранжа вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами, на базе подсчёта пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли – Эйткена), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $\frac{P'(z)}{P(z)}$.

Пусть $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C};\ a_0, a_n \neq 0$ – произвольный полином степени n, для которого 0 не является корнем, т.е.

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_p)^{m_p},$$

где $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$ – сумма кратностей корней z_j и $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$ и $z_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, p$. Вместе с полиномом $P(z)$ рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{1}$$

Здесь правая часть – разложение функции $\frac{P'(z)}{P(z)}$ в ряд Тейлора в окрестности нуля.

По коэффициентам c_k ряда (1) строятся определители Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел $(k, r),\ k \geqslant 0, r > 0$ определителем Адамара $H_{k,r}$ называется определитель

$$H_{k,r} := \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+r-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k+r-1} & c_{k+r} & \cdots & c_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots \leqslant |z_r| < |z_{r+1}| \leqslant |z_{r+2}| \leqslant \ldots \leqslant |z_p|$ (*для* $r = p - 1$ *условие записывается как* $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots \leqslant |z_{p-1}| < |z_p|$). *Тогда*

$$\frac{H_{k,p}}{H_{k+1,p}} = z_1 \cdot \ldots \cdot z_p\,,$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}=z_1\cdot\ldots\cdot z_r\,.$$

При этом

$$\left|\frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}-z_1\cdot\ldots\cdot z_r\right|<Cq^k,$$

где

$$0<q=\frac{|z_r|}{|z_{r+1}|}<1.$$

Теорема 2. *Пусть* $0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\ldots\leqslant|z_r|=|z_{r+1}|\leqslant|z_{r+2}|\leqslant\ldots\leqslant|z_p|$. *Тогда не существует предела* $\lim_{k\to\infty}\frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}$.

Вышеприведённые результаты позволяют вычислять корни многочлена $P(z)$, начиная с наименьшего по модулю $0<|z_1|<|z_2|<\ldots$. Аналогичная процедура вычисления корней полинома, начиная с наибольшего по модулю осуществляется на базе разложения функции $\frac{P'(z)}{P(z)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности (т.е. для $|z|>\max_{1\leqslant j\leqslant p}|z_j|$)

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{j=1}^{p}\frac{m_j}{z-z_j}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{z^{k+1}},\tag{2}$$

с помощью соответствующих определителей Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел $(k,r),\ k\geqslant0,r>0$ определителем Адамара $\mathbf{H}_{k,r}$ (для ряда (2)) называется определитель

$$\mathbf{H}_{k,r}:=\begin{vmatrix} b_k & b_{k+1} & \dots & b_{k+r-1}\\ b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{k+r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{k+r-1} & b_{k+r} & \dots & b_{k+2(r-1)}\end{vmatrix}.$$

Теорема 3. *Пусть* $|z_p|\geqslant|z_{p-1}|\geqslant\ldots\geqslant|z_{p-r+1}|>|z_{p-r}|\geqslant|z_{p-r-1}|\geqslant\ldots\geqslant|z_1|>0$ (*для* $r=p-1$ *условие записывается как* $0<|z_1|<|z_2|\leqslant\ldots\leqslant|z_p|$). *Тогда*

$$\frac{\mathbf{H}_{k+1,p}}{\mathbf{H}_{k,p}}=z_1\cdot\ldots\cdot z_p\,,$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}}=z_{p-r+1}\cdot\ldots\cdot z_p\,.$$

При этом

$$\left|\frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}}-z_{p-r+1}\cdot\ldots\cdot z_p\right|<Cq^k,\tag{6}$$

где

$$0<q=\left|\frac{z_{p-r}}{z_{p-r+1}}\right|<1.$$

Теорема 4. *Пусть* $|z_p|\geqslant|z_{p-1}|\geqslant\ldots\geqslant|z_{p-r+1}|=|z_{p-r}|\geqslant|z_{p-r-1}|\geqslant\ldots\geqslant|z_1|>0$. *Тогда не существует предела* $\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}}$.

Доказательства этих результатов и просчёт на их базе конкретных примеров вычисления всех корней полиномов представлены в [1].

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор с БРФФИ № Ф23М- 003).

Литература

1. Лебедев А. В., Трубников Ю. В., Чернявский М. М. *Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов* // Математические заметки. 2024. Т. 116, вып 1. С. 91–108.