Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра прикладной математики и механики

Л.В. Маркова, А.Н. Красоткина

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2014

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
М26

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 25.06.2014 г.

Авторы: доцент кафедры прикладной математики и механики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Л.В. Маркова;** преподаватель кафедры прикладной математики и механики ВГУ имени П.М. Машерова **А.Н. Красоткина**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры информатики и информационных технологий
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
Т.Г. Алейникова

Маркова, Л.В.

М26 Методы вычислений : методические рекомендации / Л.В. Маркова, А.Н. Красоткина. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2014. – 50 с.

Излагаются общие теоретические сведения и методические рекомендации, которых следует придерживаться при изучении численных методов, выполнении практических заданий. Издание предназначается для студентов специальности 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)». Может быть использовано студентами естественнонаучных специальностей при изучении вычислительной математики.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное издание составлено в соответствии с программой дисциплины «Методы вычислений» для студентов специальности 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», но может быть использовано для подготовки студентов других специальностей, имеющих в своих учебных планах вычислительную математику.

Методические рекомендации представляют собой руководство к выполнению лабораторно-практических работ по дисциплине «Методы вычислений», содержат краткие теоретические сведения, все необходимые соотношения и формулы, примеры, а также задания для выполнения лабораторных работ в соответствии с учебной программой курса «Методы вычислений».

В данном учебном издании рассматриваются следующие задачи численного анализа:

1) интерполирование алгебраическими многочленами;
2) численное интегрирование;
3) методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
4) решение граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

П 1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Пусть на отрезке [*a*, *b*] имеем множество точек $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, в которых заданы значения функции $y_i = y(x_i), i = \overline{0,n}$. Назовем $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$ узлами интерполирования. Задача состоит в том, чтобы построить такой многочлен степени *n*

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{1}$$

значения которого в узлах x_i, $i = \overline{0,n}$ совпадают со значениями исходной функции $y(x_i)$, т.е

$$a_0 + a_1 x_i + ... + a_n x_i^n = y(x_i) \; i = \overline{0,n} \tag{2}$$

Для отыскания коэффициентов разложения (1) используется условие интерполирования

$$\forall x_i \in [a,b] \quad f(x_i) = y_i \quad i = 0,1,...,n \tag{3}$$

Многочлен (1) для которого выполняются условия интерполяции (3) называется интерполяционным многочленом для функции $y(x_i)$, построенным по узлам $x_i, i = \overline{0,n}$. Данная задача имеет единственное решение, но интерполяционный многочлен может принимать различный вид.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционным многочленом Лагранжа *n*-ой степени называется многочлен следующего вида

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)} y(x_k) \tag{4}$$

Формула Лагранжа применяется как для равноотстоящих узлов, так и для неравномерной сетки.

Для любой точки отрезка интерполирования погрешность интерполяции с использованием формулы Лагранжа выражается следующей формулой

$$r_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) \qquad \xi, x \in [a,b] \tag{5}$$

Пример. Получить таблицу значений аналитически заданной функции *sinx* на отрезке [0;1] с шагом *h=0.2*. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа 2-ой степени для вычисления значений функции в точках *x*=0.3 и *x=0.9*. Отобразить результат на графике и вычислить погрешности интерполяции.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x_i)$	0	0.1987	0.3894	0.5646	0.7174	0.8415

Строим полином Лагранжа 2-ой степени.

$$L1_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot y(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot y(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot y(x_2)$$

Для вычисления значения функции в точке *x*=0.3 выберем следующие узлы сетки: $x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4$.

Подставляем данные из таблицы

$$L1_2(x)=\frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.4)}\cdot 0+\frac{(x-0)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.4)}\cdot 0.1987+\frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.4-0)(0.4-0.2)}\cdot 0.3894$$

Используем построенный полином Лагранжа, чтобы вычислить значение в заданной точке x=0.3

$$L1_2(0.3)=\frac{(0.3-0.2)(0.3-0.4)}{(0-0.2)(0-0.4)}\cdot 0+\frac{(0.3-0)(0.3-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.4)}\cdot 0.1987+\frac{(0.3-0)(0.3-0.2)}{(0.4-0)(0.4-0.2)}\cdot 0.3894=0.29505$$

Для вычисления значения функции в точке x=0.9 выберем следующие узлы сетки: $x_3=0.6,\ x_4=0.8,\ x_5=1$

$$L2_2(x)=\frac{(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_4)(x_3-x_5)}\cdot y(x_3)+\frac{(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_3)(x_4-x_5)}\cdot y(x_4)+\frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_3)(x_5-x_4)}\cdot y(x_5)$$

$$L2_2(x)=\frac{(x-0.8)(x-1)}{(0.6-0.8)(0.6-1)}\cdot 0.5646+\frac{(x-0.6)(x-1)}{(0.8-0.6)(0.8-1)}\cdot 0.7174+\frac{(x-0.6)(x-0.8)}{(1-0.6)(1-0.8)}\cdot 0.8415$$

Вычислим значение в заданной точке x=0.9 на основе построенного полинома Лагранжа

$$L2_2(0.9)=\frac{(0.9-0.8)(0.9-1)}{(0.6-0.8)(0.6-1)}\cdot 0.5646+\frac{(0.9-0.6)(0.9-1)}{(0.8-0.6)(0.8-1)}\cdot 0.7174+\frac{(0.9-0.6)(0.9-0.8)}{(1-0.6)(1-0.8)}\cdot 0.8415=0.78304$$

Оценим погрешность вычислений по формуле

$$r_n(x)=\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\qquad \xi,x\in[a,b]$$

Возьмем $\xi=0.2$ и $\xi=0.8$, производная третьего порядка от функции *sin(x)* будет *cos(x)*

$$r_2(0.3)\le\frac{\cos(0.2)}{(2+1)!}\left|(0.3-0)(0.3-0.2)(0.3-0.4)\right|\le 5\cdot 10^{-4}=0.0005$$

$$r_2(0.9)\le\frac{\cos(0.8)}{(2+1)!}\left|(0.9-0.6)(0.9-0.8)(0.9-1)\right|\le 3\cdot 10^{-4}=0.0003$$

Найдем погрешность вычислений, зная вид исходной функции.

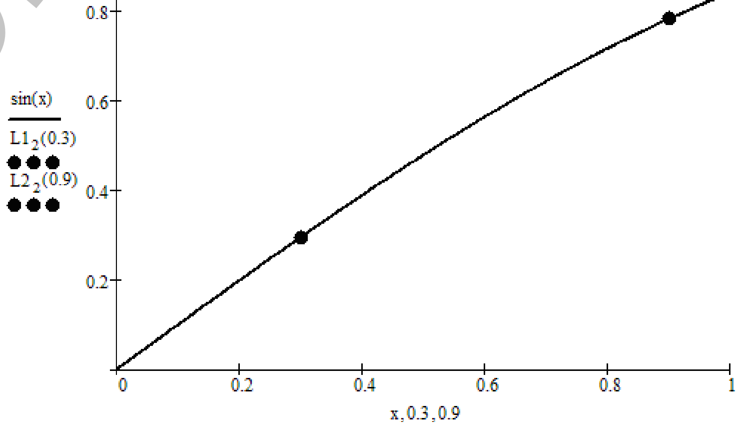
При x=0.3 имеем sin(0.3)=0.295520

$$\Delta(x)=\left|0.29552-0.29505\right|=0.00047,\quad \delta_x=\frac{\Delta(x)}{0.295520}100\%=0.159\%$$

При x=0.9 имеем sin(0.9)=0.78333

$$\Delta(x)=\left|0.78333-0.78304\right|=0.00029,\quad \delta_x=\frac{\Delta(x)}{0.78333}100\%=0.037\%$$

Отобразим полученные результаты на графике:



Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционным многочленом Ньютона *n*-ой степени называется многочлен следующего вида

$$N_n(x) = y(x_0) + (x - x_0)y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)y(x_0, x_1, x_2) + ...$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})y(x_0, x_1, ..., x_n) \quad (6)$$

Или

$$N_n(x) = y(x_0) + \sum_{k=1}^{n}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})y(x_0, x_1, ..., x_n)$$

Формулу Ньютона удобно применять для интерполирования одной функции с меняющейся системой узлов, т.к. при добавлении нового узла x_{n+1} нужно вычислить только одно слагаемое $(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)y(x_0, x_1, ..., x_{n+1})$ и добавить его к предыдущей сумме. Причем узел x_{n+1} может быть добавлен в любое место сетки. Погрешность интерполяции многочленом Ньютона вычисляется по формуле

$$r_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x) \quad (7)$$

Причем точки $\xi, x \in [a, b]$ могут совпадать. Погрешность интерполяционной формулы Ньютона можно также представить через разделенные разности

$$r_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)y(x, x_0, x_1, ..., x_n) \quad (8)$$

$$r_n(x) = y(x, x_0, x_1, ..., x_n)\omega(x) \quad (9)$$

Пример. Получить таблицу значений аналитически заданной функции *sinx* на отрезке [0;1] с шагом *h=0.2*. Построить интерполяционный многочлен Ньютона 2-ой степени и вычислить значение функции в точке *x*=0.3 и *x*=0.9 . Отобразить результат на графике и вычислить погрешности интерполяции.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x_i)$	0	0.1987	0.3894	0.5646	0.7174	0.8415

Для вычисления значения функции в точке *x*=0.3 выберем следующие узлы сетки: $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4$, для точки *x*=0.9 выберем $x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$ соответственно.

Строим таблицу разделенных разностей.

i	x_i	$y(x_i)$	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	0	0		
			0.9935	
1	0.2	0.1987		-0.1
			0.9535	
2	0.4	0.3894		-0.1938
			0.876	
3	0.6	0.5646		-0.28
			0.764	
4	0.8	0.7174		-0.3137
			0.6205	
5	1	0.8415		

$$y(x_0,x_1)=\frac{y(x_1)-y(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{0.1987-0}{0.2-0}=0.9935$$
$$y(x_1,x_2)=\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{0.3894-0.1987}{0.4-0.2}=0.9535$$
...
$$y(x_4,x_5)=\frac{y(x_5)-y(x_4)}{x_5-x_4}=\frac{0.8415-0.7174}{1-0.8}=0.6205$$
$$y(x_0,x_1,x_2)=\frac{y(x_1,x_2)-y(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=\frac{0.9535-0.9935}{0.4-0}=-0.1$$
...
$$y(x_3,x_4,x_5)=\frac{y(x_4,x_5)-y(x_3,x_4)}{x_5-x_3}=\frac{0.6205-0.764}{1-0.6}=-0.3137$$

По значениям этой таблицы запишем интерполяционный полином Ньютона 2-ой степени, найдем его значение в требуемых точках

$$N1_2(x)=y(x_0)+(x-x_0)y(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)y(x_0,x_1,x_2)$$
$$N1_2(0.3)=0+(0.3-0)\cdot 0.9935+(0.3-0)(0.3-0.2)\cdot(-0.1)=0.29505$$
$$N2_2(x)=y(x_3)+(x-x_3)y(x_3,x_4)+(x-x_3)(x-x_4)y(x_3,x_4,x_5)$$
$$N2_2(0.9)=0.5646+(0.9-0.6)\cdot 0.764+(0.9-0.6)(0.9-0.8)\cdot(-0.3137)=0.78304$$

Оценим погрешность вычислений, используя формулу остаточного члена интерполяционного полинома Ньютона (8) $r_n(x)=\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$. Ее значение совпадает с оценкой, полученной для формулы Лагранжа, т.е. $r_2(0.3)\le\frac{\cos(0.2)}{(2+1)!}\left|(0.3-0)(0.3-0.2)(0.3-0.4)\right|\le 5\cdot 10^{-4}=0.0005$.

$$r_2(0.9)\le\frac{\cos(0.8)}{(2+1)!}\left|(0.9-0.6)(0.9-0.8)(0.9-1)\right|\le 3\cdot 10^{-4}=0.0003$$

Произведем оценку вычислений полинома Ньютона в точке x=0.3, x=0.9 по формуле (8). Для этого добавим разделённую разность 3-го порядка в построенную ранее таблицу.

i	x_i	$y(x_i)$	$y(x_i,x_{i+1})$	$y(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	$y(x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i)$
0	0	0			
			0.9935		
1	0.2	0.1987		-0.1	
			0.9535		-0.156
2	0.4	0.3894		-0.1938	
			0.876		
3	0.6	0.5646			

Подставим данные из таблицы в формулу (9):

$$r_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)y(x_0,x_1,x_2,x_3)=$$
$$=(0.3-0)(0.3-0.2)(0.3-0.4)(-0.156)=4.68\cdot 10^{-4}=0.000468$$

Найдем погрешность вычислений, зная вид исходной функции

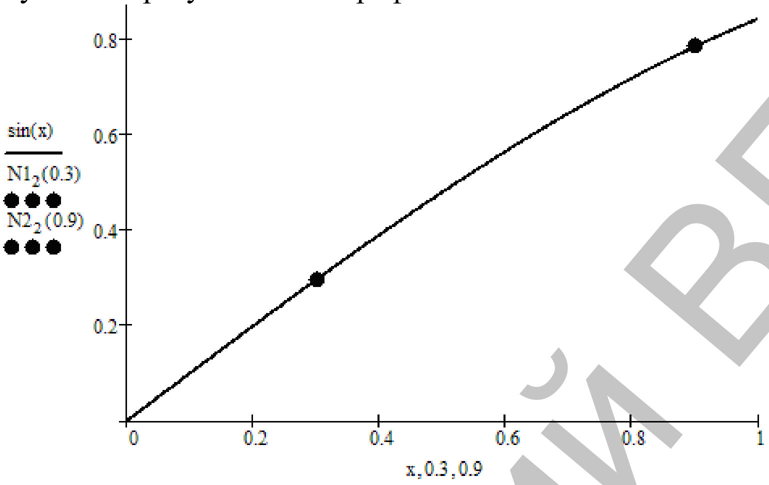
При x=0.3 имеем sin(0.3)=0.295520

$\Delta(x) = |0.29552 - 0.29505| = 0.00047$, $\delta_x = \dfrac{\Delta(x)}{0.29552} 100\% = 0.159\%$

При x=0.9 имеем $sin(0.9)$=0.78333

$\Delta(x) = |0.78333 - 0.78304| = 0.00029$, $\delta_x = \dfrac{\Delta(x)}{0.78333} 100\% = 0.037\%$

Отобразим полученные результаты на графике:



Лабораторная работа № 1

Задание:

Получить таблицу значений аналитически заданной функции на указанном отрезке с заданным шагом h. Построить интерполяционные многочлены и найти значение функции в 3-х точках x в соответствии с вариантом.

а) используя многочлен Лагранжа степени не выше 4, т.е. $n \le 4$.

б) используя формулы Ньютона степени $n1 \le 4$.

Отобразить результат на графике и вычислить погрешности интерполяции для каждого случая:

Вариант	Функция $f(x)$	Отрезок $[x_0; x_n]$	Шаг h	Степень полинома	Точки восполнения
1	$\ln(x) + (x+1)^3$	1;2	0.2	$n = 2, n1 = 3$	1.27 1.55 1.94
2	$x \cdot 2^x - 1$	1;2	0.2	$n = 3, n1 = 2$	1.17 1.34 1.74
3	$x - \cos(x)$	0;π	π/5	$n = 4, n1 = 3$	0.71 1.54 3.01
4	$x + \ln(x) - 0.5$	1;10	2.0	$n = 2, n1 = 3$	2.24 4.63 7.94
5	$x^2 + 4\sin(x)$	0; π	π/5	$n = 4, n1 = 2$	0.71 1.54 3.01
6	$3x - e^x$	1;2	0.2	$n = 3, n1 = 4$	1.27 1.55 1.94
7	$5x - 8\ln(x) - 8$	1;10	2.0	$n = 2, n1 = 3$	1.24 5.23 8.94
8	$\sin(0.5x) - x^2 + 1$	0; π	π/5	$n = 2, n1 = 3$	0.81 1.44 2.81
9	$x + \cos(x) - 1$	0;π	π/5	$n = 3, n1 = 2$	0.71 1.54 3.01
10	$\dfrac{-1}{x}$	1;10	2.0	$n = 4, n1 = 3$	2.24 4.63 7.94
11	$x - \sqrt{\ln(x+2)}$	0;1	0.2	$n = 2, n1 = 3$	0.27 0.62 0.89

12	$(x-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot e^x$	0;5	1.0	$n = 2, n1 = 3$	1.24 2.63 3.94
13	$x^3 - \sin(x)$	0; 2π	0.4 π	$n = 3, n1 = 3$	0.41 3.54 5.74
14	$2.2x–2^x$	0;5	0.5	$n = 2, n1 = 3$	2.24 4.63 4.94
15	$(2-x) \cdot e^x - 0.5$	0;2	0.2	$n = 3, n1 = 2$	0.27 1.62 1.89

П 2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y(x)$. Построим на этом отрезке сетку $\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. В узлах сетки известны значения функции $y(x)$, для которых введем обозначения: $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1), ..., y_n = y(x_n)$.

Кубическим сплайном, соответствующим заданной функции $y(x)$ и узлам $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$ называется функция $S_3(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,...,n$ функция $S_3(x)$ является многочленом 3-ей степени, т.е. $S_3(x) = P_{3,i}(x) = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + a_{3i}x^3$, $x \in [x_{i-1}; x_i]$ $i=1,...,n$
2. функция $S_3(x)$ гладкая на всем отрезке $[a;b]$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на этом отрезке. $S_{3i}^{(k)}(x_i) = S_{3i+1}^{(k)}(x_i)$ $k=0,1,2$ $i=1,...,n-1$
3. для $S_3(x)$ выполняется условие интерполяции: $S_3(x_i) = y(x_i)$ $i=0,1,...,n$.

На основании первого условия на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,...,n$ будем искать звено сплайна, т.е. функцию $S_{3i}(x)$ как полином третьей степени в виде

$$P_{3i}(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + d_i \frac{(x - x_i)^3}{6} \qquad (1)$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i находятся следующим образом:

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0,1,2,...,n-1 \qquad a_i = y(x_i) \quad i = 0,1,2,...,n$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} \qquad b_i = c_i \frac{h_i}{2} - d_i \frac{h_i^2}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad i = 1,2,...,n \qquad (2)$$

Для нахождения коэффициентов c_i решаем следующую систему уравнений:

$$c_{i-1}h_i + 2(h_i + h_{i+1})c_i + c_{i+1}h_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), \quad i=1,2,...n-1 \qquad (3)$$

Добавим $c_0 = 0, c_n = 0$

Матрица этой системы трехдиагональная. Для ее решения целесообразно использовать метод прогонки.

Пример. Для функции $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ на отрезке [1;2] с шагом $h = 0.2$ построить таблицу значений, на основе которой создать интерполяционный сплайн третьего порядка и вычислить значения в трёх точках, расположенных ближе к началу, середине и концу отрезка. Результаты сравнить с точным значением функции в указанных точках. Построить графики исходной функции, созданного сплайна и отметить в этой же плоскости вычисленные значения.

Построим таблицу значений аргумента и функции на отрезке [1;2]:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_i	-1	-0.651	-0.378	-0.155	0.032	0.193

Вычислим значения коэффициентов по формулам (2), (3) и заполним таблицу.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	-1	0	0	0
1	-0.651	1.572	-2.587	-12.935
2	-0.378	1.212	-1.02	7.833
3	-0.155	1.021	-0.888	0.661
4	0.032	0.856	-0.765	0.619
5	0.193	0.779	0	3.823

Построим на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,...,n$ многочлен третьей степени по формуле (1)

$$x \in [1;1.2] \quad P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1\frac{(x-x_1)^2}{2} + d_1\frac{(x-x_1)^3}{6}$$

$$x \in [1.2;1.4] \quad P_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2\frac{(x-x_2)^2}{2} + d_2\frac{(x-x_2)^3}{6}$$

$$x \in [1.4;1.6] \quad P_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3\frac{(x-x_3)^2}{2} + d_3\frac{(x-x_3)^3}{6}$$

$$x \in [1.6;1.8] \quad P_4(x) = a_4 + b_4(x - x_4) + c_4\frac{(x-x_4)^2}{2} + d_4\frac{(x-x_4)^3}{6}$$

$$x \in [1.8;2] \quad P_5(x) = a_5 + b_5(x - x_5) + c_5\frac{(x-x_5)^2}{2} + d_5\frac{(x-x_5)^3}{6}$$

В итоге имеем кубический сплайн вида:

$$S(x) = \begin{bmatrix} -0.651 + 1.572(x-1.2) - 1.294(x-1.2)^2 - 2.156(x-1.2)^3 & \text{если} & x \in [1;1.2] \\ -0.378 + 1.212(x-1.4) - 0.51(x-1.4)^2 + 1.305(x-1.4)^3 & \text{если} & x \in [1.2;1.4] \\ -0.155 + 1.021(x-1.6) - 0.444(x-1.6)^2 + 0.11(x-1.6)^3 & \text{если} & x \in [1.4;1.6] \\ 0.032 + 0.856(x-1.8) - 0.382(x-1.8)^2 + 0.103(x-1.8)^3 & \text{если} & x \in [1.6;1.8] \\ 0.193 + 0.779(x-2) - 0(x-2)^2 + 0.637(x-2)^3 & \text{если} & x \in [1.8;2] \end{bmatrix}$$

Используем построенный сплайн, чтобы вычислить значение в точках, расположенных ближе к началу, середине и концу отрезка. Выбираем точки *x=1.1* *x=1.5* *x=1.9*

$$S(1.1) = -0.651 + 1.572(1.1-1.2) - 1.294(1.1-1.2)^2 - 2.156(1.1-1.2)^3 = -0.819$$

$$S(1.5) = -0.155 + 1.021(1.5-1.6) - 0.444(1.5-1.6)^2 + 0.11(1.5-1.6)^3$$

$$S(1.9) = 0.193 + 0.779(1.9-2) - 0(1.9-2)^2 + 0.637(1.9-2)^3$$

Сравним полученные результаты с точными значениями функции в данных точках.

При x=1.1 имеем $\ln(1.1)-\dfrac{1}{1.1}=-0.814$, погрешность :

$$\Delta(x)=|-0.814-(-0.819)|=5.258\times10^{-3} \qquad \delta_x=\frac{\Delta(x)}{|-0.814|}\cdot100\%=0.642\%$$

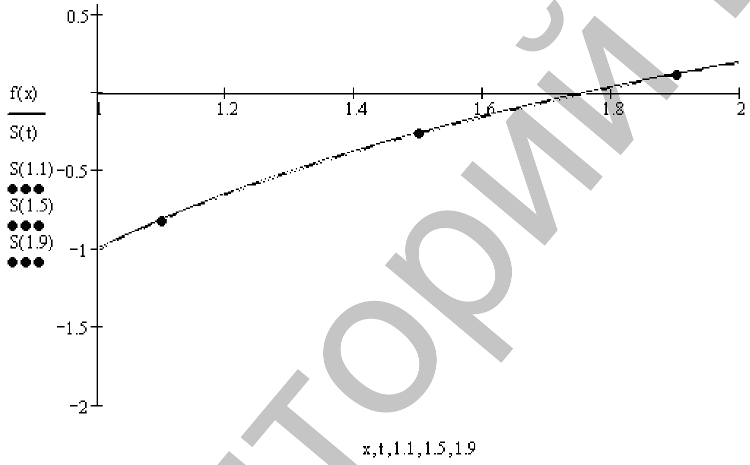
При x=1.5 имеем $\ln(1.5)-\dfrac{1}{1.5}=-0.261$, погрешность :

$$\Delta(x)=|-0.261-(-0.262)|=4.314\times10^{-4} \qquad \delta_x=\frac{\Delta(x)}{|-0.261|}\cdot100\%=0.165\%$$

При x=1.9 имеем $\ln(1.9)-\dfrac{1}{1.9}=0.116$, погрешность :

$$\Delta(x)=|0.116-0.115|=9.375\times10^{-4} \qquad \delta_x=\frac{\Delta(x)}{|0.116|}\cdot100\%=0.818\%$$

Построим график исходной функции, созданного сплайна и отметим в этой же плоскости вычисленные значения:



Лабораторная работа № 2

Задание:

Для аналитически заданной функции построить таблицу значений, на основе которой создать интерполяционный сплайн третьего порядка и вычислить значения в трёх точках, расположенных ближе к началу, середине и концу отрезка. Результаты сравнить с точным значением функции в указанных точках. Построить графики исходной функции, созданного сплайна и отметить в этой же плоскости вычисленные значения.

Вариант	Функция $f(x)$	$[x_0;\ x_n]$	Шаг h
1	$\ln(x)+(x+1)^3$	1;2	0.2
2	$x\cdot2^x-1$	1;2	0.2
3	$x-\cos(x)$	0;π	π/5
4	$x+\ln(x)-0.5$	1;10	2.0
5	$x^2+4\sin(x)$	0; π	π/5
6	$3x-e^x$	1;2	0.2
7	$5x-8\ln(x)-8$	1;10	2.0
8	$\sin(0.5x)-x^2+1$	0; π	π/5
9	$x+\cos(x)-1$	0;π	π/5

10	$\frac{-1}{x}$	1;10	2.0
11	$x-\sqrt{\ln(x+2)}$	0;1	0.2
12	$(x-1)^2-\frac{1}{2}\cdot e^x$	0;5	1.0
13	$x^3-\sin(x)$	0; 2π	0.4 π
14	2.2 x–2^x	0;5	1.0
15	$(2-x)\cdot e^x-0.5$	0;2	0.4

П 3. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть на отрезке $[a;b]$ задано множество точек $\omega_h=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ и известны значения сеточной функции $\tilde{y}_i=\tilde{y}(x_i),\ \ i=\overline{0,n}$, которые получены с погрешностью ε_i относительно некоторой функции *y(x)*, т.е. $\tilde{y}_i=y(x_i)\pm\varepsilon_i, i=\overline{0,n}$. Узлы сетки также могут быть заданы с некоторой погрешностью. Задача состоит в том, чтобы найти такую зависимость *f(x)*, которая наилучшим образом приближает функцию $y(x_i), i=\overline{0,n}$ по таблично заданной функции $\tilde{y}_i=y(x_i)\pm\varepsilon_i, i=\overline{0,n}$.

Практически вид приближающей функции *f(x)* устанавливают следующим образом: по таблице строится точечный график функции $\tilde{y}_i=\tilde{y}(x_i),\ \ i=\overline{0,n}$, а затем проводится плавная кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек.

В качестве приближающих функций в зависимости от характера точечного графика функции *y(x)* часто используют следующие функции:

1. $f(x)=ax+b$; (линейная)
2. $f(x)=ax^2+bx+c$; (квадратичная)
3. $f(x)=ax^m$; (степенная)
4. $f(x)=ae^{mx}$; (экспоненциальная)
5. $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$; (дробно-линейная)
6. $f(x)=a*\ln x+b$; (логарифмическая)
7. $f(x)=a\dfrac{1}{x}+b$; (гиперболическая)
8. $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$.(дробно-рациональная)

Здесь a,b,c,m – параметры, подлежащие определению. Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию этих параметров.

Будем предполагать, что выбор функциональной зависимости уже сделан, т.е эмпирическую формулу можно записать в виде

$$f=f(x,c_0,c_1,...,c_m) \qquad (1)$$

Необходимо найти оптимальное значение параметров $c_0,c_1,...,c_m$, которые будут минимизировать норму отклонения.

$$r(x_i)=r_i=f(x_i,c_0,...,c_m)-y(x_i), i=0,1,...,n \qquad (2)$$

Для метода наименьших квадратов в качестве нормы берут сумму квадратов отклонений по всем узлам.

$$\|r\| = \sum_{i=0}^{n} (r_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i, c_0, ..., c_m) - y(x_i) \right)^2 \qquad (3)$$

Полагая, что норма отклонения является некоторой функцией параметров $c_0, c_1, ..., c_m$, т.е.

$$\|r\| = S(c_0, c_1, ..., c_m), \qquad (4)$$

будем искать значения этих параметры $c_0, c_1, ..., c_m$ из условия минимизации функции $S(c_0, c_1, ..., c_m)$. Это условие запишем следующим образом

$$\frac{\partial S}{\partial c_0} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial c_1} = 0, \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial c_m} = 0 \qquad (5)$$

Выписывая частные производные (5) в явном виде на основе нормы (3), получим соотношения, которые представляют собой $m+1$ уравнение относительно неизвестных $c_0, c_1, ..., c_m$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial c_0} = 2\sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i, c_0, c_1, ..., c_m) - y_i \right] f'_{c_0}(x_i, c_0, .., c_m) = 0 \\
&\frac{\partial S}{\partial c_1} = 2\sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i, c_0, c_1, ..., c_m) - y_i \right] f'_{c_1}(x_i, c_0, .., c_m) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6) \\
&\frac{\partial S}{\partial c_m} = 2\sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i, c_0, c_1, ..., c_m) - y_i \right] f'_{c_m}(x_i, c_0, .., c_m) = 0
\end{aligned}$$

Решая систему (6), найдем значения параметров $c_0, c_1, ..., c_m$, которые в конечном итоге определяют вид функции $f = f(x, c_0, c_1, ..., c_m)$.

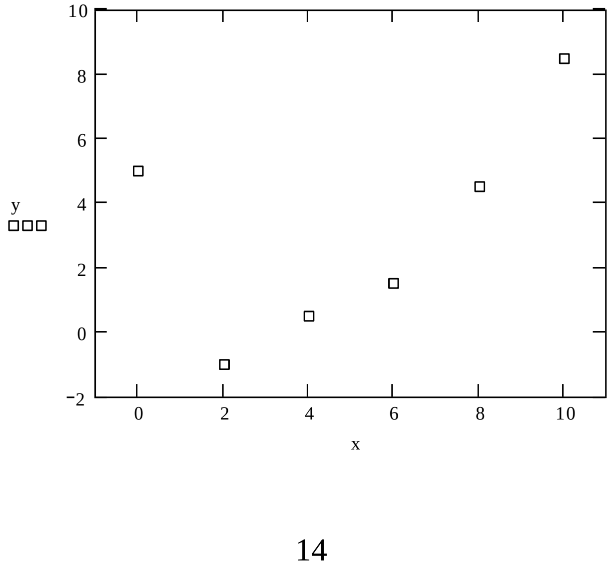
Пример. По заданной таблице значений функции построить точечный график и методом наименьших квадратов найти несколько приближающих аналитических функций. Сравнить качество полученных приближений. Совместить в одной плоскости графики исходной и найденных функций.

Имеем таблицу

x	0	2	4	6	8	10
y	5	-1	0.5	1.5	4.5	8.5

$n=6$

Строим точечный график



Полагаем, что *x* и *y* связаны линейной зависимостью $f(x) = ax + b$.

Находим частные производные: $\frac{\partial f}{\partial a} = x$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 1$ и составляем систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\cdot x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\cdot 1 = 0 \end{cases}$$ Преобразуем систему к виду: $$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

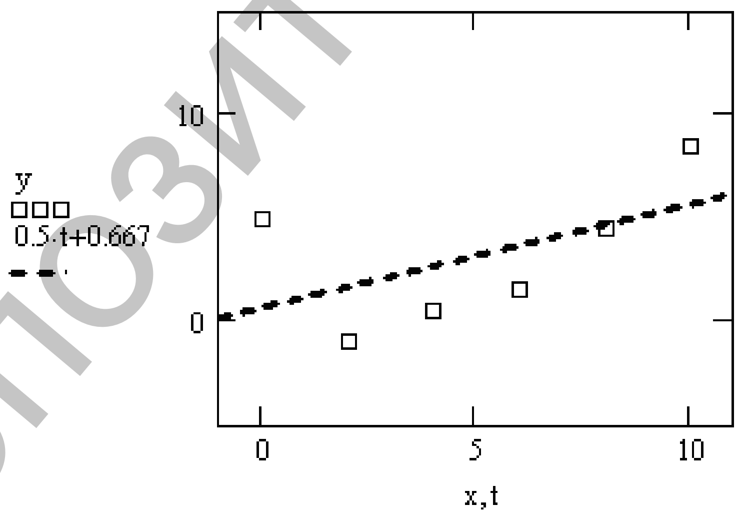
Для поиска параметров *a* и *b* строим таблицу следующего вида:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\, y_i$
1	0	5	0	0
2	2	-1	4	-2
3	4	0.5	16	2
4	6	1.5	36	9
5	8	4.5	64	36
6	10	8.5	100	85
$\sum$	30	19	220	130

По данным таблицы сформируем систему уравнений:

$$\begin{cases} 220\cdot a + 30\cdot b = 130 \\ 30\cdot a + 6\cdot b = 19 \end{cases}$$

Решив систему, получим $a = 0.5$ $b = 0.667$, тогда $f(x) = 0.5\cdot x + 0.667$. Строим график приближения



Пусть приближающая функция имеет вид квадратной регрессии (параболическая функция): $f(x) = ax^2 + bx + c$

Находим частные производные: $\frac{\partial f}{\partial a} = x^2$, $\frac{\partial f}{\partial b} = x$, $\frac{\partial f}{\partial c} = 1$ и составляем систему

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\cdot x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}y_i x_i^2 \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}y_i x_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i + nc = \sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

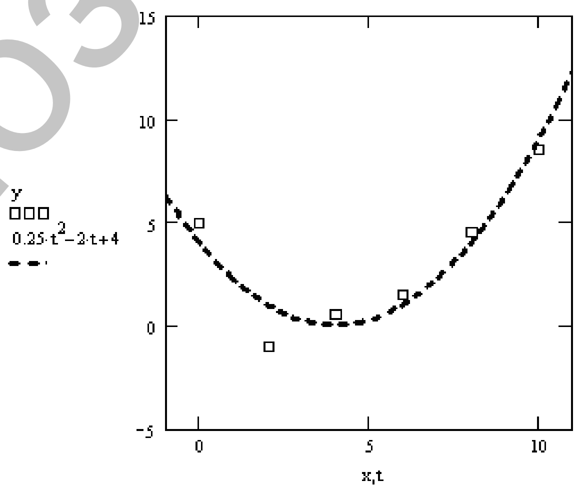
Для поиска параметров *a*, *b* и *c* строим таблицу следующего вида:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\,y_i$	$x_i^2\,y_i$
1	0	5	0	0	0	0	0
2	2	-1	4	8	16	-2	-4
3	4	0.5	16	64	256	2	8
4	6	1.5	36	216	1296	9	54
5	8	4.5	64	512	4096	36	288
6	10	8.5	100	1000	10000	85	850
$\sum$	30	19	220	1800	15664	130	1196

По данным таблицы сформируем систему уравнений

$$\begin{cases} 15664a + 1800b + 220c = 1196 \\ 1800a + 220b + 30c = 130 \\ 220a + 30b + 6c = 19 \end{cases}$$

Решив систему, получим *a*=0.25; *b*=-2; *c*=4 и приближение $f(x) = 0.25x^2 - 2x + 4$. Отображаем графически



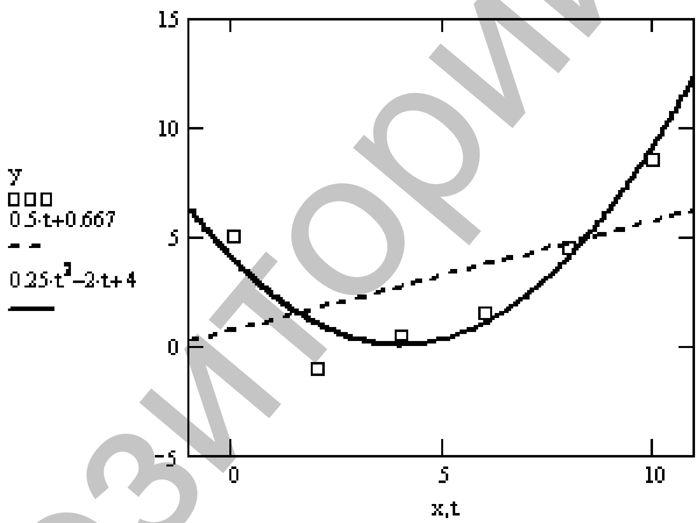
Построив две функции приближения к исходной, находим для каждой сумму квадратов отклонений по формуле:

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2$$

Имеем таблицу:

i	x_i	y_i	$f1(x) = 0.5 \cdot x + 0.667$	$f2(x) = 0.25x^2 - 2x + 4$	$\varepsilon 1^2$	$\varepsilon 2^2$
1	0	5	0.667	4	18.775	1
2	2	-1	1.827	1	7.992	4
3	4	0.5	2.987	0	6.185	0.25
4	6	1.5	4.147	1	7.007	0.25
5	8	4.5	5.307	4	0.651	0.25
6	10	8.5	6.467	9	4.133	0.25
Q					44.743	6

Из двух приближений выбираем то, для которого сумма квадратов отклонений минимальна. В нашем случае наилучшим приближением будет функция $f2(x) = 0.25x^2 - 2x + 4$.



Лабораторная работа № 3

Задание:

По заданной таблице значений функции построить точечный график и методом наименьших квадратов найти несколько приближающих аналитических функций. Сравнить качество полученных приближений. Совместить в одной плоскости графики исходной и найденной функций.

1.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y	2,6	- 0,3	- 2	- 2,3	- 1,5	0,7	3,2

2.

x	0	2	4	6	8	10
y	5	- 1	0,5	1,5	4,5	8,5

3.

x	1	2	3	4	5	6
y	1,14	2,78	4,07	4,91	5,41	5,52

4.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y	0,71	- 0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

5.

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	6	3	1	0,3	- 0,1	- 0,2	0	0,2	1

6.

x	- 3	-2	-1	0	1	2
y	- 1,4	- 4,3	- 5,20	- 4,1	- 1,1	4,2

7.

x	7	8	9	10	11	12	13
y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,1	5,9

8.

x	2	4	6	8	10
y	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

9.

x	0,30	0,91	1,50	2,00	2,20	2,62	3,00	3,30
y	0,20	0,43	0,35	0,52	0,81	0,68	1,15	0,85

10.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

11.

x	0	7	12	17	22	27	32	37
y	100	87,3	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3

12.

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	1,67	1,32	1,10	0,81	0,48	0,18	- 0,10	- 0,46

13.

x	0	4	10	15	21	29	36	51
y	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6

14.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	1,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

15

x	1	4	9	16	25
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

П 4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Задача численного интегрирования состоит в том, чтобы найти приближенное значение определенного интеграла от заданной и непрерывной на отрезке [*a*,*b*] функции *f(x)*, т.е. решить численными методами задачу (1).

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл вида (1) удается вычислить непосредственно по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

Где *F(x)* –первообразная функции *f(x)*, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Формулы прямоугольников

Пусть нужно найти значение определенного интеграла для непрерывной на отрезке интегрировании достаточно гладкой функции *f(x)*

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

Введем на отрезке [a,b] равномерную сетку с шагом *h*, т.е. множество точек $\omega_h = \{x_i = a + ih, i = 0,1,...,n \quad h > 0, h = \frac{b-a}{n}\}$ и представим интеграл (3) в виде суммы интегралов по частичным отрезкам

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \qquad (4)$$

Для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке [a,b] достаточно построить квадратурную формулу для интеграла на частичном отрезке. Исходя из геометрического смысла интеграла, запишем

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(\xi_i)h_i + r_i \qquad (5)$$

Где r_i - погрешность численного интегрирования, величина которой зависит от шага сетки. При достаточно большом количестве разбиений r_i можно отбросить, тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(\xi_i)h_i \qquad (6)$$

Формула (6) называется формулой прямоугольников на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. В качестве точки ξ_i могут выбираться левые $\xi_i = x_{i-1}$ или правые $\xi_i = x_i$ границы элементарных отрезков. В этом случае получаем формулы левых и правых прямоугольников.

Составные формулы, т.е. для всего отрезка, левых и правых прямоугольников имеют вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \qquad (7)$$

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (8)$$

Более точной является формула прямоугольников, которая использует в качестве точки ξ_i середину элементарного отрезка, т.е. $\xi_i = x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0.5h$ и формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) \tag{9}$$

Этот метод (9) называется методом средних прямоугольников или просто методом прямоугольников. Для оценки погрешности метода прямоугольников (9) используют формулу:

$$R \le \frac{(b-a)h^2}{24} M \tag{10}$$

где $M = \max|f''(\xi)| \quad \xi \in [a,b]$

Погрешность формулы прямоугольников на всем отрезке интегрирования есть величина второго порядка точности, т.е. $O(h^2)$. Формулы левых и правых прямоугольников будут иметь первый порядок точности.

Формула трапеций

Аналогичными рассуждениями получим формулу трапеций на частичном отрезке:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h \tag{11}$$

Формула трапеций на всем отрезке $[a,b]$ получается суммированием (11) по всем участкам и называется составной формулой трапеций:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot h = \\ &= \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(x_n)\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Погрешность составной формулы трапеций (12) имеет следующую оценку

$$R \le \frac{h^2(b-a)}{12} M \qquad M = \max|f''(\xi)| \qquad \xi \in [a,b] \tag{13}$$

Или

$$R \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M \tag{14}$$

Формула трапеций на всем отрезке интегрирования имеет второй порядок точности, т.е. $O(h^2)$ как и формула прямоугольников.

Формула Симпсона (метод парабол)

Формула Симпсона получается при аппроксимации подынтегральной функции параболой, проходящей через три точки, т.е. функцию *f(x)* заменим интерполяционным многочленом Лагранжа 2-ой степени:

$$f(x) \approx L_{2,i} \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{15}$$

И проведем интегрирование:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x)dx = \frac{h}{6}\left(y_{i-1} + 4y_{i-\frac{1}{2}} + y_i \right) \tag{16}$$

Равенство (15) называется формулой Симпсона на частичном отрезке.
Составная формула Симпсона получается суммированием по всем частичным отрезкам

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)\right) \tag{17}$$

Чтобы не использовать дробные индексы, можно ввести обозначения $x_i = a_i + 0.5hi$, $f_i = f(x_i)$ $\quad i = 0,1,...,2n, b-a = nh$ и записать формулу Симпсона в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[\left(f_0 + f_{2n}\right) + 2\left(f_2 + f_4 + ... + f_{2n-2}\right) + 4\left(f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1}\right)\right] \tag{18}$$

Погрешность формулы Симпсона оценивается следующим неравенством

$$R \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}M \qquad M = \max\left|f^{(4)}(x)\right| \qquad x \in [a,b] \tag{19}$$

Формула Симпсона значительно точнее, чем формулы прямоугольников и трапеций. На всем отрезке интегрирования порядок точности формулы Симпсона равен 4.

Квадратурные формулы типа Гаусса

Формула Гаусса записывается как:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k) + R \tag{20}$$

имеет своими узлами x_k корни многочлена Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \tag{21}$$

а коэффициенты c_k вычисляются по формуле:

$$c_k = \frac{2}{(1-x_k{}^2)(P'(x_k))^2}, \quad k = 1,2,...,n \tag{22}$$

Приведем значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса при различных разбиениях отрезка интегрирования:

n=1	x_1=0	c_1=2
n=2	x_1=x_2=0.57735026	c_1=c_2=1
n=3	x_2=0	c_2=0.8888888889
	x_3=-x_1=0.7745966	c_1=c_3=0.5555555556
n=4	x_3=-x_2=0.3399811	c_2=c_3=0.6521451549
	x_1=-x_4=0.86113631	c_1=c_4=0.0.34785484
n=5	x_3=0	c_3=0.568888889
	x_4=-x_2=0.538469	c_2=c_4=0.47862867
	x_5=-x_1=0.9061798	c_1=c_5=0.2369268851
n=6	x_6=-x_1=0.93246951	c_1=c_6=0.171324492
	x_5=-x_2=0.6612093	c_2=c_5=0.36076157
	x_4=-x_3=0.23861918	c_3=c_4=0.46793

Для вычисления интеграла по произвольному отрезку $[a,b]$ необходимо сделать замену переменной вида:

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \tag{23}$$

тогда интеграл будет иметь вид:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)dx \qquad (24)$$

И для (24) можно применить формулу Гаусса.

Пример. 1. Вычислить приближенное значение определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, используя метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Количество разбиений выбрать самостоятельно.

2. Вычислить погрешность полученного результата, зная значение первообразной функции.

3. Найти количество разбиений, необходимых для получения результата с 3 верными цифрами для каждого метода.

4. Решить задачу, используя формулу НАСТ (типа Гаусса).

Интеграл	Первообразная функция
$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$	$tg(x)$

Разобьём отрезок интегрирования [0;1] на элементарные с шагом $h=0.1$ и запишем таблицу значений функции в точках разбиения. Количество разбиений $n=11$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	1	0.99	0.962	0917	0.862	0.8	0.735	0.671	0.61	0.553	0.5

Метод правых, левых и средних прямоугольников

Методом прямоугольников найдем приближенные значения интеграла:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx 0.1\cdot\sum_{i=0}^{10}\frac{1}{1+x_i^2} = 0.81$$ - для левых прямоугольников

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx 0.1\cdot\sum_{i=1}^{11}\frac{1}{1+x_i^2} = 0.76$$ -для правых прямоугольников

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \sum_{i=1}^{11}\frac{1}{1+x_{i-\frac{1}{2}}^2} = 0.7856$$ - для средних прямоугольников

Вычислим точное значение интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = tgx\Big|_0^1 = 0.7854$$

Вычислим погрешность полученного результата для левых и правых прямоугольников:

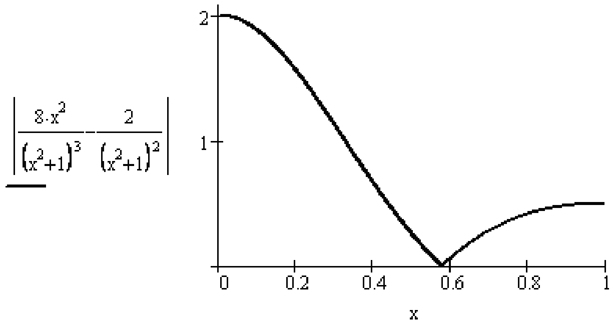
$$\delta_{левых} = \frac{|0.7854-0.81|}{|0.81|}\cdot 100\% = 3.132\% \qquad \delta_{правых} = \frac{|0.7854-0.76|\cdot 100\%}{|0.7854|} = 3.234\%$$

Для центральных прямоугольников:

$$\delta = \frac{|0.7854-0.7856|\cdot 100\%}{|0.7854|} = 0.026\%$$

Оценим погрешность по формуле: $R \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}M$, где $M = \max|f''(\xi)|,\ \xi\in[a,b]$.

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1+x^2} = \frac{8x^2}{(x^2+1)^3} - \frac{2}{(x^2+1)^2}$$



Из графика видно, что М=2

Найдём количество разбиений, необходимых для получения результата с 3 верными цифрами, исходя из формулы $R \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}M$. Имеем неравенство $\frac{(1-0)^3}{24n^2} \times 2 \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, решив которое, получаем n=12. Т.о. необходимо взять 12 разбиений, чтобы получить три верных цифры результата вычислений интеграла по формуле прямоугольников.

Метод трапеций

Методом трапеций найдем приближенное значение интеграла:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{1-0}{2 \cdot 11}\left(1 + 2(0.99 + 0.962 + \ldots + 0.553) + 0.5\right) = 0.785$$

Вычислим погрешность: $\delta = \frac{|0.7854 - 0.785| \cdot 100\%}{|0.785|} = 0.051\%$

Найдём количество разбиений, необходимых для получения результата с 3 верными цифрами, исходя из формулы: $R \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$, $M = \max\left|f''(\xi)\right|,\ \xi \in [a,b]$

Ранее мы получили М=2, подставляем в формулу и получаем неравенство, $\frac{(1-0)^3}{12n^2} \times 2 \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, откуда получаем n=18, т.е необходимо 18 разбиений, чтобы получить три верных цифры результата вычислений интеграла по формуле трапеций.

Метод Симпсона

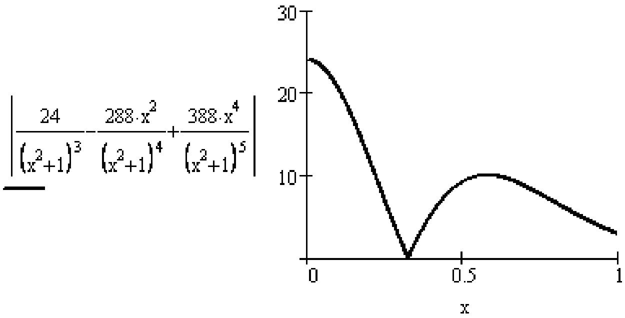
Методом Симпсона найдем приближенное значение интеграла:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{1-0}{6 \cdot 10}\left[\begin{matrix}(1 + 0.64) + 2(0.99 + 0.962 + \ldots + 0.552) + \\ + 4(0.998 + 0.978 + \ldots + 0.526)\end{matrix}\right] = 0.7854$$

Вычислим погрешность $\delta = \frac{|0.7854 - 0.7854|}{|0.7854|} \cdot 100\% = 2.338 \cdot 10^{-4}\%$

Используем формулу оценки погрешности метода Симпсона $R \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}M$ где $M = \max\left|f^{(4)}(x)\right|$ $x \in [a,b]$ для нахождения количества разбиений, чтобы вычислить интеграл с заданной точностью.

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{1+x^2} = \frac{24}{(x^2+1)^3} - \frac{288x^2}{(x^2+1)^4} + \frac{384x^4}{(x^2+1)^5}$$



Из графика видно, что максимальное значение достигается в точке x=0. Имеем M=24. Имеем неравенство

$$\frac{(1-0)^3}{180n^4}\times 24 \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$ и получаем n=4.

Необходимо взять 4 разбиения, чтобы результат вычислений интеграла по формуле Симпсона имел три верных цифры после запятой.

Решим задачу численного интегрирования, используя **формулу Гаусса**.

Чтобы воспользоваться формулой Гаусса, необходимо сделать замену переменной вида: $$t=\frac{b-a}{2}x+\frac{b+a}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

тогда исходный интеграл будет иметь вид:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{4}{x^2+2x+5}dx$$

Решим интеграл с помощью формулы Гаусса при *n=6*.

n=6	$x_6=-x_1=0.93246951$	$c_1=c_6=0.171324492$
	$x_5=-x_2=0.6612093$	$c_2=c_5=0.36076157$
	$x_4=-x_3=0.23861918$	$c_3=c_4=0.46793$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{4}{x^2+2x+5}dx\approx\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}c_k\cdot\frac{4}{x_k^{\,2}+2x_k+5}=\frac{1}{2}(c_1\cdot\frac{4}{x_1^{\,2}+2x_1+5}+...+c_6\cdot\frac{4}{x_6^{\,2}+2x_6+5})=$$
$$=\frac{1}{2}(0.171129+...+0.088603)=0.785411$$

Вычислим погрешность, зная точное значение интеграла $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=0.785398$

$$\delta=\frac{|0.785398-0.785411|\cdot 100\%}{|0.785411|}=1.655\cdot 10^{-3}\%$$

Лабораторная работа № 4

Задание:

1. Вычислить приближенное значение определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, используя метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Количество разбиений выбрать самостоятельно.
2. Вычислить погрешность полученного результата, зная значение первообразной функции.

3. Найти количество разбиений, необходимых для получения результата с 3 верными цифрами для каждого метода.
4. Решить задачу, используя формулу Гаусса.

Вариант	Интеграл	Первообразная функция
1.	$\int_0^2 \frac{x}{(x+3)^2}dx$	$\frac{3}{x+3}+\ln(x+3)$
2.	$\int_{0.2}^1 \frac{x}{2x+1}dx$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln(\lvert 2x+1\rvert)$
3.	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\sin(2x)dx$	$\frac{\sin(2x)}{4}-\frac{x\cos(2x)}{2}$
4.	$\int_0^1 2^{3x}dx$	$\frac{2^{3x}}{3\ln(2)}$
5.	$\int_1^5\left(\ln(x)^2+\frac{1}{3}\ln(x)^3\right)dx$	$\frac{(\ln(x))^3\cdot x}{3}$
6.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\sin(x)dx$	$\frac{e^{2x}}{5}(2\sin(x)-\cos(x))$
7.	$\int_1^3 \frac{x^2}{2x+3}dx$	$\frac{1}{8}(2x^2-6x+9\ln(2x+3))$
8.	$\int_1^4 \frac{x^2(7x^2-15)}{(7x^2-5)^2}dx$	$\frac{x^3}{7x^2-5}$
9.	$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}dx$	$\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}$
10.	$\int_2^3 x\cdot e^{0.8x}dx$	$\frac{e^{0.8x}}{0.64}(0.8x-1)$
11.	$\int_1^2 \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+0.25}}dx$	$-2\cdot\ln(\frac{0.5+\sqrt{x^2+0.25}}{x})$
12.	$\int_2^3 \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{x^2-1}}dx$	$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
13.	$\int_3^5 \frac{x}{0.5x+0.1}dx$	$2x-0.4\ln(0.5x+0.1)$
14.	$\int_0^1 x^2\cdot\sin(x)dx$	$2x\sin(x)-(x^2-2)\cdot\cos(x)$
15.	$\int_1^4 x\cdot 2^{3x}dx$	$\frac{x\cdot 2^{3x}}{3\ln(2)}-\frac{2^{3x}}{9(\ln(2))^2}$

П 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть имеем задачу Коши

$$\frac{du}{dx} = f(x,u(x)) \quad x \in [a,b] \tag{1}$$

$$u(a)=u_0 \tag{2}$$

где $f(x,u(x))$ – заданная непрерывная функция двух аргументов. Требуется найти функцию $u=u(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

Метод Эйлера

Введем на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку $\omega_h = \{x_i = a + ih, i = 0,1,2,...,n\}$ и соответствующую ей сеточную функцию для аппроксимации искомого решения $y_i = y(x_i) \approx u(x_i)$. Для аппроксимации производной используем правую разностную схему, т.е. $u'(x_i) \approx y'_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$. Заменим исходное дифференциальное уравнение (1) следующей разностной схемой

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{3}$$

где $f(x_i, y_i)$ - сеточная функция правой части дифференциального уравнения
И добавим начальное условие

$$y_0 = u_0 \tag{4}$$

Решение уравнения (3) в произвольном узле сетки можно выразить явным образом через значение, полученное в предыдущем узле , т.е.

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Распространим это уравнение на всю сетку и добавим начальное условие

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \qquad i = 0,1,2,...,n-1 \tag{5}$$

$$y_0 = u_0 \tag{6}$$

Построенный таким образом метод Эйлера является одношаговым, имеет первый порядок точности.

Усовершенствованный метод Эйлера

Аналогичными рассуждениями введем сетку, сеточную функцию. Усовершенствованным методом Эйлера называется метод, который использует формулу следующего вида

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \quad i = 0,1,2,...,n-1 \tag{7}$$

Формулу (7) можно записать следующим образом

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)); h = (x_{i+1} - x_i) \; i = 0,1,2,...,n-1 \tag{8}$$

Усовершенствованный метод Эйлера имеет точность второго порядка.

Метод Эйлера-Коши

Рассмотрим модификацию метода Эйлера, которая получается, если аппроксимацию функции $f(x,u(x))$ приравнять среднему арифметическому значений этой функции на концах элементарного отрезка, т.е. имеем

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\frac{1}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})\right],\ i=0,1,2,\ldots,n\text{-}1 \qquad (9)$$

$$y_0=u_0 \qquad (10)$$

Выразим значение сеточной функции решения

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})\right],\ i=0,1,2,\ldots,n\text{-}1 \qquad (11)$$

$$y_0=u_0 \qquad (12)$$

Полученная схема (11)-(12) является неявной, т.к. искомое значение сеточной функции y_{i+1} входит в обе части уравнения (11) и его нельзя выразить явно. Значит решение разностной задачи (11)-(12) следует искать итерационным способом. Вычисление сеточной функции в каждой последующей точке, т.е. y_{i+1} можно проводить на основе двух итераций. Будем предполагать, что значение y_i уже известно. Применим метод Эйлера и найдем промежуточное значение

$$\tilde{y}_{i+1}=y_i+h*f(x_i,y_i) \qquad (13)$$

Это найденное промежуточное значение подставим в правую часть уравнения (11), чтобы вычислить значение функции *f*. Окончательно получаем

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\tilde{y}_{i+1})\right],\ i=0,1,2,\ldots,n\text{-}1 \qquad (14)$$

$$y_0=u_0 \qquad (15)$$

Алгоритм (14)-(15) можно записать в виде одного соотношения вида

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_i+h*f(x_i,y_i)\right],\ i=0,1,2,\ldots,n\text{-}1 \qquad (16)$$

$$y_0=u_0 \qquad (17)$$

Схема (13)-(15) или в варианте (16)-(17) называется методом Эйлера-Коши. Этот метод имеет второй порядок точности.

Методы Рунге-Кутты

Семейство одношаговых методов Рунге-Кутты для решения задачи Коши (1)-(2) выражается следующим образом:

$$\begin{gathered}
y_{i+1}=y_i+h\sum_{j=1}^{m}A_jK_j\\
K_1=f(x_i,y_i)\\
K_2=f(x_i+a_2h,y_i+b_{21}hK_1)\\
K_3=f(x_i+a_3h,y_i+b_{31}hK_1+b_{32}hK_2)\\
\ldots\\
K_m=f(x_i+a_{m3}h,y_i+b_{m1}hK_1+b_{m2}hK_2+\ldots+b_{m,m-1}hK_{m-1})
\end{gathered} \qquad (18)$$

Коэффициенты

$$a_i,b_{is} \quad i=2,3,...m,s=1,2,...,m-1 \qquad A_j \quad j=1,2,...,m$$

представляют собой константы, значение которых выбирается из соображений точности, устойчивости и экономичности алгоритма.

Примеры схем Рунге-Кутты:

2-х этапный метод (метод предиктор-корректор)

$$y_{i+1} = y_i + h(A_1K_1 + A_2K_2) \tag{19}$$
$$K_1 = f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \quad i = 0,1,2,...,n-1$$

$$A_1 = 0 \quad A_2 = 1$$

Метод (19) имеет второй порядок точности.
4-х этапный метод

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{20}$$

$$K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \quad K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$$
$$i = 0,1,2,...,n-1$$

Метод (20) имеет четвертый порядок точности.

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(a)=y_0$ на отрезке $[a,b]$. Вычислить погрешность результата, сравнив с решением, полученным применением функций стандартных математических пакетов.

Для решения задачи Коши

$$y' = x + \cos(\frac{y}{3}) \qquad y_0 = 4.6 \qquad x \in [1.6;2.6]$$

с шагом h=0.1 применить:

1. Метод Эйлера
2. Усовершенствованный метод Эйлера
3. Метод Эйлера-Коши
4. Метод Рунге-Кутта 4 порядка точности

Найдём решение с помощью стандартной функции rkfixed(nz,a,b,N,D) пакета MathCad и примем его за точное. Параметры: nz – вектор начальных условий; a,b - границы отрезка поиска решения задачи; N - число разбиений отрезка; D(x,u) - вектор-функция, содержащая функцию первой производной. Имеем

$$nz = 4.6,\ h = 0.1,\ a = 1.6, b = 2.6, N = \frac{b-a}{h}, D = x + \cos\left(\frac{y}{3}\right)$$

$$Y := rkfixed(nz, a, b, N, D)$$

$$tochnoe := Y^{<1>}$$

1. Найдём решение задачи Коши методом Эйлера.

Введем на отрезке [1.6,2.6] равномерную сетку с шагом *h=0.1* и соответствующую ей сеточную функцию для аппроксимации искомого решения $y_i = y(x_i) \approx u(x_i)$ $i = 0,1,2,...,10$. Сеточная функция правой части дифференциального уравнения совпадает с точным значением - $f(x_i, y_i)$.

Решение будем искать по формуле Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),\quad f(x_i, y_i) = x_i + \cos(\frac{y_i}{3}),\quad i = 0,1,2,...,9 \qquad y_0 = 4.6$$

Имеем:

$y_0 = 4.6$

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0) = y_0 + h\cdot (x_0 + \cos\left(\frac{y_0}{3}\right)) = 4.6 + 0.1\cdot 1.6375 = 4.7637$$

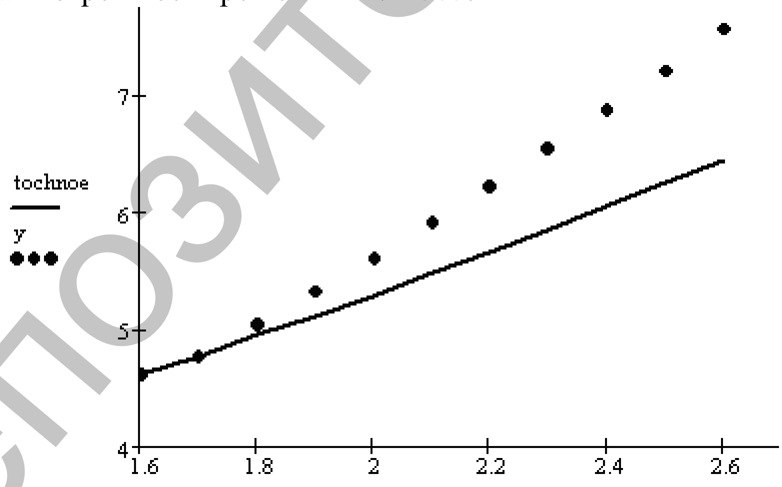
…

$$y_{10} = y_9 + h\cdot f(x_9, y_9) = y_9 + h\cdot (x_9 + \cos\left(\frac{y_9}{3}\right)) = 7.2037 + 0.1\cdot 1.7618 = 7.5537$$

Результаты всех вычислений представлены в таблице и графически

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	y_i	точное решение	Относительная погрешность Δ_i %
0	1.6	1.6375	4.6	4.6	0
1	1.7	1.6829	4.7637	4.766	0.0483
2	1.8	1.6931	5.0337	4.9364	1.9711
3	1.9	1.7009	5.3137	5.11	3.9863
4	2	1.7072	5.6037	5.2899	5.9321
5	2.1	1.7133	5.9037	5.4728	7.8735
6	2.2	1.7202	6.2137	5.6597	9.7885
7	2.3	1.7295	6.5337	5.8506	11.6757
8	2.4	1.7428	6.8637	6.0456	13.5322
9	2.5	1.7618	7.2037	6.2447	15.357
10	2.6		7.5537	6.4479	17.1498

Относительная погрешность решения 17.1498%



2. Найдём решение задачи усовершенствованным методом Эйлера.

Сетка и сеточные функции построены ранее.

Решение будем искать по формуле вида:

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\cdot f(x_i, y_i)), \qquad f(x_i, y_i) = x_i + \cos(\frac{y_i}{3}),\ i = 0,1,2,\ldots,9$$

$y_0 = 4.6$

Имеем:

$y_0 = 4.6$

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{h}{2}\cdot f(x_0,y_0)) = y_0 + h\cdot\left(x_0+\frac{h}{2}+\cos\left(\frac{y_0+\frac{h}{2}\cdot f(x_0,y_0)}{3}\right)\right)=$$

$$=4.6+0.1\cdot 1.6602=4.766$$

…

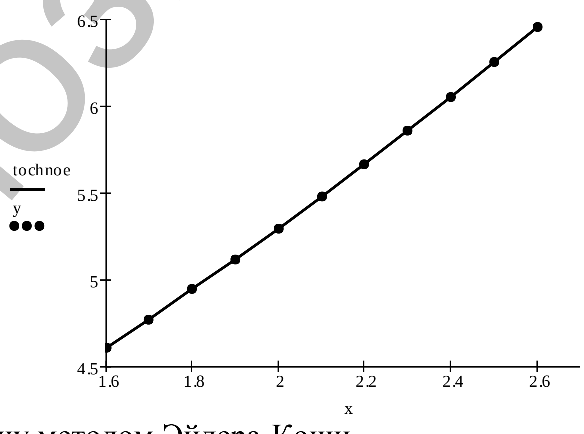
$$y_{10} = y_9 + h\cdot f(x_9+\frac{h}{2}, y_9+\frac{h}{2}\cdot f(x_9,y_9)) = y_9 + h\cdot\left(x_9+\frac{h}{2}+\cos\left(\frac{y_9+\frac{h}{2}\cdot f(x_9,y_9)}{3}\right)\right)=$$

$$=6.2448+0.1\cdot 2.0322=6.448$$

Результаты всех вычислений представлены в таблице и на графике

i	x_i	$f(x_i,y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{h}{2}\cdot f(x_i,y_i))$	y_i	точное решение	Относительная погрешность Δ_i %
0	1.6	1.6375	1.6602	4.6	4.6	0
1	1.7	1.6821	1.7041	4.766	4.766	0
2	1.8	1.7254	1.7467	4.9364	4.9364	0
3	1.9	1.7675	1.7883	5.1111	5.1100	0.0215
4	2	1.8087	1.8292	5.2899	5.2899	0
5	2.1	1.8492	1.8695	5.4729	5.4728	0.00182
6	2.2	1.8894	1.9096	5.6598	5.6597	0.00177
7	2.3	1.9296	1.9499	5.8508	5.8506	0.00341
8	2.4	1.97	1.9906	6.0458	6.0456	0.00331
9	2.5	2.0111	2.0322	6.2448	6.2447	0.0016
10	2.6	2.0532	2.2474	6.448	6.4479	0.00155

Относительная погрешность решения 0.0215%



3. Решим задачу методом Эйлера-Коши.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})\right] \quad i=0,1,2,\ldots,n\text{-}1$$

$$y_0 = u_0$$

Сетка и сеточные функции построены ранее.

Все вычисления оформим в виде таблицы. Заполнения таблицы имеет следующий порядок.

1. $x_{i+1} = x_i + h \; i = 0,1,2,...,9$

2. $f_i = f(x_i, y_i) = x_i + \cos(\frac{y_i}{3}) \qquad f_0 = x_0 + \cos(\frac{y_0}{3}) = 1.6 + \cos(\frac{4.6}{3}) = 1.6375$

3. $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i) \qquad \tilde{y}_1 = y_0 + h * f_0 = 4.6 + 0.1 * 1.6375 = 4.7637$

4. $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) = x_i + \cos(\frac{\tilde{y}_i}{3}) \qquad \tilde{f}_1 = x_1 + \cos(\frac{\tilde{y}_1}{3}) = 1.7 + \cos(\frac{4.7637}{3}) = 1.6829$

5. $\Delta y_i = \frac{h}{2}(f_i + \tilde{f}_{i+1}) \qquad \Delta y_0 = \frac{h}{2}(f_0 + \tilde{f}_1) = \frac{0.1}{2}(1.6375 + 1.6829) = 0.166$

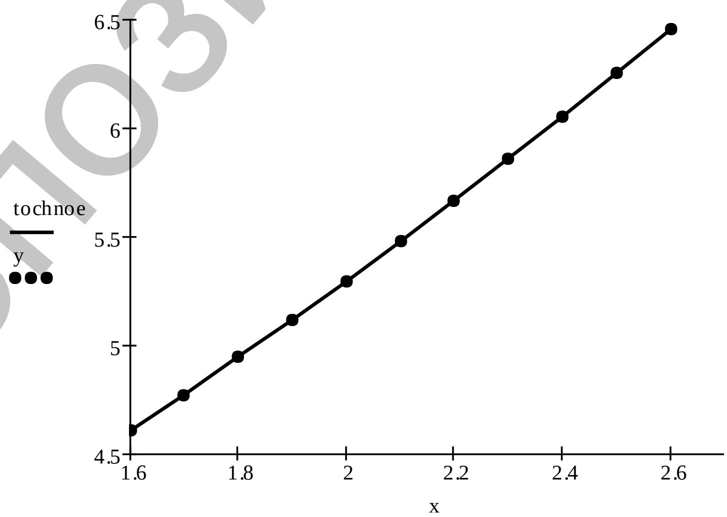
6. $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right]$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 4.6 + 0.166 = 4.766$

7.

i	x_i	f_i	$\tilde{y}_{i+1}$	$\tilde{f}_{i+1}$	Δy_i	y_i	точное решение	Относ. по-греш Δ_i %
0	1.6	1.6375			0.166	4.6	4.6	0
1	1.7	1.6821	4.7637	1.6829	0.1704	4.766	4.766	0
2	1.8	1.7254	4.9342	1.7261	0.1747	4.9364	4.9364	0
3	1.9	1.7675	5.109	1.7682	0.1788	5.1111	5.1100	0.0215
4	2	1.8087	5.2879	1.8094	0.1829	5.2899	5.2899	0
5	2.1	1.8492	5.4708	1.8499	0.187	5.4729	5.4728	0.00182
6	2.2	1.8894	5.6578	1.8901	0.191	5.6598	5.6597	0.00177
7	2.3	1.9296	5.8488	1.9302	0.195	5.8508	5.8506	0.00341
8	2.4	1.97	6.0438	1.9706	0.1991	6.0458	6.0456	0.00331
9	2.5	2.0111	6.2428	2.0117	0.2032	6.2449	6.2447	0.0032
10	2.6		6.446	2.0538		6.4482	6.4479	0.00465

Относительная погрешность решения 0.0215%



4. Найдём решение задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Сетка и сеточные функции построены ранее.

Все вычисления будем проводить по следующим формулам:

$K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_1)$

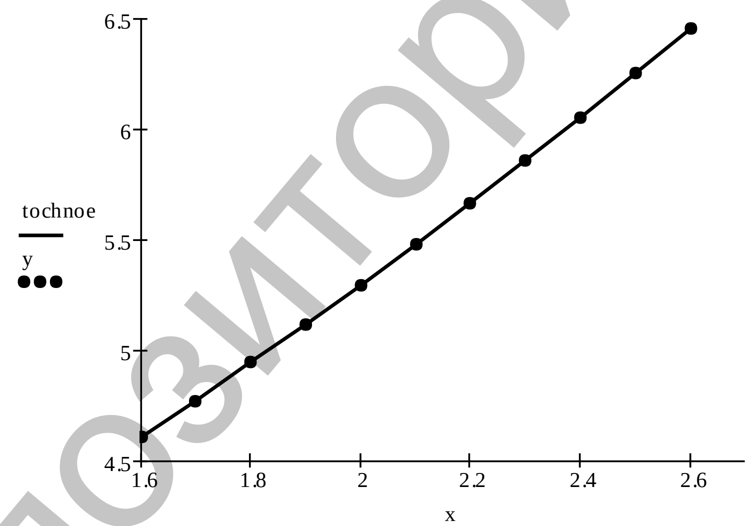
$$K_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_2) \qquad K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$$

$$\Delta y_i = \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \qquad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad i = 0,1,2,...,9$$

Полученные данные занесём в таблицу:

i	x_i	K_1	K_2	K_3	K_4	Δy_i	y_i	Точное решение	Отн. погр. Δ %
0	1.6	1.6375	1.6602	1.6598	1.6821	0.166	4.6	4.6	0
1	1.7	1.6821	1.7041	1.7037	1.7254	0.1704	4.766	4.766	0
2	1.8	1.7254	1.7468	1.7464	1.7675	0.1747	4.9364	4.9364	0
3	1.9	1.7675	1.7884	1.788	1.8087	0.1788	5.111	5.11	0.02
4	2	1.8087	1.8292	1.8289	1.8493	0.1829	5.2899	5.2899	0
5	2.1	1.8493	1.8695	1.8692	1.8895	0.1869	5.4728	5.4728	0
6	2.2	1.8895	1.9097	1.9094	1.9296	0.191	5.6597	5.6597	0
7	2.3	1.9296	1.9499	1.9496	1.9701	0.195	5.8506	5.8506	0
8	2.4	1.9701	1.9907	1.9904	2.0112	0.1991	6.0456	6.0456	0
9	2.5	2.0112	2.0322	2.0319	2.0532	0.2032	6.2447	6.2447	0
10	2.6	2.0532	2.0749	2.0746	2.0967	0.2075	6.4479	6.4479	0

Относительная погрешность решения 0.02%



Лабораторная работа № 5

Задание:

Решить дифференциальное уравнение. Составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(a)=y_0$ на отрезке $[a,b]$ с шагом h в соответствие с вариантом. Вычислить погрешность результата, сравнив с решением, полученным применением функций стандартных математических пакетов. Все решения отобразить в одной графической плоскости.

Для решения задачи Коши ОДУ применить:

1. Метод Эйлера
2. Усовершенствованный метод Эйлера
3. Метод Эйлера-Коши
4. Метод Рунге-Кутта 4 порядка точности

Вари- ант	Задание	Методы решения
1	$y' = \frac{2y}{x} + x \quad y_0 = 0 \quad x \in [1;1.5]$ h=0.1	Метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
2	$y' = \frac{xy}{1+x^2} \quad y_0 = 2 \quad x \in [0;0.05] \quad h = 0.01$	Усовершенствованный метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
3	$y' = y + (1+x)y^{\frac{1}{2}}, y_0 = 1, x \in [0;0.5]$,$h$=0.1	Метод Эйлера-Коши Метод Рунге-Кутта
4	$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, y_0 = 0, x \in [1;1.5]$, h=0.1	Метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
5	$y' = \frac{x^2y^2 - (2x+1)y + x}{x}, y_0 = 0, x \in [1;1.5]$ h=0.1	Усовершенствованный метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
6	$y' = \frac{x^2 + y^2}{10} \quad y_0(1) = 1 \quad x \in [1;2] \quad h = 0.1$	Метод Эйлера-Коши Метод Рунге-Кутта
7	$y' = \frac{1+x}{\frac{x}{y} - 1} \quad y_0 = 1 \quad x \in [0;0.3] \quad h = 0.05$	Метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
8	$y' = \frac{y}{x} + \ln(xy^2) \quad y_0 = -2 \quad x \in [1;1.5]$ h=0.1	Усовершенствованный метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
9	$y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} \quad y_0 = 0 \quad x \in [1;1.5]$ h=0.1	Метод Эйлера-Коши Метод Рунге-Кутта
10	$y' = \frac{xy}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}, y_0 = 0, x \in [0;0.5]$,$h$=0.1	Усовершенствованный метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
11	$y' = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \quad y_0 = 0 \quad x \in [0;0.5]$ h=0.1	Метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
12	$y' = -x^2y^2 + \frac{x^2 - 0.5}{(1+0.5x)^2}, y_0 = 0, x \in [0;0.5]$, h=0.1	Усовершенствованный метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
13	$y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{11}}) \quad y_0 = 2.5 \; x \in [2.1;3.1]$ h=0.1	Метод Эйлера-Коши Метод Рунге-Кутта
14	$y' = \frac{1}{1+x^3y} + 2y, y_0 = 2.1, x \in [1.5;2], h = 0.05$	Метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта
15	$y' = 4.1x - y^2 + 0.6 \; y_0 = 3.4 \; x \in [0.6;2.6]$ $h = 0.2$	Усовершенствованный метод Эйлера, Метод Рунге-Кутта

П 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Имеем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dU}{dx} = f(x, U(x)) \qquad 0 \le x \le X \tag{1}$$

$$U(0) = U0 \tag{2}$$

Здесь $U(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))$ - искомый вектор решения задачи (1)-(2), $f(x, U(x)) = (f_1(x, U(x)), f_2(x.U(x)), ..., f_n(x, U(x))$ заданный вектор правой части.*U0* –вектор начальных условий.

Рассмотрим случай системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений.

Пусть вектор $U(x) = (u_1(x), u_2(x)) = (y(x), z(x))$ и система имеет вид

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad x \in [a, b] \tag{3}$$

С условиями

$$y(a) = y_0 \qquad z(a) = z_0 \tag{4}$$

Метод Эйлера для решения задачи (3)-(4) является конечноразностным методом. Поэтому введем равномерную сетку с постоянным шагом *h*>0 $\omega_h = \{x_i = a + ih,\ i = 0, ..., N\}$. Введем сеточные функции $y_i \approx y(x_i),\ z_i \approx z(x_i)$ и функции правой части $f1_i \approx f_1(x_i, y_i, z_i)$ *и* $f2_i \approx f_2(x_i, y_i, z_i)$. Приближенное решение системы (3)-(4) в узлах сетки будем вычислять последовательно по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf1(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hf2(x_i, y_i, z_i) \end{cases} \quad i = 0, 1, ..., n-1 \tag{5}$$

и учтем, что $y(a) = y_0 \quad z(a) = z_0$.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности для решения задачи (3)-(4) записывается следующим образом.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \qquad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= f_1(x_i, y_i, z_i) & L_1 &= f_2(x_i, y_i, z_i) \\
K_2 &= f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1, z_i + \frac{h}{2}L_1) & L_2 &= f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1, z_i + \frac{h}{2}L_1) \\
K_3 &= f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2, z_i + \frac{h}{2}L_2) & L_3 &= f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2, z_i + \frac{h}{2}L_2) \\
K_4 &= f_1(x_i + h, y_i + hK_3, z_i + hL_3) & L_4 &= f_2(x_i + h, y_i + hK_3, z_i + hL_3)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$i = 0, 1, ..., n-1$$

Пример. Найти решение системы дифференциальных уравнений, определенной на отрезке [0;0.5] и с заданными начальными условиями. Использовать методы

Эйлера и Рунге-Кутты. Вычислить погрешность полученного решения на основании сравнения с решением стандартными функциями.

$$\begin{cases} y' = e^{-\left|z^2+y^2\right|} + 2x \\ z' = 2y^2 + z \end{cases} \quad x \in [0;0.5]$$

$$y(0) = 0.5 \quad z(0) = 1$$

Обозначим $f1 = e^{-\left|z^2+y^2\right|} + 2x \quad f2 = 2y^2 + z$, выберем шаг h=0.1 и построим следующую таблицу, применяя метод Эйлера (5)

i	x_i	y_i	$f1_i$	z_i	$f2_i$
0	0	0.5	0.286505	1	1.5
1	0.1	0.52865	0.401499	1.15	1.708943
2	0.2	0.5688	0.526401	1.320894	1.967962
3	0.3	0.62144	0.66791	1.51769	2.290067
4	0.4	0.688231	0.829463	1.746697	2.694022
5	0.5	0.771178	1.009472	2.016099	3.20553

Таблицу заполняем в следующем порядке

1. Заполняем столбец x_i с шагом 0.1;
2. Заносим в соответствующие ячейки начальные условия $y_0 = y(0) = 0.5 \quad z_0 = z(0) = 1$
3. Рассчитываем функции правых частей для первой узловой точки

$$f1_0 = e^{-\left|z_0{}^2+y_0{}^2\right|} + 2x_0 = e^{-(1+0.25)} + 2\cdot 0 = 0.286505$$

$$f2_0 = 2y_0{}^2 + z_0 = 2(0.5)^2 + 1 = 1.5$$

4. Определяем значение решения в первом узле

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hf1(x_0, y_0, z_0) = 0.5 + 0.1\cdot 0.286505 = 0.5286505 \\ z_1 = z_0 + hf2(x_0, y_0, z_0) = 1 + 0.1\cdot 1.5 = 1.15 \end{cases}$$

5. Повторяем с пункта 3.

Найдём решение с помощью стандартной функции rkfixed(nz,a,b,N,D) пакета MathCad. Параметры данной функции описаны в лабораторной работе №5.

В нашем случае

$$a = 0,\ b = 0.5,\ nz = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix},\ D(x,u) = \begin{bmatrix} e^{-\left|u_0^2+u_1^2\right|} + 2x \\ 2u_0^2 + u_1 \end{bmatrix},\ S = rkfixed(nz, 0, 0.5, N, D)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.53403 & 1.16116 \\ 0.2 & 0.57946 & 1.34819 \\ 0.3 & 0.63792 & 1.56755 \\ 0.4 & 0.71165 & 1.82771 \\ 0.5 & 0.80286 & 2.13997 \end{pmatrix}$$

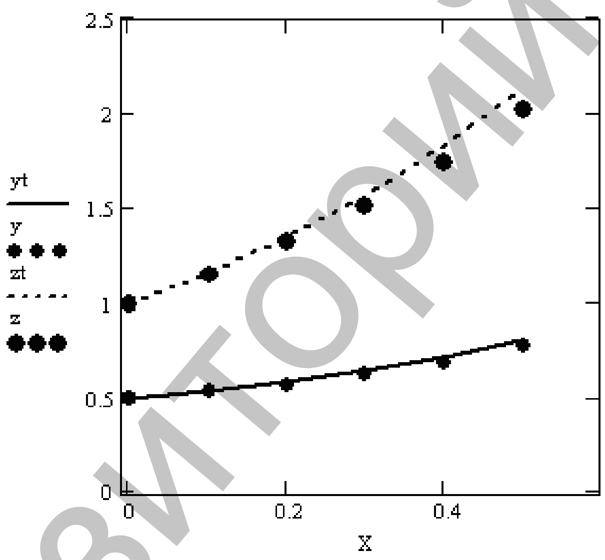
Полученное решение примем за точное и введем следующие обозначения:

$yt := S^{\langle 1 \rangle}$, $zt := S^{\langle 2 \rangle}$ - точное решение, $X := S^{\langle 0 \rangle}$ – сетка, y и z - приближённое решение, вычисленное методом Эйлера.

Составим таблицу

i	x_i	yt_i	y_i	zt_i	z_i	Относ. погр. Δ_y%	Относ. погр. Δ_z%
0	0	0.5	0.5	1	1	0	0
1	0.1	0.53403	0.52865	1.16116	1.15	1.007	0.961
2	0.2	0.57947	0.5688	1.34819	1.320894	1.841	2.025
3	0.3	0.63792	0.62144	1.56755	1.51769	2.583	3.181
4	0.4	0.71165	0.688231	1.82771	1.746697	3.291	3.433
5	0.5	0.80286	0.771178	2.13997	2.016099	3.947	4.789

Погрешность решения системы методом Эйлера составляет 4.789%.
Построим график полученного и точного решений.



Метод Эйлера обладает малой точностью. Повысить точность решения можно, уменьшив шаг сетки, или применив формулу Рунге-Кутта.
Решим систему, используя метод Рунге-Кутта четвёртого порядка точности по формулам (6). Составим таблицу вычислений следующего вида.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
K_1	0.287	0.394	0.515	0.656	0.82	0
K_2	0.382	0.49	0.611	0.753	0.919	0
K_3	0.381	0.489	0.61	0.753	0.919	0
K_4	0.475	0.584	0.706	0.85	1.018	0
L_1	1.5	1.741	2.039	2.412	2.882	0
L_2	1.604	1.871	2.203	2.619	3.148	0
L_3	1.619	1.888	2.223	2.643	3.177	0
L_4	1.741	2.04	2.412	2.883	3.482	0

$y1_i$	0.5	0.538143	0.587085	0.648149	0.723448	0.81536
$z1_i$	1	1.161458	1.349763	1.571473	1.835126	2.152015

Таблицу заполняем в следующем порядке:

1. Заполняем строку x_i с шагом 0.1.
2. Заносим в соответствующие ячейки начальные условия $y_0 = y(0) = 0.5 \quad z_0 = z(0) = 1$
3. Рассчитываем коэффициенты K_1 и L_1 для первой узловой точки

$$K_1 = e^{-\left|z_0{}^2 + y_0{}^2\right|} + 2x_0 = e^{-(1+0.25)} + 2 \cdot 0 = 0.287$$

$$L_1 = 2y_0{}^2 + z_0 = 2(0.5)^2 + 1 = 1.5$$

4. Рассчитываем коэффициенты K_2 и L_2 для первой узловой точки

$$K_2 = e^{-\left|(z_0+0.05L_1)^2+(y_0+0.05K_1)^2\right|} + 2(x_0 + 0.05) = e^{-(1.156+0.265)} + 2 \cdot 0.05 = 0.382$$

$$L_2 = 2(y_0 + 0.05K_1)^2 + z_0 + 0.05L_1 = 2 \cdot 0.265 + 1.075 = 1.604$$

1. Рассчитываем коэффициенты K_3 и L_3

$$K_3 = e^{-\left|(z_0+0.05L_2)^2+(y_0+0.05K_2)^2\right|} + 2(x_0 + 0.05) = e^{-(1.167+0.269)} + 2 \cdot 0.05 = 0.381$$

$$L_3 = 2(y_0 + 0.05K_2)^2 + z_0 + 0.05L_2 = 2 \cdot 0.269 + 1.08 = 1.619$$

2. Рассчитываем коэффициенты K_4 и L_4

$$K_4 = e^{-\left|(z_0+0.1L_3)^2+(y_0+0.1K_3)^2\right|} + 2(x_0 + 0.1) = e^{-(1.35+0.29)} + 2 \cdot 0.1 = 0.475$$

$$L_4 = 2(y_0 + 0.1K_3)^2 + z_0 + 0.1L_3 = 2 \cdot 0.29 + 1.162 = 1.741$$

5. Определяем значение решения в первом узле

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.5 + 0.017 \cdot (0.287 + 0.382 + 0381 + 0.475) = 0.538143 \\ z_1 = z_0 + \dfrac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) = 1 + 0.017 \cdot (1.5 + 1.604 + 1.619 + 1.741) = 1.161458 \end{cases}$$

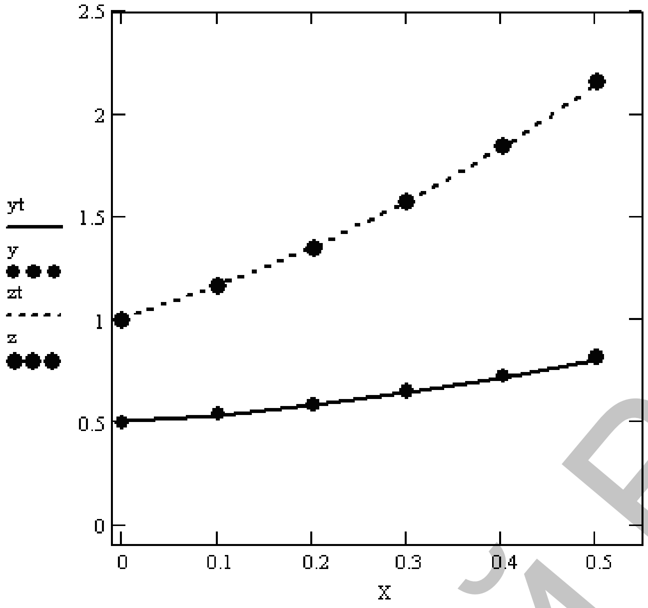
8. Повторяем с пункта 3.

Точное решение получено ранее.

Составим таблицу

i	x_i	yt_i	y_i	zt_i	z_i	Относ. погр. Δ_y %	Относ. погр. Δ_z %
0	0	0.5	0.5	1	1	0	0
1	0.1	0.53403	0.538143	1.16116	1.161458	0.77	0.26
2	0.2	0.57947	0.587085	1.34819	1.349763	1.314	0.117
3	0.3	0.63792	0.648149	1.56755	1.571473	1.603	0.25
4	0.4	0.71165	0.723448	1.82771	1.835126	1.658	0.406
5	0.5	0.80286	0.81536	2.13997	2.152015	1.557	0.563

Построим график полученного и точного решений:



Погрешность решения составляет 1.658%.

Лабораторная работа № 6

Задание:

Найти решение системы дифференциальных уравнений, определенной на отрезке [0;1] и с заданными начальными условиями. Использовать методы Эйлера и Рунге-Кутты. Вычислить погрешность полученного решения на основании сравнения с решением стандартными функциями В случае, если решение имеет погрешность больше 5%-7%, уменьшить шаг h.. Отобразить результаты на графике.

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \end{cases}$ $y(0) = -1$ $z(0) = 1$ $h = 0.1$
2	$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x + 0.5} + \sqrt{y^2 + x^2} \\ z' = \dfrac{y + z}{z^2 - x + 1.5} \end{cases}$ $y(0) = 0.25$ $z(0) = 0$ $h = 0.1$
3	$\begin{cases} y' = -2xy^2 + z^2 - x^2 - 1 \\ z' = \dfrac{1}{z^2} - y - \dfrac{x}{z} \end{cases}$ $y(0) = 1$ $z(0) = 1$ $h = 0.1$
4	$\begin{cases} y' = e^{-(x^2 + y^2)} + 3x \\ z' = 3y^2 + z \end{cases}$ $y(0) = 0.5$ $z(0) = 1$ $h = 0.1$
5	$\begin{cases} y' = z - \cos(x) \\ z' = y + \cos(x) \end{cases}$ $y(0) = 0$ $z(0) = 0$ $h = 0.1$
6	$\begin{cases} y' = z + x + \sin(2y^2) \\ z' = y + x - 2z + 1 \end{cases}$ $y(0) = 1$ $z(0) = 0.5$ $h = 0.1$

7	$\begin{cases} y' = \ln(2x + \sqrt{2x^2 + z^2}) \\ z' = \sqrt{2x^2 + y^2} \end{cases}$ $y(0) = 0.5$ $z(0) = 1$ $h = 0.1$
8	$\begin{cases} y' = y + x \\ z' = x - z^2 \end{cases}$ $y(0) = 0$ $z(0) = 1$ $h = 0.1$
9	$\begin{cases} y' = yz + x \\ z' = x^2 - y^2 \end{cases}$ $y(0) = 1$ $z(0) = 0.5$ $h = 0.1$
10	$\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) \\ z' = \dfrac{2}{4y + x} + x + 1 \end{cases}$ $y(0) = 1$ $z(0) = 2$ $h = 0.1$
11	$\begin{cases} y' = y^2 + z^2 + x \\ z' = z^2 - y^2 - x \end{cases}$ $y(0) = 0$ $z(0) = 0$ $h = 0.1$
12	$\begin{cases} y' = y^3 - z^2 - x \\ z' = z^3 + y^2 + x \end{cases}$ $y(1) = 0$ $z(1) = 0$ $h = 0.1$ $x \in [1;1.5]$
13	$\begin{cases} y' = \sin y + \cos z \\ z' = \sin y + 2\cos z \end{cases}$ $y(0) = 1$ $z(0) = 0.5$ $h = 0.1$
14	$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + z^2 + 1} \\ z' = y + z - 1 \end{cases}$ $y(1) = 0.5$ $z(1) = 0$ $h = 0.1$ $x \in [1;1.5]$
15	$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + z^2 + 4} \\ z' = y - z - 1 \end{cases}$ $y(0.5) = 0.5$ $z(0.5) = 0.5$ $h = 0.1$ $x \in [0.5;1.5]$

П 7. МЕТОД РЕДУКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть дана линейная краевая задача:

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in [a,b] \tag{1}$$

граничные условия в общем виде выражаются следующим образом:

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \tag{2}$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 \tag{3}$$

где *p(x)*,*q(x)*,*f(x)* - известные функции ; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ – константы, причем выполняется условие $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$.

Ищем общее решение в виде

$$u(x) \approx y(x) = Y0(x) + c1Y1(x) + c2Y2(x) \tag{4}$$

Далее необходимо решить три задачи Коши

$$\begin{cases} Y0''(x) + p(x)Y0'(x) + q(x)Y0(x) = f(x) \qquad x \in [a,b] \\ Y0(a) = 0 \\ Y0'(a) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} Y1''(x) + p(x)Y1'(x) + q(x)Y1(x) = 0 \qquad x \in [a,b] \\ Y1(a) = 1 \\ Y1'(a) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} Y2''(x) + p(x)Y2'(x) + q(x)Y2(x) = 0 \qquad x \in [a,b] \\ Y2(a) = 0 \\ Y2'(a) = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Решив эти системы (5)-(7) численным методом, получим в узлах выбранной сетки ω_h, в том числе на правом конце отрезка, значения функций *Y0,Y1,Y2*. Подставим эти найденные значения в краевые условия

$$\begin{cases} \alpha_1\left[Y0(a) + c1Y1(a) + c2Y2(a)\right] + \beta_1\left[Y0'(a) + c1Y1'(a) + c2Y2'(a)\right] = \gamma_1 \\ \alpha_2\left[Y0(b) + c1Y1(b) + c2Y2(b)\right] + \beta_2\left[Y0'(b) + c1Y1'(b) + c2Y2'(b)\right] = \gamma_2 \end{cases} \tag{8}$$

Учтем из (5)-(7), что

Y0(a)=0, $Y0'(a) = 0$, Y1(a)=1, $Y1'(a) = 0$, Y2(a)=0, $Y2'(a) = 1$ и получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_1 c1 + \beta_1 c2 = \gamma_1 \\ \alpha_2\left[Y0(b) + c1Y1(b) + c2Y2(b)\right] + \beta_2\left[Y0'(b) + c1Y1'(b) + c2Y2'(b)\right] = \gamma_2 \end{cases} \tag{9}$$

Из системы (9) найдем значения коэффициентов *c1, c2* и подставим их в соотношение (4), на основании которого можем найти искомое решение в любой точке сетки ω_h на отрезке поиска решения.

Пример. Найти решения граничных задач с шагом *h=0.1* на отрезке [*a,b*] используя метод редукции. Для решения задач Коши использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом *h=0.1*. Оценить погрешность полученного решения.

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{1}{x}u' - 2u = -2x^2 \\ u'(0.5) = 1 \\ u(1) = 3 \end{cases} \qquad a = 0.5 \;\; b = 1$$

Приближенное решение ищем в виде

$u(x) \approx y(x) = Y0(x) + c_1 \cdot Y1(x) + c_2 \cdot Y2(x)$

Для поиска коэффициентов этого разложения построим три задачи Коши.

$$\begin{cases} Y0''(x) + \dfrac{1}{x}Y0'(x) - 2Y0 = -2x^2 \qquad x \in [0.5,1] \\ Y0(0.5) = 0 \\ Y0'(0.5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y1''(x)+\frac{1}{x}Y1'(x)-2Y1=0 \quad x\in[0.5,1] \\ Y1(0.5)=1 \\ Y1'(0.5)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y2''(x)+\frac{1}{x}Y2'(x)-2Y2=0 \quad x\in[0.5,1] \\ Y2(0.5)=0 \\ Y2'(0.5)=1 \end{cases}$$

Каждая из этих задач основана на уравнении второго порядка, следовательно, понижением порядка уравнений получаем системы дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} Y0'(x)=S0(x) \quad x\in[0.5,1] \\ S0'(x)=2Y0-2x^2-\frac{1}{x}Y0'(x) \\ Y0(0.5)=0 \\ S0(0.5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y1'(x)=S1(x) \quad x\in[0.5,1] \\ S1'(x)=-\frac{1}{x}Y1'(x)+2Y1 \\ Y1(0.5)=1 \\ S1(0.5)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y2'(x)=S2(x) \quad x\in[0.5,1] \\ S2'(x)=-\frac{1}{x}Y2'(x)+2Y2 \\ Y2(0.5)=0 \\ S2(0.5)=1 \end{cases}$$

Решаем эти системы методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0.1, все вычисления занесём в таблицу:

i	*x*	*Y0*	*S0*	*Y1*	*S1*	*Y2*	*S2*
0	0.5	0	0	1	0	0	1
1	0.6	-0.0026	-0.056	1.009	0.184	0.091	0.842
2	0.7	-0.012	-0.128	1.036	0.347	0.17	0.747
3	0.8	-0.029	-0.222	1.079	0.502	0.242	0.692
4	0.9	-0.057	-0.342	1.136	0.655	0.31	0.668
5	1	-0.099	-0.495	1.21	0.813	0.376	0.666

Составим систему уравнений относительно параметров c_1 и c_2, учитывая, что $\alpha_1=\beta_2=0$, $\alpha_2=\beta_1=1, \gamma_1=1, \gamma_2=3$. Имеем $\begin{cases} c_2=1 \\ -0.099+c_1\cdot 1.21+c_2\cdot 0.376=3 \end{cases}$

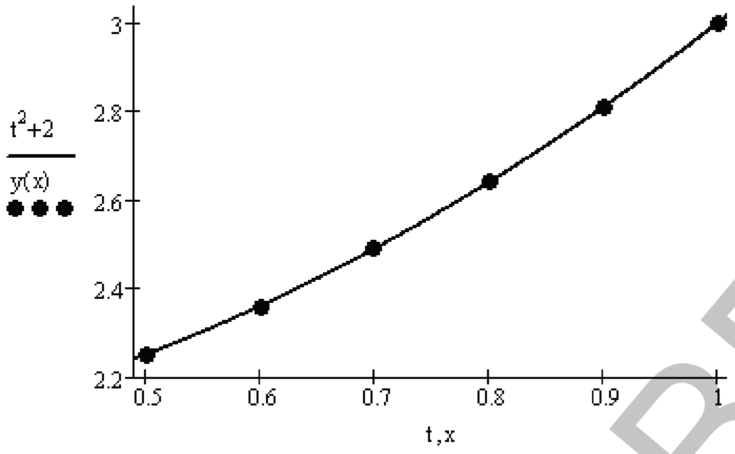
Решаем систему и получаем $c_1=2.25$, $c_2=1$. Строим приближённое решение исходной задачи $u(x)\approx y(x)=Y0(x)+2.25\cdot Y1(x)+1\cdot Y2(x)$.

Вычисляем значение приближенного решения в точках построенной сетки. Точное решение исходной задачи $u(x)=x^2+2$

i	*x*	*Y0(x)*	*Y1(x)*	*Y2(x)*	$y(x)$	Точное решение	Относительная. погреш. Δ %
0	0.5	0	1	0	2.25	2.25	0%
1	0.6	-0.0026	1.009	0.091	2.36	2.36	$3.21\cdot 10^{-5}$ %
2	0.7	-0.012	1.036	0.17	2.49	2.49	$5.335\cdot 10^{-5}$ %
3	0.8	-0.029	1.079	0.242	2.64	2.64	$6.682\cdot 10^{-5}$ %
4	0.9	-0.057	1.136	0.31	2.81	2.81	$7.466\cdot 10^{-5}$ %
5	1	-0.099	1.21	0.376	3	3	$7.843\cdot 10^{-5}$ %

Относительная погрешность решения $7.843 \cdot 10^{-5}$ %

Строим график:



Лабораторная работа № 7

Задание:

Найти решения граничных задач с шагом *h=0.1* на отрезке [*a*,*b*], используя метод редукции. Для решения задач Коши использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом *h=0.1*. Оценить погрешность полученного решения.

Вариант	Задание	Точное решение
1	$\begin{cases} y'' + 2y' - \frac{4}{x}y = 1 \\ y'(0.5) = 1.5 \\ y(1) + y'(1) = 4 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$	$y(x) = x^2 + 0.5x$
2	$\begin{cases} y'' - \frac{6x}{3x^2 - 0.5}y' - \frac{1}{x}y = 0.5 - x^2 \\ y'(0.5) = 0.25 \\ 2y(1) + y'(1) = 3.5 \end{cases}$ $a = 0.5 \; b = 1$	$y(x) = x(x^2 - 0.5)$
3	$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = -\frac{2}{x^3} \\ y(0.5) = -2\ln(2) \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$	$y(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
4	$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{x} \\ y'(0.5) = 3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$	$y(x) = \ln(x) + x$

5	$\begin{cases} y'' + 2xy' - y = 2(x^2+1)\cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y(0.5) = 0.5\sin(0.5) \end{cases}$ $a = 0 \;\; b = 0.5$	$y(x) = x\sin(x)$
6	$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x}y' - 2y = -2x^2 \\ y'(0.5) = 1 \\ y(1) + y'(1) = 5 \end{cases}$ $a = 0.5 \;\; b = 1$	$y(x) = x^2 + 2$
7	$\begin{cases} y'' - 2tg(x)y' = -2tg(x) \\ y(0) - 3.5y'(0) = -7 \\ y(1) = 1 + tg(1) \end{cases}$ $a = 0 \;\; b = 1$	$y(x) = x + tg(x)$
8	$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x+1}y' - 2y = -(x+1)^2 \\ y'(0) = 1 \\ 2y(0.5) + 1.5y'(0.5) = 2\cdot 1.5^2 \end{cases}$ $a = 0 \;\; b = 0.5$	$y(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2}$
9	$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{2(x+1)}y' = -\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \\ y(0) - y'(0) = 1 \\ 0.5y(1) + 2y'(1) = 2\cdot\sqrt{2} \end{cases}$ $a = 0 \;\; b = 1$	$y(x) = 2\sqrt{1+x}$
10	$\begin{cases} y'' - x^2y' - \dfrac{2}{x^2}y = 1 \\ y(0.5) - y'(0.5) = 6 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \;\; b = 1$	$y(x) = \dfrac{1}{x}$
11	$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x}y' - xy = -1 \\ y'(0.5) = -4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \;\; b = 1$	$y(x) = \dfrac{1}{x}$
12	$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x}y' = 0 \\ y'(0.5) = 2 \\ y(1) + y'(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \;\; b = 1$	$y(x) = \ln(x)$

П 8. МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть дана краевая задача:

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in [a,b] \tag{1}$$

граничные условия в общем виде выражаются следующим образом:

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \tag{2}$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 \tag{3}$$

где *p(x),q(x),f(x)* - известные функции, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$–заданные постоянные, причем выполняется условие $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$.

Чтобы решить задачу (1)-(3) методом конечных разностей, необходимо выполнить следующее:

1. Заменить область непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек, т.е. на отрезке [*a,b*] строится сетка $\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$, где x_i – узлы сетки ω_h, *i*=0,1,…,n; точки x_0 и x_n - это граничные узлы сетки ω_h, все остальные узлы называются внутренними. Величина $h_i = x_{i+1} - x_i$ *i*=0,1,…,n-1 называется шагом сетки ω_h. Количество и расположение узлов сетки выбирается в зависимости от требуемой точности решения задачи, в частном случае сетка выбирается равномерной, т.е. $x_i = a + ih, \quad i = 0,1,...,n$ и шаг сетки в этом случае выбирается как *h=(b-a)/n*.
2. Заменить (аппроксимировать на сетке) дифференциальное уравнение (1) и граничные условия (2)-(3) разностными уравнениями. Для этого
   - в каждом узле сетки $x_i \quad i = 0,1,...,n$ определяем сеточную функцию для аппроксимации искомого решения $y_i = y(x_i) \approx u(x_i) \quad i = 0,1,...,n$.
   - заменяем значения производной отношением конечных разностей
   $$u'(x_i) = u_{\overset{0}{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + R_i \tag{4}$$
   $$u''(x_i) = u_{\bar{x}x,i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + R_i \tag{5}$$
   - переходим от непрерывного дифференциального уравнения относительно функции *u=u(x)* к разностной задаче относительно сеточной функции $y_i = y(x_i) \quad i = 0,1,...,n$.
   - в итоге граничная задача (1)-(3) заменяется системой алгебраических уравнений относительно сеточной функции $y_i = y(x_i) \quad i = 0,1,...,n$; Эта система алгебраических уравнений называется разностной схемой.
3. необходимо решить систему алгебраических уравнений относительно сеточной функции $y_i = y(x_i) \quad i = 0,1,...,n$ и тем самым найти таблицу ее значений. Полученные значения этой сеточной функции являются приближенным решением исходной краевой задачи.

Аппроксимируем исходное уравнение граничной задачи (1)-(3) на сетке $\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ разностной системой:

$$y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\right) + y_i\left(\frac{-2}{h^2} + q(x_i)\right) + y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\right) = f(x_i) + R_i \tag{6}$$

или

$$a_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i y_{i-1} = h^2 f(x_i) + R_i \qquad i = 1,2,...,n-1 \qquad (7),$$

где $a_i = 1 + \frac{h}{2} p(x_i)$, $b_i = h^2 q(x_i) - 2$, $c_i = 1 - \frac{h}{2} p(x_i)$

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для граничных условий (2)-(3). Заменим производные первого порядка левой $y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} + R_0$ и правой $y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + R_n$ разностными аппроксимациями, приведем подобные и получим

$$\left(\alpha_1 - \frac{\beta_1}{h}\right) y_0 + \frac{\beta_1}{h} y_1 = \gamma_1 + R_0 \quad \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{h}\right) y_n - \frac{\beta_2}{h} y_{n-1} = \gamma_2 + R_n \qquad (8)$$

Здесь $R_0 = O(h)$, $R_n = O(h)$, $R_i = O(h^2)$ $\quad i = 1,2,\ldots,n-1$. При достаточно малых h можем отбросить погрешность аппроксимации R_i, i=0,1,2,…,n.

Т.о. разностная схема для исходной задачи(1)-(3) будет иметь следующий вид:

$$a_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i y_{i-1} = h^2 f(x_i) \qquad i = 1,2,...,n-1$$

$$\left(\alpha_1 - \frac{\beta_1}{h}\right) y_0 + \frac{\beta_1}{h} y_1 = \gamma_1 \qquad \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{h}\right) y_n - \frac{\beta_2}{h} y_{n-1} = \gamma_2 \qquad (9)$$

где $a_i = 1 + \frac{h}{2} p(x_i)$, $b_i = h^2 q(x_i) - 2$, $c_i = 1 - \frac{h}{2} p(x_i)$

Решать полученную систему алгебраических уравнений (9) следует методом прогонки.

Пример. Найти методом сеток решение граничной задачи

$$\begin{cases} u'' + u' - \frac{1}{x} u = 2x + 4 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 3 \end{cases} \qquad a = 0 \quad b = 1$$

с шагом h=0.1. Оценить погрешность полученного решения, зная точное решение задачи $u(x) = 2x^2 + x$. Оба решения отобразить графически.

Имеем

$$p(x) = 1, \quad q(x) = -\frac{1}{x}, \quad f(x) = 2x + 4$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 3$$

Построим сетку с требуемым шагом, в узлах которой введём необходимые сеточные функции. Для аппроксимации искомого решения вводим функцию $y_i = y(x_i) \approx u(x_i)$ $\; i = 0,1,\ldots,n$, для функций *p(x), q(x), f(x)* воспользуемся их точным значением в узлах, т.е. имеем сеточные функции $f_i = f(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ *i=0,1,2,…,n.*

Замену первой и второй производных в уравнении проведем на основании формул (4)-(5). Сеточные функции и аппроксимирующие выражения подставим в исходное уравнение для всех внутренних точек.

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-\frac{1}{x_i}y_i=2x_i+4,\quad i=1,2,...,9$$

Так как в граничной задаче представлены краевые условия первого рода, то их аппроксимация производится точно:

$y_0=0$

$y_{10}=3$

В результате получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)y_{i-1}+\left(-\frac{2}{h^2}-\frac{1}{x_i}\right)y_i+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)y_{i+1}=2x_i+4,\quad i=1,2,...,9$$

Учтем, что шаг сетки h=0.1 и всякий узел сетки $x_i=0.1i$. Окончательно имеем систему

$$95y_{i-1}+(-201-\frac{1}{0.1i})y_i+105y_{i+1}=0.2i+4,\quad i=1,2,...,9$$

$y_0=0$

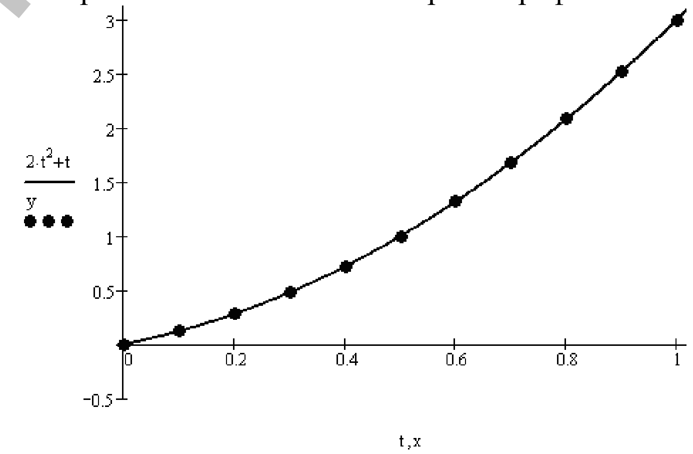
$y_{10}=3$

Данную систему решаем методом прогонки, получим приближенное решение задачи.

Занесём вычисленные значения в таблицу:

i	x_i	y_i	$u(x_i)=2x_i^2+x_i$
0	0	0	0
1	0.1	0.12	0.12
2	0.2	0.28	0.28
3	0.3	0.48	0.48
4	0.4	0.72	0.72
5	0.5	1	1
6	0.6	1.32	1.32
7	0.7	1.68	1.68
8	0.8	2.08	2.08
9	0.9	2.52	2.52
10	1	3	3

Сравним полученное решение с точным и построим график



Относительная погрешность решения с точностью до двух знаков после запятой составляет 0%.

Лабораторная работа № 8

Задание:

Найти решения граничных задач на отрезке [a,b] с шагом *h*=0.1, используя метод сеток. Оценить погрешность полученного решения, зная точное решение задачи. Оба решения отобразить графически.

Вариант	**Задание**	**Точное решение**
1	$\begin{cases} y'' - y'(1+x) - y = \dfrac{2}{(1+x)^3} \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = \dfrac{1}{1+x}$
2	$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x-2}y' + (x-2)y = 1 \\ y(0) = -0.5 \\ y(1) = -1 \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = \dfrac{1}{x-2}$
3	$\begin{cases} y'' + \dfrac{4x}{x^2+1}y' - \dfrac{1}{x^2+1}y = \dfrac{-3}{(x^2+1)^2} \\ y'(0) = 0 \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4	$\begin{cases} y'' - (x+1)y' - y = \dfrac{x^2+2x+2}{1+x} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1.38294 \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = (x+1)\ln(x+1)$
5	$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -3e^{-x} \\ y'(0) = 0 \\ y(1) + 2y'(1) = 0 \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = (x+1)e^{-x}$
6	$\begin{cases} y'' - 2y' - y = -2xe^{x} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = xe^{x}$

7	$\begin{cases} y'' - (1+x^2)y' - 2xy = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \\ y(0) - 2y'(0) = 1 \\ y(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
8	$\begin{cases} y'' - 0.3^2 y = -0.3^2 x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = e^{0.3}+1 \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = e^{0.3x} + x$
9	$\begin{cases} y'' + \dfrac{1.5}{x+1} y' = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} \\ 3y(0) - y'(0) = 1 \\ y'(1) = \sqrt{2} \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$
10	$\begin{cases} y'' - (x+3)^2 y' - \dfrac{2}{(x+3)^2} y = 3 \\ y(0) - y'(0) = \dfrac{4}{3} \\ y(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = \dfrac{3}{x+3}$
11	$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{2(x+2)} y' - y = -\sqrt{x+2} \\ y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$ $a=0 \quad b=1$	$y(x) = \sqrt{x+2}$
12	$\begin{cases} y'' + \dfrac{3}{2(x+2)} y' - (x+2)y = -2\sqrt{x+2} + 2(x+2) \\ y(0) - 2y'(0) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 2 \\ y'(1) = \dfrac{-1}{\sqrt{27}} \end{cases}$ $a=0, \; b=1$	$y(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} - 2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2004. – 636 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие. – М.: Высшая школа (Высшая математика), 2000. – 190 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
4. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие. – М.: «Высшая школа», 2006. – 480 с.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики: учеб. пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1972. – 585 с.
6. Маркова Л.В. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений: методические рекомендации / Л.В. Маркова, Е.А. Корчевская. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2011. – 50 с.
7. Маркова Л.В. Вычислительные методы алгебры: пособие / Л.В. Маркова, Е.А. Корчевская, А.Н. Красоткина. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – 148 с.
8. Маркова Л.В. MATHCAD 2000: Практика использования: учебно-методическое пособие / Л.В. Маркова, В.А. Свириденко. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2002. – 58 с.
9. Марчук П.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
10. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
12. Сборник задач по методам вычислений: учеб. пособие для студ. учреждений, обеспечивающих получение высш. образования по физико-математическим спец. / под ред. П.И. Монастырного. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 376 с.

Учебное издание

МАРКОВА Людмила Васильевна
КРАСОТКИНА Анна Николаевна

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать .2014. Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 1,55. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.