Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов**

# С Б О Р Н И К ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ А Н А Л И З У

## Интегральное исчисление функции одной переменной

***Методические рекомендации***

*Витебск*
*ВГУ имени П.М. Машерова*
*2014*

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.11я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 5 от 21.04.2014 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.В. Шерегов**

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических
наук *О.В. Храмцов*

**Сурин, Т.Л.**
**С90** Сборник практических заданий по математическому анализу. Интегральное исчисление функции одной переменной : методические рекомендации / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2014. – 51 с.

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика». Методические рекомендации содержат разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, вопросы по теоретическому материалу, задания для аудиторной и домашней работы, задания для самостоятельной работы.

**УДК 517.2(075.8)**
**ББК 22.161.11я73**

## С О Д Е Р Ж А Н И Е

# ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика».

Основное назначение задачника-практикума – помочь студентам математических специальностей в освоении курса математического анализа. По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце пособия. Однако, из–за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Пособие охватывает вопросы математического анализа, относящиеся к «Интегральному исчислению функции одной переменной». Весь материал разбит на 13 параграфов, что в среднем соответствует количеству часов, предусмотренных учебной программой на проведение практических занятий по данной теме. Каждый параграф состоит из 3 пунктов. В пункте I – «Контрольные вопросы и задания» – содержатся вопросы по теоретическому материалу. Цель этого раздела – помочь студенту самостоятельно разобраться в теоретическом материале, выделить наиболее важные места, без которых невозможно осмысленное решение задач. В пункте II – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. Эти два пункта студенты должны разобрать самостоятельно при подготовке к практическому занятию по данной теме. В пункте III – «Задачи и упражнения для практических занятий» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

В конце практического пособия приведен список задач для индивидуальной работы студентов. Данный список охватывает все разделы пособия и состоит из типичных задач, предлагаемых на экзамене.

Материал, приведенный в пособии, соответствует учебным программам по математическому анализу по вышеперечисленным специальностям.

Пособие может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

# ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $X$.
2. Сформулируйте теорему о первообразных.
3. Приведите пример двух различных первообразных для одной и той же функции.
4. Всякая ли функция имеет первообразную?
5. Дайте определение неопределённого интеграла.
6. Сформулируйте основные свойства неопределённого интеграла.
7. Приведите таблицу основных неопределённых интегралов.

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить интегралы:

$$а)\int\frac{x^3-\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^4}}{x}dx;\quad б)\int 2^x\cdot 3^{2x}dx;\quad в)\int\cos^2\frac{x}{2}dx.$$

***Решение.*** *а)* $$\int\frac{x^3-\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^4}}{x}dx=\int\frac{x^3}{x}dx-\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx-2\int\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x}dx=$$

$$=\int x^2dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx-2\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^3}{3}-2x^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}+C.$$

*б)* $$\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot 9^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C.$$

*в)* $$\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sin x\right)+C.$$

**III.** ***Задачи и упражнения для практических занятий***

Вычислить интегралы:

1. $\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}\right)dx$; 2. $\int\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\,dx$; 3. $\int\left(x^3-1\right)^2dx$;

4. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2dx$; 5. $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$; 6. $\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}{x}dx$;

7. $\int\frac{2\cdot5^x+5\cdot2^x}{2^x}dx$; 8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-5x^2}}$; 9. $\int\frac{dx}{3x^2+12}$;

10. $\int\frac{dx}{5x^2-20}$; 11. $\int\left(2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$;

12. $\int\frac{\cos2x}{\cos^2x\sin^2x}dx$; 13. $\int\mathrm{ctg}^2x\,dx$; 14. $\int\frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$;

15. $\int2^{3\log_2\sqrt{x}}dx$; 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8}}$; 17. $\int\frac{dx}{\sin^2x-\cos^2x}$;

18. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$; 19. $\int x^3(\arcsin x+\arccos x)dx$.

# МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Сформулируйте теорему о замене переменной в неопределённом интеграле.
2. Объясните принцип поднесения функции под знак дифференциала.
3. Запишите формулу интегрирования по частям. Когда эта формула справедлива?
4. Какие функции удобно интегрировать по частям?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример*** **1.** С помощью внесения функции под знак дифференциала вычислить интегралы:

*а*) $\int\frac{xdx}{4+x^2}$; *б*) $\int\frac{dx}{x\ln x}$; *в*) $\int\sqrt{\cos^3x}\sin x\,dx$.

***Решение.*** *а*) $\int \frac{xdx}{4+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2\right)}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(4+x^2\right)}{4+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|4+x^2\right| + C$.

*б*) Так как $\frac{dx}{x} = d\ln x$, то $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C$ .

*в*) $\int \sqrt{\cos^3 x}\sin xdx = -\int \cos^{\frac{3}{2}} xd\left(\cos x\right) =$

$= -\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x + C = -\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C$.

***Пример*** **2.** Применяя метод интегрирования по частям**,** вычислить интегралы: *а*) $\int\left(3x+2\right)\cos 2xdx$; *б*) $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

***Решение.*** *а*) Применим формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (*)$$

Положим $u = 3x+2$, $dv = \cos 2x\ d$. Тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$. Подставив в формулу $(*)$, получим

$$\int\left(3x+2\right)\cos 2xdx = \frac{1}{2}\left(3x+2\right)\sin 2x - \frac{3}{2}\int\sin 2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3x+2\right)\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C.$$

*б*) Для нахождения интеграла $I = \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ положим $u = \sqrt{a^2+x^2}$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$, $v = x$. Подставляя в формулу $(*)$, получим

$$I = \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx +$$

$$+ a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| - I.$$

Отсюда $2I = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$. Следовательно,

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right)+C.$$

### III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найдите интегралы с помощью внесения функции под знак дифференциала:

*а)* $\int\frac{xdx}{9+x^4}$; *б)* $\int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$; *в)* $\int xe^{-2x^2}dx$;

*г)* $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx$; *д)* $\int\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$; *е)* $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$;

*ж)* $\int \operatorname{tg}4x dx$; *з)* $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$; *и)* $\int\left(e^{2x}-4\right)^3e^{2x}dx$;

*к)* $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; *л)* $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$; *м)* $\int\frac{x^2dx}{x^6+4}$.

2. Используя различные подстановки, вычислить интегралы:

*а)* $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; *б)* $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; *в)* $\int x^3\sqrt{x-1}dx$;

*г)* $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$; *д)* $\int e^{\sqrt{x}}dx$; *е)* $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

3. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

*а)* $\int\ln x dx$; *б)* $\int x\ln x dx$; *в)* $\int\left(x^2+2\right)\ln x dx$;

*г)* $\int\frac{\ln x dx}{x^2}$; *д)* $\int x\cos x dx$; *е)* $\int(3x+5)\sin 2x dx$;

*ж)* $\int\left(x^2+2\right)\cos 2x dx$; *з)* $\int\arcsin x dx$; *и)* $\int\operatorname{arctg}x dx$;

*к)* $\int x^2\operatorname{arctg}6x dx$; *л)* $\int(x+5)e^x dx$; *м)* $\int x^2e^x dx$;

*н)* $\int e^x\cos x dx$; *о)* $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$; *п)* $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

### I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте понятие дробно-рациональной функции.
2. Какая дробно-рациональная функция является правильной, а какая неправильной?
3. Почему исследуется вопрос об интегрировании только правильной дроби?

4. На какие простейшие дроби можно разложить многочлен с вещественными коэффициентами?

5. На какие простейшие дроби можно разложить дроби:

*а*) $\dfrac{x}{(x+1)(x+3)}$; *б*) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$; *в*) $\dfrac{2x+3}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}$ ?

6. Каким образом можно найти коэффициенты разложения?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *Вычислить* $I=\int\dfrac{(2x^2+41x-91)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$.

***Решение.*** Так как под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь, то

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x-4)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x-12A+4B-3C}{(x-1)(x+3)(x-4)}.$$

Здесь *A*, *B*, *C* – некоторые постоянные, которые надо определить. Сравнивая в цепочке равенств левую и правую части, получаем

$$2x^2+41x-91=(A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x-12A+4B-3C.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases}A+B+C=2,\\ -A-5B+2C=41,\\ -12A+4B-3C=-91.\end{cases}$$

Решая систему, находим $A = 4$, $B = -7$, $C = 5$. Тогда

$$I=\int\left(\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}\right)dx=$$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=$$

$$=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+2)^7}\right|+C.$$

**Пример 2.** Вычислить $I = \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 2x + 5}$.

**Решение.** Рациональная дробь, стоящая под знаком интеграла, является неправильной, так как степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя. Поэтому, перед разложением дроби на простейшие, надо выделить в ней целую часть. Сделаем это с помощью операции деления многочлена на многочлен. Получим

$$\frac{x^3}{x^2 + 2x + 5} = (x - 2) + \frac{-x + 10}{x^2 + 2x + 5}$$

Теперь находим интеграл

$$I = \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 2x + 5} = \int (x - 2)dx + \int \frac{-x + 10}{x^2 + 2x + 5} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{-(x+1) + 11}{(x+1)^2 + 4} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \int \frac{(x+1)}{(x+1)^2 + 4} dx + 11 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}.$$

Обозначим интегралы в правой части соответственно $I_1$ и $I_2$. В первом интеграле сделаем подстановку $t = x + 1$, тогда $dt = dx$ и

$$I_1 = \int \frac{tdt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C_2 = \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C_2.$$

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{11}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C.$$

Здесь $C = -\frac{1}{2} C_1 + 11 C_2$ – произвольная постоянная.

## III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Записать дроби в виде суммы простых дробей:

*а)* $\frac{x^3 + 5}{(x-1)(x^2+4)}$; *б)* $\frac{1}{(x-1)^3 (x+1)^2}$; *в)* $\frac{11x + 16}{(x-1)(x+2)^2}$;

*г)* $\frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$; *д)* $\frac{1}{x^3 + 1}$.

2. Найти интегралы:

*а*) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$; *б*) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x+2}$; *в*) $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$;

*г*) $\int \frac{x^2-3}{x^2-1}dx$; *д*) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$; *е*) $\int \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}dx$;

*ж*) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; *з*) $\int \frac{dx}{x^5-1}$; *и*) $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$;

*к*) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$; *л*) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$; *м*) $\int \frac{x(x-2)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$;

*н*) $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$; *о*) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. С помощью какой подстановки рационализируется дробно-линейная иррациональность?

2. С помощью каких подстановок можно рационализировать следующие интегралы: *а*) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}dx$; *б*) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}+2}dx$; *в*) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$; *г*) $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$?

3. Какого типа интегралы вычисляются с помощью подстановок Эйлера?

4. С помощью каких тригонометрических подстановок вычисляются интегралы: *а*) $\int \sqrt{1-x^2}dx$; б) $\int \sqrt{x^2-4}dx$; *в*) $\int \sqrt{2+x^2}dx$; *г*) $\int \sqrt{x^2+2x+2}dx$; *д*) $\int \sqrt{2+2x-x^2}dx$?

5. Какое выражение называется биноминальным дифференциалом?

6. В каком случае рационализируется интеграл от биноминального дифференциала? Какие подстановки Чебышева при этом применяются?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить $I = \int \frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)dx}{\sqrt[6]{(x+1)^5}\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}$.

***Решение.*** Наименьшее общее кратное чисел 2,3 и 6 равно 6. Поэтому полагаем $z = \sqrt[6]{x+1}$.

Отсюда $x+1 = z^6$ и $dx = 6z^5 dz$. Таким образом,

$$I = \int \frac{1-z^3}{z^5\left(1+z^2\right)} 6z^5 dz \; = \; 6\int \frac{1-z^3}{z^2+1} dz .$$

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Выделим её целую часть: $\dfrac{1-z^3}{z^2+1} = -z + \dfrac{z+1}{z^2+1}$. Следовательно,

$$I = 6\int\left(-z + \frac{z+1}{z^2+1}\right)dz = -6\int z dz + 6\int \frac{z+1}{z^2+1} dz =$$

$$= -3z^2 + 3\int \frac{2zdz}{z^2+1} + 6\int \frac{dz}{z^2+1} = -3z^2 + 3\int \frac{d\left(z^2+1\right)}{z^2+1} + 6\mathrm{arctg} z =$$

$$= -3z^2 + 3\ln(z^2+1) + 6\,\mathrm{arctg}\, z + C =$$

$$== -3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1) + 6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C .$$

***Пример* 2.** Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

***Решение.*** Воспользуемся подстановками Эйлера. Здесь $a < 0,\; c > 0$, поэтому используем подстановку $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$.

Отсюда выражаем переменную *x*: $x = \dfrac{2t+1}{t^2+1}$. Следовательно,

$$dx = d\left(\frac{2t+1}{t^2+1}\right) = \left(\frac{2t+1}{t^2+1}\right)' dt \quad = \frac{2\left(t^2+1\right) - 2t\left(2t+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} dt = -2\frac{t^2+t-1}{\left(t^2+1\right)^2} dt ,$$

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1 = t\frac{2t+1}{t^2+1} - 1 = \frac{2t^2+t-t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1} .$$

В результате получаем

$$I = \int \frac{-2\dfrac{t^2+t-1}{\left(t^2+1\right)^2} dt}{\left(1+\dfrac{2t+1}{t^2+1}\right)\dfrac{t^2+t-1}{t^2+1}} = -2\int \frac{dt}{1+\left(t+1\right)^2} = -2arctg\,(t+1) + C =$$

$$= -2arctg\,\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}+x}{x} + C .$$

***Пример* 3.** Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

***Решение.*** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} dx$. Это интеграл от биноминального дифференциала. Сделаем подстановку $1+x^{-4}=z^4$. Получаем $z=\left(1+x^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}$, $x=\left(z^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}$, $dx=-z^3\left(z^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dz$.

Значит $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{z^2dz}{z^4-1} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dz}{z^2-1}+\int \frac{dz}{z^2+1}\right)=$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

## **III.** *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти интегралы:

*а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; *б)* $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; *в)* $\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$;

*г)* $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$; *д)* $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; *е)* $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$.

2. Применяя различные подстановки, вычислить интегралы:

*а)* $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; *б)* $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$; *в)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$;

*г)* $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$; *д)* $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$; *е)* $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

3. Вычислить интегралы с помощью выделения полного квадрата:

*а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; *б)* $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-13}}$;

*в)* $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$; *г)* $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$.

4. Вычислить интегралы от биноминальных дифференциалов:

*а)* $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+5}}$; *в)* $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

*г*) $\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}dx$;  *д*) $\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$;  *е*) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}dx$.

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Приведите примеры выражений $R(\sin x, \cos x)$.

2. Пусть дан интеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in N$. С помощью какой подстановки рационализируется данный интеграл, если:

*а*) $n = 2k-1, k \in N$;  *б*) $m = 2k-1, k \in N$;

*в*) $m = 2k, n = 2s; k, s \in N$ ?

3. Какую подстановку необходимо сделать, чтобы рационализировать $\int R(\sin x, \cos x)dx$, если:

*а*) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

*б*) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

*в*) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$?

4. Что такое универсальная тригонометрическая подстановка и когда она применяется?

5. Каким образом можно вычислить интегралы:

*а*) $\int (\cos kx \cos mx)dx$; *б*) $\int (\sin kx \sin mx)dx$; *в*) $\int (\cos kx \sin mx)dx$?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить $I = \int \sin^3 x \cos^{10} x dx$.

***Решение.*** Если в подынтегральную функцию вместо $\sin x$ подставить $-\sin x$, то она изменит знак на противоположный. Поэтому воспользуемся подстановкой $z = \cos x$.

Отсюда $dz = -\sin x dx$ и $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-z^2$.

Следовательно,

$$I = -\int (1-z^2)z^{10}dz = -\int z^{10}dz + \int z^{12}dz = -\frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{13}}{13} + C =$$

$$= -\frac{\cos^{11} x}{11} + \frac{\cos^{13} x}{13} + C.$$

***Пример* 2.** Вычислить $\int \frac{dx}{8\cos^2 x + 2\sin^2 x}$.

***Решение.*** Разделив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $\cos^2 x$, получим $I = \int \dfrac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{8 + 2\operatorname{tg}^2 x}$.

Так как при изменении знаков у функций $\sin x$ и $\cos x$ подынтегральное выражение не меняет знак, применим подстановку $z = \operatorname{tg} x$. Отсюда $dz = d\operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Тогда

$$I = \int \frac{dz}{8 + 2z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{z}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + C.$$

***Пример* 3.** Вычислить $I = \int \dfrac{dx}{\sin x + \cos x}$.

***Решение.*** Положим $z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} z$, $dx = \dfrac{2dz}{1 + z^2}$.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 + z^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},$$

Значит

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{\frac{2z}{1 + z^2} + \frac{1 - z^2}{1 + z^2}} = 2\int \frac{dz}{1 + 2z - z^2} = 2\int \frac{dz}{2 - (1 - z)^2} =$$

$$= -2\int \frac{d(1 - z)}{2 - (1 - z)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1 - z - \sqrt{2}}{1 - z + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1 - \sqrt{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \sqrt{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

## III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти интегралы:

*а*) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$; *б*) $\int \cos^2 x \sin x dx$; *в*) $\int \cos^3 x \sin^3 x dx$;

*г*) $\int \sin^4 x dx$; *д*) $\int \cos^4 x dx$; *е*) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

*ж*) $\int \sin 3x \cos 2x dx$; *з*) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; *и*) $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$;

*к*) $\int \sqrt[4]{\cos^3 x} \sin^3 x dx$; *л*) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$; *м*) $\int \dfrac{dx}{3 + 5\cos x}$;

*н*) $\int \cos 5x \cos x dx$; *о*) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; *р*) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x}$;

*п*) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

# ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Что такое разбиение отрезка $[a; b]$?
2. Разбить отрезок $[1; 3]$: *а*) на 10 равных частей; *б*) на $n$ равных частей; записать частичный отрезок разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ и найти его длину.
3. Составить интегральную сумму для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[1; 3]$, разбив его на $n$ равных частей.
4. Дать понятие определённого интеграла.
5. Всякая ли ограниченная функция является интегрируемой?
6. Что такое верхняя и нижняя суммы Дарбу?
7. Сформулируйте необходимое и достаточное условие интегрируемости.
8. Перечислите классы интегрируемых функций.
9. Перечислите свойства интегрируемых функций и свойства определённых интегралов.

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Для функции $f(x) = 1 + 2x$, заданной на отрезке $[-1; 3]$, найти нижнюю $s_T$ и верхнюю $S_T$ суммы Дарбу, разбив его на $n$ равных отрезков. Написать интегральную сумму для данной функции, выбрав значения аргумента $\xi_i$ в середине отрезков. Сравнить полученные значения.

***Решение.*** Разобьём отрезок $[-1; 3]$ на $n$ равных частей. Тогда длина частичного отрезка разбиения $\Delta x_i = \frac{3-(-1)}{n} = \frac{4}{n}$. На каждом частичном отрезке разбиения $\left[-1+\frac{4(i-1)}{n}; -1+\frac{4i}{n}\right]$ функция непрерывна и монотонно возрастает, значит

$$m_i = 1 + 2\left(-1 + \frac{4(i-1)}{n}\right) = -1 + \frac{8(i-1)}{n},$$

$$M_i = 1 + 2\left(-1 + \frac{4i}{n}\right) = -1 + \frac{8i}{n}.$$

Тогда

$$s_T = \sum_{i=1}^{n}\left(-1 + \frac{8(i-1)}{n}\right)\frac{4}{n} = \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1) + \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) =$$

$$= \frac{4}{n}\left(-n + \frac{8}{n}\frac{(n-1)n}{2}\right) = -4 + \frac{16(n-1)}{n} = 12 - \frac{16}{n}.$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}\left(-1 + \frac{8i}{n}\right)\frac{4}{n} = \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1) + \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) =$$

$$= \frac{4}{n}\left(-n + \frac{8}{n}\frac{(n+1)n}{2}\right) = 12 + \frac{16}{n}.$$

Возьмём точки $\xi_i$ в серединах промежутков разбиения:

$$\xi_i = \frac{-1 + \frac{4(i-1)}{n} + \left(-1 + \frac{4i}{n}\right)}{2} = -1 + \frac{4\left(i - \frac{1}{2}\right)}{n} = -1 + \frac{4i-2}{n}.$$

$$f(\xi_i) = 1 + 2\left(-1 + \frac{4i-2}{n}\right) = -1 + \frac{8i-4}{n}.$$

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n}\left(-1 + \frac{8i-4}{n}\right)\frac{4}{n} = \frac{4}{n}\left(-n + \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right) =$$

$$= \frac{4}{n}\left(-n + \frac{8}{n}\frac{(n+1)n}{2} - \frac{4}{n}n\right) = 12 + \frac{16}{n} - \frac{16}{n} = 12.$$

Сравниваем $\sigma_T$, $s_T$ и $S_T$: так как $12 - \frac{16}{n} < 12 < 12 + \frac{16}{n}$, то $s_T < \sigma_T < S_T$.

***Пример* 2.** Найти интеграл $\int_0^2 (x^2+1)dx$ с помощью интегральных сумм.

***Решение.*** Функция $f(x) = x^2 + 1$ непрерывна на отрезке $[0; 2]$ и, следовательно, интегрируема на этом отрезке. Поэтому для выражения предела интегральных сумм $\sigma_T$ при $\lambda \to 0$ можно взять любую последовательность разбиений $T_n$ отрезка $[0; 2]$ на части, такую, чтобы $\lambda_n \to 0$. Разделим отрезок $[0;2]$ на $n$ равных частей, а в качестве точек $\xi_i$ выберем правые концы отрезков $[x_{i-1};x_i]$, $(i=\overline{1,n})$. Тогда $\Delta x_i = \frac{2}{n}$, $x_i = \frac{2i}{n}$. $\xi_i = x_i = \frac{2i}{n}$, $f(\xi_i) = \frac{4i^2}{n^2}+1$.

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}+1\right)\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right) = \frac{2}{n}\left(n+\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$

$$= 2+\frac{4}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

$$\int_0^2 (x^2+1)dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_T = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) = 2+\frac{8}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

***Замечание.*** При вычислении суммы мы воспользовались формулой $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

***Пример*** **3.** Выяснить**,** какой из интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$ больше.

***Решение.*** Поскольку на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функции $\sin^7 x$ и $\sin^3 x$ непрерывны, а на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\sin^7 x < \sin^3 x$, то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

***Пример*** **4.** Найти среднее значение функции $f(x) = x^2+1$ на отрезке $[0;2]$.

***Решение.*** По интегральной теореме о среднем $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Воспользовавшись значением интеграла $\int_0^2 (x^2+1)dx = 4\frac{2}{3}$, найденным в примере 2, получаем $\mu = \frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;2]$, то она принимает это значение, т.е. найденная точка $\xi \in [0;2]$ такая, что $f(\xi) = 2\frac{1}{3}$.

$$\xi^2+1=2\frac{1}{3},\qquad \xi^2=\frac{41}{3},\qquad \xi=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

### III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$, найти нижнюю $s_T$ и верхнюю $S_T$ суммы Дарбу, разбив отрезок на $n$ равных частей. Для данного разбиения отрезка $[a;b]$ составить интегральную сумму $\sigma_T$, взяв точки $\xi_i$ в серединах промежутков разбиения:

*а*) $f(x)=x-3, a=1, b=2;$ *б*) $f(x)=2x^2, a=0, b=1;$

*в*) $f(x)=2x+5, a=-2, b=1;$ *г*) $f(x)=e^x, a=0, b=3.$

2. Вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с помощью интегральных сумм:

*а*) $\int\limits_a^b cxdx;$ *б*) $\int\limits_a^b (cx+k)dx;$ *в*) $\int\limits_a^b cx^2dx;$

*г*) $\int\limits_a^b e^x dx;$ *д*) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$

(интервал интегрирования делить на части так, чтобы абсциссы точек деления образовывали геометрическую прогрессию).

3. Используя формулы, полученные в задании 2, и, опираясь на простейшие свойства определённого интеграла, вычислить интегралы:

*а*) $\int\limits_{-1}^{3}(2x+8)dx;$ *б*) $\int\limits_{-2}^{0}(3x^2+5)dx;$

*в*) $\int\limits_{3}^{5}(e^x+3x)dx;$ *г*) $\int\limits_{-1}^{1}(3e^x+5x^2)dx.$

4. Пользуясь результатами задания 2, найти средние значения функций на указанных отрезках:

*а*) $f(x)=2x$ на отрезке $[-1; 3]$;

*б*) $f(x)=x^2$ на отрезке $[0; 3]$;

*в*) $f(x)=3x^2+2x-5$ на отрезке $[-1; 2]$;

*г*) $f(x)=e^x+4x$ на отрезке $[0; 1]$.

5. Не вычисляя интегралов, установить, какой из них больше:

*а*) $\int\limits_0^1 xdx$ или $\int\limits_0^1 x^2dx;$ *б*) $\int\limits_0^1 x^2dx$ или $\int\limits_0^1 x^3dx;$

*в)* $\int\limits_0^1 e^x dx$ или $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$; *г)* $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

*д)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ или $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

6. Дать оценку интегралов:

*а)* $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx$; *б)* $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x dx$;

*в)* $\int\limits_{1.5}^{3.5} \frac{x^2 dx}{x-1}$; *г)* $\int\limits_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$.

# ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Пусть $F(x) = \int\limits_0^x f(t) dt$. При каких условиях функция $F(x)$ а) непрерывна; б) дифференцируема?

2. Если функция $F(x)$ дифференцируема, то чему равна её производная $F'(x)$?

3. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. В каком случае у этой функции существует первообразная? Запишите вид одной из первообразных.

4. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

5. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу $I = \int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^4}$?

6. Можно ли при вычислении интеграла $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ в качестве первообразной функции $F(x)$ брать $F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить интеграл $I = \int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

***Решение.*** Одной из первообразных функции $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ на отрезке $[e;e^2]$ является функция $F(x)=\ln\ln x$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_e^{e^2}=\ln\ln e^2-\ln\ln e=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

***Пример* 2.** Вычислить интеграл $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$.

***Решение.*** Имеем: $\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2\sin^2 x}=\sqrt{2}|\sin x|$. Поэтому

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx-\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=\sqrt{2}(-(\cos\pi-\cos 0)+(\cos 2\pi-\cos\pi))=$$

$$=\sqrt{2}(-(-1-1)+(1-(-1)))=4\sqrt{2}.$$

***Пример* 3.** Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу $\int_0^{\pi}\dfrac{dx}{\cos^2 x}$?

***Решение.*** Если применить формулу Ньютона-Лейбница, то получим: $\int_0^{\pi}\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\Big|_0^{\pi}=\operatorname{tg}\pi-\operatorname{tg}0=0$.

Это неверный результат, так как подынтегральная функция положительная и, по свойствам интеграла, $\int_0^{\pi}\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ должен быть положительным.

В данном случае подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x_0=\dfrac{\pi}{2}\in[0;\pi]$. Следовательно, на этом промежутке применять формулу Ньютона-Лейбница нельзя.

### III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти интегралы:

*а*) $\int_1^2(x^2-2x+5)dx$; *б*) $\int_0^8(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$; *в*) $\int_1^9\dfrac{2-y}{y^3}dy$;

*г*) $\int_1^5\sqrt{x-1}dx$; *д*) $\int_1^6\dfrac{dx}{\sqrt{10-x}}$; *е*) $\int_2^3\dfrac{dx}{x^2-1}$;

*ж*) $\int\limits_0^1 \frac{(3x+5)dx}{x^2+2x-3}$; *з*) $\int\limits_{-1}^0 \frac{y^3dy}{y+3}$; *и*) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x+2}$;

*к*) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x+2}$; *л*) $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{x^8+1}$; *м*) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

*н*) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$; *о*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 xdx$; *п*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$;

*р*) $\int\limits_1^2 \frac{e^x dx}{e^x-1}$; *с*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, xdx$; *т*) $\int\limits_2^3 \frac{(2x^4-5x^2+3)dx}{x^2-1}$.

2. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к следующим интегралам:

*а*) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; *б*) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(2+tg^2x)}$; *в*) $\int\limits_{-1}^1 \left(\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\right)' xdx$?

# ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Сформулируйте теорему о замене переменной в определённом интеграле.

2. Можно ли при вычислении интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$ воспользоваться подстановкой $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$?

3. Можно ли вычислить $\int\limits_0^2 x\sqrt[3]{1+x^2}dx$ с помощью замены переменной $x = \sin t$?

4. С помощью каких подстановок вычисляются интегралы, содержащие: а)дробно-линейные иррациональности; б)квадратичные иррациональности; в)тригонометрические функции? Приведите примеры.

5. Перечислите условия, при выполнении которых допустимо интегрирование по частям в определённом интеграле.

6. Для вычисления каких типов интегралов удобен метод интегрирования по частям?

## II. Примеры решения задач

**Пример 1.** Найти интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

**Решение.** Применим подстановку $x = a\sin t$.

Такая замена переменной законна. Действительно:

1) функция $x=\varphi(t)=a\sin t$ непрерывна на всей числовой оси;

2) когда новая переменная $t$ изменяется на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, значения старой переменной $x=a\sin t$ пробегают отрезок $[0;a]$;

3) $\varphi(0)=0,\ \varphi(\dfrac{\pi}{2})=a$;

4) Производная $\varphi'(t)=a\cos t$ непрерывна на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Выполнены все условия теоремы о замене переменной интегрирования в определённом интеграле. Итак

$$x=a\sin t,\ dx=a\cos t,\ \varphi(0)=0,\ \ \varphi(\frac{\pi}{2})=a,\ \text{ т.е. } \alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a|\cos t|$$

$$\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}a|\cos t|a\cos t dt=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

***Пример* 2.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x\arcsin x dx$.

***Решение.*** Пусть $u=\arcsin x$, тогда $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $dv=xdx$, $v=\dfrac{x^2}{2}$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_0^1 x\arcsin x dx=\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{((1-x^2)-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin x\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

***Пример* 3.** Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.

***Решение.*** Пусть $I=\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$. Положим $u=e^x$, тогда $du=e^x dx,\ dv=\cos x dx,\ v=\sin x$. Следовательно,

$$I=e^x \sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x \sin x dx=\left|\begin{array}{c} u=e^x, du=e^x dx \\ dv=\sin x dx \\ v=-\cos x \end{array}\right|=$$

$$=-\left(-e^x \cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^x \cos x dx\right)=-(e^{\pi}+1)-I.$$

Тогда $2I=-(e^{\pi}+1)$. $I=\frac{-(e^{\pi}+1)}{2}$.

**III.** ***Задачи и упражнения для практических занятий***

1. Найти интегралы:

*а)* $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; *б)* $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$; *в)* $\int_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

*г)* $\int_0^9 x\sqrt{x^2+19}dx$; *д)* $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$; *е)* $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$;

*ж)* $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$; *з)* $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; *и)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$;

*к)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$; *л)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+\cos x}$; *м)* $\int_0^1 x e^{x^2} dx$;

*н)* $\int_1^4 \frac{(2x+1)dx}{x^2+4x+12}$.

2. Найти интегралы:

*а)* $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$; *б)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$; *в)* $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$;

*г)* $\int_0^1 \arcsin x dx$; *д)* $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$; *е)* $\int_0^3 \ln(x+3)dx$;

*ж)* $\int_0^{\pi} e^x \sin 2x dx$.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Какая линия называется спрямляемой?
2. Что называется длиной дуги?
3. Приведите примеры спрямляемых кривых.
4. По каким формулам вычисляется длина кривой: а) заданной параметрически, б) в декартовых координатах, в) в полярных координатах?
5. Чему равен дифференциал длины дуги?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти длину дуги кривой $y=\sqrt{2x-x^2}-1$, $\frac{1}{4}\le x\le 1$.

***Решение.*** Воспользуемся формулой: $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$.

Имеем $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $\quad 1+\left(y'\right)^2=1+\dfrac{(1-x)^2}{2x-x^2}=\dfrac{1}{2x-x^2}$.

Искомая длина равна

$$l=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\arcsin(x-1)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=$$

$$=0+\arcsin\frac{3}{4}=\arcsin\frac{3}{4}.$$

***Пример* 2.** Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t, \end{cases}$ от $t=0$ до $t=\dfrac{\pi}{2}$.

***Решение.*** Кривая задана параметрическими уравнениями. Для вычисления длины кривой воспользуемся формулой

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

$$x'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),$$

$$y'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t).$$

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2=e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2=$$

$$=e^{2t}(2\sin^2 t+2\cos^2 t)=2e^{2t}.$$

Тогда $l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2e^{2t}}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^t dt=\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1).$

**Пример 3.** Найти длину кривой $r=2(1+\cos\varphi)$, $r\le 1$.

**Решение.** Кривая, заданная уравнением $r=1$, это окружность с центром в начале координат радиуса 1. Нужно найти длину части кривой $r=2(1+\cos\varphi)$, лежащей внутри окружности (рисунок 1).

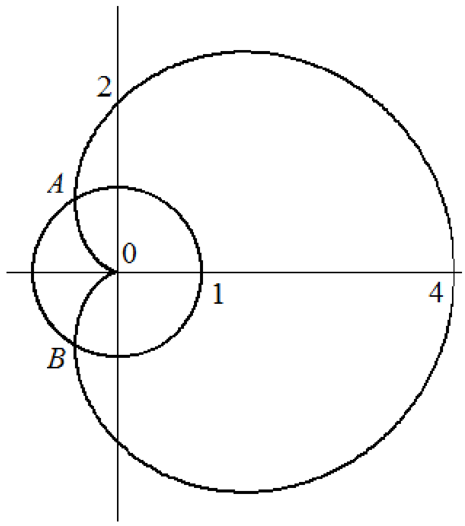


Рис. 1

Найдём точки пересечения этих кривых, решая систему уравнений $\begin{cases} r=2(1+\cos\varphi),\\ r=1. \end{cases}$

Получаем $2(1+\cos\varphi)=1$ или $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$. Следовательно, $\varphi_1=\frac{2\pi}{3}, \varphi_2=\frac{4\pi}{3}.$

Нужно найти длину дуги *AOB.*

Так как данная кривая симметрична относительно луча $\varphi=\pi$, то найдём длину участка *OA* и умножим на 2. Этому участку соответствует изменение $\varphi$ от $\frac{2\pi}{3}$ до $\pi$.

Для вычисления длины кривой воспользуемся формулой

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi.$$

Имеем $r'=-2\sin\varphi$,

$$r^2+r'^2=4(1+\cos\varphi)^2+4\sin^2\varphi=$$

$$=4(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=8(1+\cos\varphi).$$

Получаем

$$l=2\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sqrt{8(1+\cos\varphi)}d\varphi=2\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}4\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=8\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=16\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=16(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3})=16(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=8(2-\sqrt{3}).$$

## III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найдите длину кривой:

*а*) $y = x^2, \quad 0 \le x \le 2;$ *б*) $y = 2x^{\frac{3}{2}}, \ 0 \le x \le 11;$

*в*) $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \ 0 \le x \le 2\sqrt{3};$ *г*) $x^2 = 5y^3, \quad x^2 + y^2 \le 6;$

*д*) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}, \quad -11 \le x \le -3;$ *е*) $y = \ln x, \quad 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6};$

*ж*) $y = \ln \sin x, \ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3};$ *з*) $y = \ln(x^2 - 1), \ 2 \le x \le 5.$

2. Вычислить длину дуги кривой $x = t^2, \quad y = t - \frac{1}{2}t^3$ в пределах от 0 до $\sqrt{3}$.

3. На циклоиде $x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении 1:3.

4. Найти длину астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

5. Найти длину эвольвенты окружности, заданной параметически уравнениями $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

6. Найти длину петли кривой $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\frac{1}{3} - t^2). \end{cases}$

7. Найти длину дуги кривой $x = \sin^4 t, \ y = \cos^2 t, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

8. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi).$

9. Найти длину гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

10. Найти длину логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$ от точки (1; 0) до точки $\left(e^{2\pi a}; 2\pi\right)$.

11. Найти длину линии $r = a\sin\varphi.$

12. Найти длину кривой $r = a(1 - \sin\varphi), \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}.$

13. Найти длину замкнутой кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}.$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Какая плоская фигура называется квадрируемой?
2. Что называется площадью фигуры?
3. Сформулируйте критерий квадрируемости фигуры.
4. Какой должна быть граница плоской фигуры, чтобы фигура была квадрируемой?
5. Докажите, что если $y = f(x)$ – непрерывная неотрицательная функция, заданная на отрезке $[a;b]$, то получившаяся криволинейная трапеция является квадрируемой фигурой.
6. По каким формулам вычисляется площадь плоской фигуры, заданной: а) в декартовых координатах; б) в случае параметрического задания границы; в) в полярных координатах?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 1$ и параболой $y = 1 - x^2$.

***Решение.*** Фигура, ограниченная данными линиями, изображена на рисунке 2.

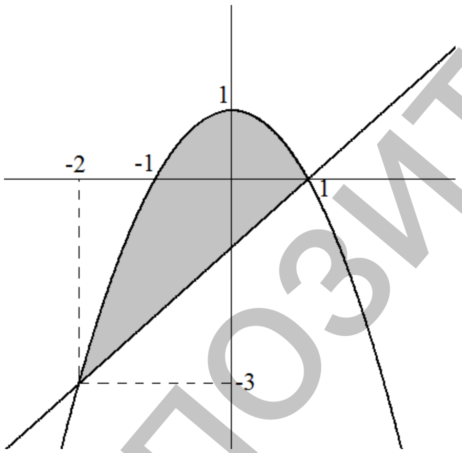


Рис. 2

Найдём абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x - 1, \\ y = 1 - x^2. \end{cases}$

Получаем точки $x_1 = -2$; $x_2 = 1$ – это и будут пределы нтегрирования.

При вычислении площади воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

где $f_2(x) = 1 - x^2$, $f_1(x) = x - 1$.

Искомая площадь равна

$$S = \int_{-2}^{1} ((1 - x^2) - (x - 1))dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx = \left( -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left( \frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{9}{2}.$$

***Пример* 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рисунок 3 ).

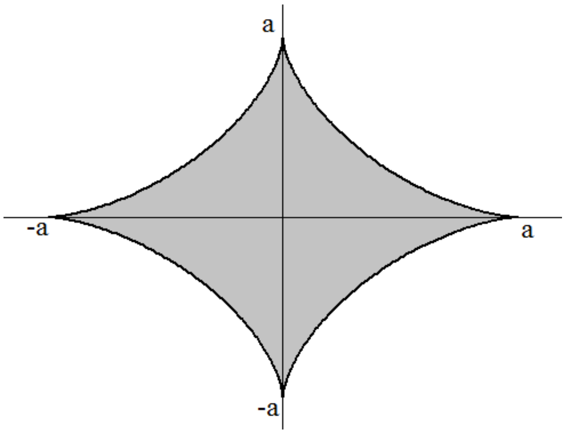


Рис.3

**Решение.** Перейдём к параметрическому заданию границы плоской фигуры:
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Так как фигура симметрична относительно координатных осей, то найдём площадь части фигуры, расположенной в I четверти и умножим на 4.

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически, находится по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt,$$

в нашем случае параметр $t$ изменяется от $t = \frac{\pi}{2}$ до $t = 0$.

Получаем

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)x'(t)dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)dt =$$

$$= -12a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t\cos^2 t dt = -12a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2 2t}{4} \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= -\frac{3}{2}a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin^2 2t - \sin^2 2t\cos 2t)dt = -\frac{3}{2}a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos 4t}{2} dt +$$

$$+\frac{3}{4}a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 2t d(\sin 2t) = -\frac{3}{4}a^2 \left( t - \frac{1}{4}\sin 4t \right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{4}a^2 \sin^3 2t \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

**Пример 3.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

**Решение.** Найдем область определения функции $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ из неравенства $\cos 2\varphi \geq 0$. Отсюда находим, что $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. График линии изображен на рисунке 4.

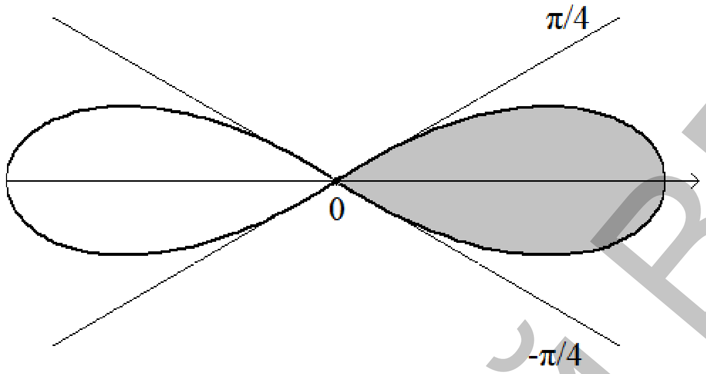


Рис. 4

Вычислим по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$$

площадь одной из двух равных частей фигуры и удвоим результат

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\varphi \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

## III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

*а*) $y = x^2 + 1,\ x + y = 3;$ *б*) $y = 0,\ y = (x+1)^2,\ y = 4 - x;$

*в*) $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0;$ *г*) $y = 2 - x^2,\ y^2 = x^3;$

*д*) $y = x^2,\ x + y = 2;$ *е*) $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \leq x \leq \pi;$

*ж*) $y = 2x - x^2,\ y = x;$ *з*) $2y = x^2,\ x^2 + y^2 = 4y,\ 2y = x^2;$

*и*) $y^2 + x = 4,\ y^2 - 3x = 12;$ *к*) $x^2 + y^2 = 2,\ y^2 = 2x - 1,\ x \geq \frac{1}{2};$

*л*) $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{10}{3} - x,\ x \geq 1.$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке $(3;\ 6)$ и осями координат.

3. Вычислить площадь фигуры, заключённой между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $M(3;5)$ и осью ординат.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x - 3$, касательными к ней в точках $M_1(0;-3)$ и $M_2(3;0)$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:

*а*) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ (эллипс);

*б*) $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$ (кардиоида);

*в*) $x = a(t\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$ (одна арка циклоиды) и отрезком $[0;\ 2\pi a]$ оси абсцисс;

*г*) $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ x = a,$ $y \le 0,$ (развёртка круга).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

*а*) $\rho = a\sin 2\varphi;$ *б*) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида);

*в*) $\rho = 2a\sin 3\varphi;$ *г*) $\rho^2 = 2\sin 2\varphi,\ \rho = 1,\ \rho \ge 1;$

*д*) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2;$ *е*) $\rho = 2\sqrt{3}a\cos\varphi,\ \rho = 2a\sin\varphi;$

*ж*) $\rho = 2 - \cos\varphi,\ \rho = \cos\varphi.$

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ И ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Какое тело называется кубируемым?
2. Что такое объём тела?
3. Приведите примеры кубируемых тел.
4. Сформулируйте критерий кубируемости тела.
5. По каким формулам вычисляется: а) объём тела с известными поперечными сечениями; б) объём тела вращения?
6. Как найти площадь поверхности вращения?

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 3x - 2$.

***Решение.*** Найдём абсциссы точек пересечения кривых, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x - 2. \end{cases}$ Получим точки $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Для вычисления объёма тела вращения воспользуемся формулой

$$V = \pi\int_a^b (f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x))dx.$$

В нашем случае $f_2(x) = 3x - 2, \quad f_1(x) = x^2$.

Имеем

$$V = \pi\int_1^2 ((3x-2)^2 - x^4)dx = \pi\int_1^2 (9x^2 - 12x + 4 - x^4)dx =$$

$$= \pi\left(9\frac{x^3}{3} - 6x^2 + 4x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 = \pi\left(3\cdot 7 - 6\cdot 3 + 4 - \frac{1}{5}\cdot 31\right) = \frac{4}{5}\pi.$$

**Пример 2.** Вычислить объём тела, которое образуется при вращении одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, (рисунок 5) вокруг оси абсцисс.

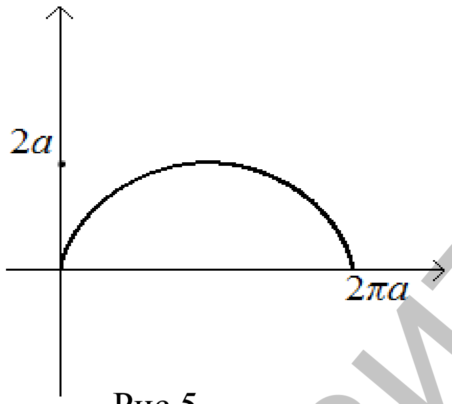

Рис.5

**Решение.**

Объём вычислим по формуле

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx.$$

Сделаем замену переменной, полагая $x = a(t - \sin t)$. Изменению $x$ от 0 до $2\pi a$ соответствует изменение $t$ от 0 до $2\pi$.

$$dx = a(1 - \cos t)dt$$

Получаем

$$V = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3\int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= \pi a^3(t - 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{3\pi a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt - \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + \frac{3}{2}\pi a^3\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \pi a^3\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

**Пример 3.** Вычислить площадь поверхности шара радиуса $R$.

**Решение.** Можно считать, что шар получен вращением вокруг оси $Ox$ полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ .

Для вычисления площади поверхности тела вращения воспользуемся формулой

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Находим

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad 1+\left(y'\right)^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2};$$

$$y(x)\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}=R.$$

Следовательно, $P=2\pi\int\limits_{-R}^{R}Rdx=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2.$

## III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси $Ox$:

*а)* $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0;$

*б)* $\left(y-3\right)^2+3x=0,\ x=-3;$

*в)* $y=x^2+1,\ x_1=-a,\ x_2=a\ (a>0);$

*г)* $y^2=2x,\ x_1=a,\ x_2=b\ (0<a<b);$

*д)* $y=\sin x,\ \ y=0,\ \ 0\le x\le\pi;$

*е)* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};$

*ж)* $y=\frac{9}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),\ x_1=-b,\ x_2=b\ (b>0);$

*з)* $y=x^2,\ x=y^2;$

*и)* $y=-x^2+3,\ y=x^2+1;$

*к)* $x^2+y^2=1,\ y^2=\frac{3}{2}x;$

*л)* $y=\sin x,\ y=\frac{2}{\pi}x.$

2. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси $Oy$:

*а)* $y^2=\left(x+4\right)^2,\ x=0;$

*б)* $x^2+y^{\frac{2}{3}}=1;$

*в)* $y=x(4-x),\ x=0;$

*г)* $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=2;$

*д*) $(x-R)^2+y^2=R^2$;

*е*) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ y=0$ (первая арка);

*ж*) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

3. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси $Ox$ данной кривой:

*а*) $y=\sqrt{x},\ \frac{5}{4}\le x\le\frac{21}{4}$; *б*) $y=x^3,\ 0\le x\le 1$;

*в*) $y^2=4x,\ 0\le x\le 3$; *г*) $y^2=4+x,\ -4\le x\le 2$.

4. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси $Oy$ данной кривой:

*а*) $x=\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right),\ \frac{5}{4}\le y\le\frac{5}{3}$;

*б*) $4x+2\ln y=y^2,\ e^{-1}\le y\le e$;

*в*) $y^2=2(x-1),\ 0\le y\le 1$;

*г*) $3x=4\cos y,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le 0$.

4. Найти площадь поверхности, образованной при вращении кривой L, заданной параметрически, вокруг данной оси:

*а*) $x=\sqrt{2}\sin t,\ \ y=\frac{1}{4}\sin 2t,\ 0\le t\le\pi$ вокруг оси $Ox$; вокруг оси $Oy$;

*б*) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$ вокруг оси $Ox$; вокруг оси $Oy$;

*в*) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$ вокруг оси $Ox$;

*г*) $x=2\sqrt{3}\cos t,\ \ y=\sin 2t$ вокруг оси $Ox$.

# ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ФИЗИКЕ И МЕХАНИКЕ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Каким образом найти работу, совершаемую переменной силой, при перемещении материальной точки вдоль прямолинейного участка?
2. Как найти давление жидкости на пластинку, погружённую вертикально в эту жидкость?
3. Приведите формулы для вычисления статических моментов, моментов инерции, массы и координат центра масс материальной кривой.

4. Сформулируйте первую теорему Гульдена.
5. Приведите формулы для вычисления статических моментов, моментов инерции, массы и координат центра масс плоской фигуры.
6. Сформулируйте вторую теорему Гульдена.

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти величину давления жидкости на полукруг, вертикально погружённый в жидкость, если его радиус равен $R$, а верхний диаметр лежит на свободной поверхности жидкости (рисунок 6), удельный вес жидкости равен $\gamma$.

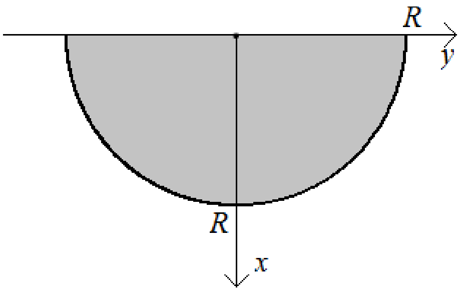


Рис.6

**Решение.** Воспользуемся формулой

$$P = g\int_a^b \gamma x y(x)dx.$$

В силу симметрии полукруга достаточно найти силу давления на одну из четвертей, а затем удвоить результат. Расположим систему координат таким образом, как показано на рисунке 6.

Тогда уравнение окружности, ограничивающей полукруг имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение правой четверти окружности: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$.

По формуле получаем

$$P = 2g\gamma\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\frac{2}{3}g\gamma\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}g\gamma R^3.$$

***Пример* 2.** Фигура ограничена параболой $y = 1 - x^2$ и осью $Ox$. Считая фигуру однородной и $\rho = 1$, найти координаты центра масс фигуры и её момент инерции относительно оси $Oy$.

***Решение.*** Массу фигуры найдём по формуле $m = \int_a^b \rho y(x)dx$.

Получаем $m = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$. Далее:

$$M_y = \int_{-1}^1 xy(x)dx = \int_{-1}^1 x(1 - x^2)dx = 0. \text{ Отсюда } x_c = \frac{M_y}{m} = 0.$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-2x^2+x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{15}.$$

Получаем $y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{2}{5}$.

Момент инерции $I_y$ находим по формуле

$$I_y = \int_a^b x^2 y(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{15}.$$

***Пример* 3.** Найти декартовы координаты центра тяжести кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

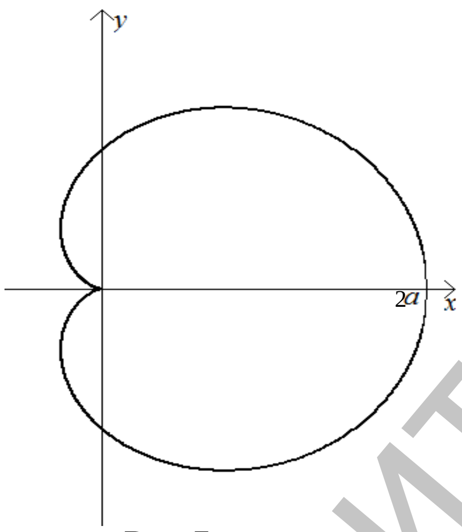


Рис.7

***Решение.*** Выберем оси координат как показано на рисунке 7

Запишем уравнение кардиоиды в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Так как плоская линия однородна, то $\rho = 1$. Тогда $m = l = 8a$ (длина всей кардиоиды). Масса половины кардиоиды равна $4a$. Получаем

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} y(\varphi)dl =$$

$$= \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a\sin\varphi(1+\cos\varphi)dl = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\varphi(1+\cos\varphi)dl.$$

$$dl = \sqrt{\rho^2 - \rho'^2}\,d\varphi = a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

$$x_c = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} 2a\sin\varphi(1+\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{8}{5}a.$$

Аналогично,

$$y_c = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} x\,dl = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\cos\varphi\cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{4}{5}a.$$

$$(x_c; y_c) = \left(\frac{8}{5}a; \frac{4}{5}a\right).$$

***Пример* 4.** Пользуясь второй теоремой Гульдена, найти центр тяжести полукруга радиуса *a*.

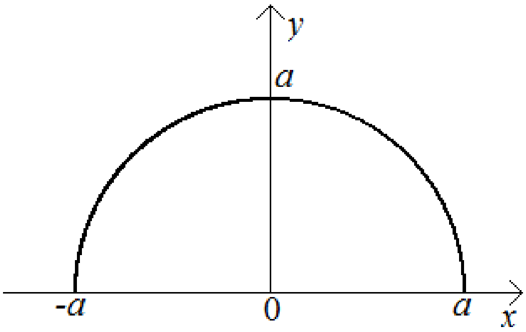


Рис. 8

***Решение.*** Рассмотрим оси координат, как показано на рисунке 8. В силу симметричности фигуры относительно оси *Oy* её центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $x_c = 0$.

Для нахождения $y_c$ применим теорему Гульдена. Тело, получаемое при вращении полукруга вокруг оси *Ox*, есть шар радиуса *a*, его объём равен $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Площадь вращающейся фигуры равна $\frac{1}{2}\pi a^2$. Поэтому, $\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{2}a^2 \cdot 2\pi y_c$, $y_c = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$.

## III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Определить силу давления жидкости на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.
2. Вычислить силу давления жидкости на треугольник, высота которого *h*, и основание *a* см, если он погружен в жидкость таким образом, что основание его лежит на поверхности жидкости, а высота направлена вертикально вниз.
3. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции, верхнее основание которой имеет 70 м в длину, нижнее 50 м, а высота 20 м.
4. Найти статистические моменты $M_x$ и $M_y$ кривой:

*а*) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0;$

*б*) $x^2 + y^2 = a^2,\ y \ge 0;$

*в*) $y^2 = 2x,\ 0 \le x \le 2;$

*г*) $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2},\ a < b;$

*д*) $x = a\sin^3 t,\ y = a\cos^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$

*е*) $r = 2a\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};$

*ж*) $r = a(1+\cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le \pi.$

5. Найти координаты центра масс кривой:

*а*) $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi;$

*б*) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \ge 0,\ y \ge 0;$

*в*) $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi;$

*г*) $r = a(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi.$

6. Найти момент инерции ($I_x$ или $I_y$) кривой:

*а*) $y = e^x,\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2},\ I_x;$

*б*) $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ I_x;$

*в*) $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ I_x$ и $I_y$.

7. Найти статистические моменты и координаты центра масс фигуры, ограниченной кривыми:

*а*) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ a > 0,\ b > 0;$

*б*) $x^2 + y^2 = R^2,\ y \ge 0,\ y = 0;$

*в*) $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi,\ y = 0;$

*г*) $y = x^2,\ y = \sqrt{x};$

*д*) $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ y = 0;$

*е*) $r = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi;$

*ж*) $r = a(1+\cos\varphi).$

8. Найти моменты инерции однородного прямоугольника со сторонами $a$ и $b$ относительно его осей симметрии.

9. Найти момент инерции однородного круга радиуса $R$ относительно его диаметра.

10. Найти момент инерции однородного треугольника с основанием а и высотой h относительно:

*а*) оси, содержащей его основание;

*б*) оси, проходящей через высоту треугольника; опущенную из вершины.

# НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение несобственного интеграла I рода (НИ-I).

2. В каком случае сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?

3. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов от положительных функций.

4. Сформулируйте теорему сравнения в предельной форме.

5. Какой функцией в качестве функции сравнения пользуются при исследовании на сходимость НИ-I?

6. Дайте определение абсолютно и неабсолютно сходящихся несобственных интегралов.

7. Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

8. Дайте определение несобственного интеграла от неограниченной функции (НИ-II).

9. Запишите функцию сравнения для НИ-II в случае, если:

а) $x = b$ – особая точка функции $f(x)$;

б) $x = a$ – особая точка;

в) $x = 0$ – особая точка.

## II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Вычислить интегралы или установить их расходимость: *а*) $\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4}$; *б*) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx$.

***Решение.*** *а*) $\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_3^{b}\frac{dx}{x^2-4}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)\Bigg|_3^b=$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right|-\ln\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\ln 5.$$

$$\text{б)}\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{x+1}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\int\limits_0^{b}\frac{xdx}{x^2+1}+\int\limits_0^{b}\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\mathrm{arctg}\,x\right)\Bigg|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(b^2+1)+\mathrm{arctg}\,b\right)=+\infty,$$

т.е. данный интеграл расходится.

***Пример* 2.** Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+2}{x^2\sqrt{x+5}}dx.$

***Решение.*** Сравним подынтегральную функцию с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)\sqrt{x^3}}{x^2\sqrt{x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)\sqrt{x}}{x\sqrt{x+5}}=1.$$

Из теоремы сравнения в предельной форме вытекает, что исследуемый интеграл и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ одновременно сходятся или расходятся.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ сходится, так как $\alpha=\frac{3}{2}>1$. Следовательно, и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+2}{x^2\sqrt{x+5}}dx$ тоже сходится.

***Пример* 3.** Исследовать на абсолютную сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx.$

***Решение.*** Так как $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$, а $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ сходится, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$ сходится абсолютно.

***Пример* 4.** Вычислить несобственный интеграл $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

***Решение.*** Подынтегральная функция не ограничена в окрестностях точек $x=0$ и $x=1$. Поэтому представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=I_1+I_2.$$

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(2x-1)\Big|_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}(\arcsin 0-\arcsin(2\varepsilon-1))=\frac{\pi}{2}.$$

$$I_2=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(\arcsin(1-2\varepsilon)-\arcsin 0)=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $I=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

***Пример* 6.** Исследовать на сходимость $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

***Решение.*** Сравним данный интеграл с интегралом $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{2}.$$

Интеграл $I_1$ сходится, так как $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, тогда, по теореме сравнения в предельной форме, сходится и интеграл $I$.

### III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

*а)* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$; *б)* $\int\limits_0^{+\infty}\sin 2x dx$; *в)* $\int\limits_1^{+\infty}e^{-5x}dx$;

*г)* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x+x^3}$; *д)* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$; *е)* $\int\limits_3^{+\infty}\frac{2x+5}{x^2+3x-10}dx$;

*ж)* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; *з)* $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; *и)* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

*к)* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; *л)* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+x)}{x}dx$.

2. Исследовать интегралы на сходимость:

*а)* $\int\limits_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$; *б)* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3+5}{x^5-x^2+4}dx$; *в)* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

*г)* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$; *д)* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x+2}dx}{1+3\sqrt{x}+2x+x^2}$;

*е)* $\int\limits_1^{+\infty}x\cos x dx$; *ж)* $\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$; *з)* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы от неограниченных функций:

*а)* $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; *б)* $\int\limits_2^{3}\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$; *в)* $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$;

г) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$; д) $\int_0^{-\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; е) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

ж) $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; з) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

4. Исследовать интегралы на сходимость:

а) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+3\sqrt[3]{x}}$; б) $\int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}dx$; в) $\int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3-3x^2+4}$;

г) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$; е) $\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$.

## Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить неопределенные интегралы, полученные результаты проверить дифференцированием

| Вариант | *а* | *б* |
|---|---|---|
| 1 | $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$ | $\int x\,\mathrm{arctg}3x dx$ |
| 2 | $\int \cos x e^{\sin x}dx$ | $\int x^2 \sin 4x dx$ |
| 3 | $\int \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$ | $\int \ln(x^2+5)dx$ |
| 4 | $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ | $\int x\cos 3x dx$ |
| 5 | $\int x\sqrt{x^2+7}dx$ | $\int x^2 \ln x dx$ |
| 6 | $\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}dx$ | $\int (x-1)\ln x dx$ |
| 7 | $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$ | $\int xe^{3x}dx$ |
| 8 | $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}dx$ | $\int x^2 \arccos x dx$ |
| 9 | $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ | $\int \arcsin 2x dx$ |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | $\int \cos^3 x \sin 2x dx$ | $\int (2x+1)e^{2x} dx$ |
| 11 | $\int e^x \sin(e^x) dx$ | $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ |
| 12 | $\int x e^{x^2} dx$ | $\int e^x \cos 2x dx$ |
| 13 | $\int \frac{x^2}{x^6+4} dx$ | $\int x^2 e^{2x} dx$ |
| 14 | $\int \frac{x}{x^2+2} dx$ | $\int (2x-3)\cos x dx$ |
| 15 | $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+x\cos x}} dx$ | $\int x^2 \ln x dx$ |
| 16 | $\int \frac{\arccos^5 x + 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$ |
| 17 | $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$ | $\int x \sin 3x dx$ |
| 18 | $\int \frac{2\operatorname{arctg}^2 x - 3}{1+x^2} dx$ | $\int (x^2-1)e^{-x} dx$ |
| 19 | $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ |
| 20 | $\int \frac{3+x}{1+x^2} dx$ | $\int e^{3x} \sin x dx$ |

2. Вычислить неопределенные интегралы от заданных функций

| Вариант | *а* | *б* | *в* |
|---|---|---|---|
| 1. | $\frac{x}{(x-1)(x+2)^2}$ | $\frac{\cos 2x}{\sin^4 x}$ | $\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}$ |
| 2. | $\frac{12}{(x-2)(x^2-2x-3)}$ | $\frac{1}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$ | $\frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}$ |
| 3. | $\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}$ | $\cos^2 x \cdot \sin^3 x$ | $\sqrt{256-x^2}$ |
| 4. | $\frac{x^3-1}{4x^3-x}$ | $\operatorname{tg}^5 2x.$ | $x^2\sqrt{1-x^2}$ |
| 5. | $\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}$ | $\sin^2 x \cos^4 x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x-3}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6. | $\frac{1}{(2x+3)^4}$ | $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ | $\frac{(2x+5)}{\sqrt{7+8x-11x^2}}$ |
| 7. | $\frac{2x+3}{(x^2+4)^3}$ | $\sin 3x \cdot \cos 6x$ | $\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$ |
| 8. | $\frac{1}{(3-5x)^4}$ | $\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ | $\sqrt{x^2+2x+1}$ |
| 9. | $\frac{3x+2}{(x^2+2)^5}$ | $\mathrm{ctg}^4 x$ | $\frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ |
| 10. | $\frac{1}{(2-3x)^2}$ | $\sin^4 x \cos^5 x$ | $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}$ |
| 11. | $\frac{33x-4}{(x^2+16)^4}$ | $\frac{1}{\sin^3 x}$ | $\frac{x^4}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$ |
| 12. | $\frac{1}{(5-8x)^3}$ | $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ | $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ |
| 13. | $\frac{5x+3}{(6+x^2)^5}$ | $\mathrm{ctg}^5 x$ | $\frac{1}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$ |
| 14. | $\frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}$ | $\mathrm{tg}^5 x$ | $\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}$ |
| 15. | $\frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$ | $\sin^2 x \cos^3 x$ | $\frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}$ |
| 16. | $\frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}$ | $\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$ | $\frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}$ |
| 17. | $\frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}$ | $\sin^3 x \cos^4 x$ | $\frac{2+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ |
| 18. | $\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ | $\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$ | $\frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}$ |
| 19. | $\frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ | $\frac{1}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$ | $\frac{x}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$ |
| 20. | $\frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}$ | $\mathrm{tg}^4 x$ | $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$ |

3. Найти определенные интегралы

| Вариант | | Вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$ | 11. | $\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}dx$ |
| 2. | $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ | 12. | $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$ |
| 3. | $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ | 13. | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ |
| 4. | $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$ | 14. | $\int_1^{62} \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}$ |
| 5. | $\int_1^2 x\ln x dx$ | 15. | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ |
| 6. | $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ | 16. | $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ |
| 7. | $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$ | 17. | $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ |
| 8. | $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ | 18. | $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$ |
| 9. | $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$ | 19. | $\int_0^1 xe^{-x}dx$ |
| 10. | $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx$ | 20. | $\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 7x dx$ |

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми. Сделать чертеж

| Вариант | | Вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$ | 11. | $x = \cos^4 t, \ y = \sin^4 t,$ <br> $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | $y^2 = 3x, \quad x^2 = 3y$ | 12 | $x = 9\cos t,\ \ y = 4\sin t,$ <br> $y = 2\ \ (y \ge 2), \quad \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{4\pi}{6}$ |
| 3 | $y = 4x - x^2, \quad y = 0$ | 13 | $x = 8\cos^3 t,\ \ y = 8\sin^3 t,$ <br> $x = 1\ \ (x \ge 1), \quad \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{6}$ |
| 4 | $y = \operatorname{arctg} x, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3},$ <br> $x = \sqrt{3}, \qquad y = 0$ | 14 | $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$ <br> $y = 1, \quad (y \ge 1), \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$ |
| 5 | $y = \operatorname{ctg} x; \quad x = \frac{\pi}{6}; \quad x = \frac{5\pi}{6};$ <br> $y = 0$ | 15 | $\rho = \frac{3}{2}\cos\varphi, \ \ \rho = \frac{5}{2}\cos\varphi$ |
| 6 | $y = \frac{1}{2}x^2; \quad 4x - 2y + 5 = 0$ | 16 | $\rho = 4\cos 2\varphi$ |
| 7 | $y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}; \quad x = -1,\ \ x = 1,$ <br> $y = 0$ | 17 | $\rho^2 = a^2 \sin 4\varphi$ |
| 8 | $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$ <br> $0 \le t \le 2\pi$ | 18 | $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$ |
| 9 | $x = 4\,(t - \sin t),$ <br> $y = 4\,(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 4$ | 19 | $\rho = \frac{2}{\sin\varphi}; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ |
| 10 | $x = 2\cos t; \quad y = 6\sin t;$ <br> $y = 3; \quad (y \ge 3); \quad 0 \le t \le \pi$ | 20 | $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ |

5. Вычислить длину дуги. Сделать схематический чертеж кривой

| Вариант | | Вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $x = 5(t - \sin t),$ <br> $y = 5(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le \pi$ | 11. | $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ |
| 2. | $\rho = 5\,(1 - \cos\varphi), \quad -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$ | 12. | $\rho = 1 - \sin\varphi; \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$ <br> . |
| 3. | $x = 3\,(2\cos t - \cos 2t),$ <br> $y = 3(2\sin t - \sin 2t),$ <br> $0 \le t \le 2\pi$ | 13. | $\rho = 2\,(1 - \cos\varphi),$ <br> $-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$ |
| 4. | $x = 4(\cos t + t\sin t),$ <br> $y = 4(\sin t - t\cos t),$ <br> $0 \le t \le 2$ | 14. | $\rho = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}\pi$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5. | $x = e^t(\cos t + \sin t)$,<br>$y = e^t(\cos t - \sin t)$,<br>$0 \le t \le \pi$ | 15. | $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$ |
| 6. | $x = 3(t - \sin t)$,<br>$y = 3(1 - \cos t), \quad \pi \le t \le 2\pi$ | 16. | $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}; \quad 1 \le x \le 2$ |
| 7. | $x = 10\cos^3 t$,<br>$y = 10\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ | 17. | $y = e^x + 6$,<br>$\ln 8 \le x \le \ln 15$ |
| 8. | $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$,<br>$0 \le t \le \pi$ | 18. | $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$,<br>$0 \le x \le \dfrac{7}{9}$ |
| 9. | $\rho = 8\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ | 19. | $y = -\ln\cos x; \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$ |
| 10. | $\rho = 2\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$ | 20. | $y = e^x + 13$,<br>$\ln\sqrt{15} \le x \le \sqrt{24}$ |

6. Вычислить объем тела, образованного вращением заданных кривых вокруг заданной оси

| Вариант | | Вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$,<br>кривая вращается вокруг полярной оси. | 11. | $y^2 = 4 - x, \quad x = 0, \quad V_y = ?$ |
| 2. | $x = 6(t - \sin t)$,<br>$y = 6(1 - \cos t), \quad V_x = ?$ | 12. | $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$,<br>$x = 0, \quad y = 0, \quad V_x = ?$ |
| 3. | $x = 3\cos^2 t, \quad y = 4\sin^2 t$,<br>$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}, \quad V_y = ?$ | 13. | $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1; \quad V_y = ?$ |
| 4. | $x = 2\cos t$,<br>$y = 5\sin t, \quad V_y = ?$ | 14. | $y^3 = x^2, \quad y = 1, \quad V_x = ?$ |
| 5. | $x = 7\cos^3 t, \quad y = 7\sin^3 t$,<br>$V_y = ?$ | 15. | $y^2 = x, \quad x^2 = y, \quad V_x = ?$ |
| 6. | $x = \sqrt{3}\cos t; \quad y = 2\sin t$,<br>$V_y = ?$ | 16. | $y^2 = (x - 1)^3, \quad x = 2, \quad V_x = ?$ |
| 7. | $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$,<br>$V_x = ?$ | 17. | $y = x^2, \quad 8x = y^2, \quad V_y = ?$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8. | $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$, $V_y = ?$ | 18. | $x^3 = (y - 1)^2$, $x = 0$, $y = 0$, $V_x = ?$ |
| 9. | $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; $y = x^2$, $V_y = ?$ | 19. | $y = -x^2 + 8$, $y = x^2$, $V_x = ?$ |
| 10. | $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$, $V_y = ?$ | 20. | $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$, $V_x = ?$ |

7. Найти координаты центра тяжести однородной плоской кривой L

| Вариант | | Вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | L: полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, расположенная над осью Ox | 11. | L: дуга эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, расположенная над осью Ox |
| 2. | L: одна арка циклоиды $x = 3\,(t - \sin t)$; $y = 3\,(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$ | 12. | L: дуга эллипса $9x^2 + 4y^2 = 36$, расположенная в 1-ом квадранте |
| 3. | L: полуокружность $y = \sqrt{4 - x^2}$ | 13. | L: дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ |
| 4. | L: дуга астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, расположенная над осью O$x$ | 14. | L: одна арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ |
| 5. | L: дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi$ | 15. | L: полуокружность $x^2 + y^2 = 25$, лежащая ниже оси O$x$ |
| 6. | L: дуга эллипса $x^2 + 4y^2 = 36$, расположенная над осью Ox | 16. | L: дуга цепной линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ от точки (0;1) до точки $(\ln 3\,;\frac{5}{3})$ |
| 7. | L: одна арка циклоиды $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$ | 17. | L: четверть окружности $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в 1-ом квадранте |
| 8. | L: четверть окружности $x^2 + y^2 = 36$, расположенная в 3-ем квадранте | 18. | L: четверть окружности $x^2 + y^2 = 16$, расположенная во 2-ом квадранте |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9. | L: дуга астроиды $x = 3\cos^3 t,\ \ y = 3\sin^3 t,$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ | 19. | L: дуга эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1,$ расположенная во 2-ом квадранте |
| 10. | L: дуга астроиды $x = 3\cos^3 t,\ y = 3\sin^3 t,$ $\pi \le t \le 2\pi$ | 20. | L:четверть окружности $x^2 + y^2 = 49$, расположенная в 4-ом квадранте |

8. Найти несобственный интеграл или доказать его расходимость

| Вариант | | Вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ | 11. | $\int_0^e x \ln x dx$ |
| 2. | $\int_0^1 \ln x dx$ | 12. | $\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$ |
| 3. | $\int_4^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$ | 13. | $\int_{-5}^{12} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}$ |
| 4. | $\int_1^\infty \frac{16x}{16x^4 - 1} dx$ | 14. | $\int_0^\infty x \sin x dx$ |
| 5. | $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^3 + \frac{1}{x}}{x^2} dx$ | 15. | $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$ |
| 6. | $\int_2^6 \frac{dx}{(4-x)^2}$ | 16. | $\int_0^\infty \frac{3 - x^2}{x^2 + 4} dx$ |
| 7. | $\int_{-\infty}^0 e^x \sin x dx$ | 17. | $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ |
| 8. | $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x}$ | 18. | $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ |
| 9. | $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$ | 19. | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$ |
| 10. | $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^3}}$ | 20. | $\int_0^1 \frac{x dx}{1 - x^4}$ |

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## Учебники и учебная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т.. Основы математического анализа. Ч.1.–. М. Наука. 1982.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов ВЛ. К. Математический анализ. Т.1.– М. Наука. 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1.– М. Наука. 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1.– Физматгиз. 1960.
6. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
7. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.

## Сборники задач и упражнений

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука, 1985.

9. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. – М. Наука, 1990.

10. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. / Данко П.Е., Попо А.Г., Кожевникова Т.Я. .– М. Высшая школа. 1986.–Ч. 1.

11. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский Б.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.Просвещение, 1990.

12. Индивидуальные задания по высшей математике / Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е.: под редакцией Рябушко А.П. – Мн. Вышэйшая школа, 2008.– Ч. 1.

Учебное издание

**СУРИН** Татьяна Леонидовна

**ИВАНОВА** Жанна Викторовна

**ШЕРЕГОВ** Сергей Викторович

# СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать .2014. Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 1,03. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.