

И-49

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Т.Г.ШЕВЧЕНКО

Специализированный совет К 068.18.11

На правах рукописи

ИЛЬЯСОВ КУЛАХМЕТ

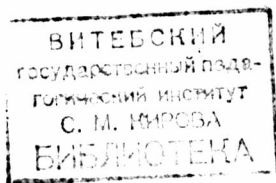
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ
ПЕРЕМЕННЫХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения
и математическая физика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1981



372
И 49

23 161 649031

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Работа выполнена на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений механико-математического факультета Киевского ордена Ленина государственного университета имени Т.Г.Шевченко

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук,
доцент

Д.И.МАРТЫНИК

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор

Н.В.АЗБЕЛЕВ

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник

Н.И.РОНТО

Ведущая организация - ордена Трудового Красного знамени
Институт математики АН УССР, г.Киев

Защита диссертации состоится "18" января 1982 г. в
14 час. в ауд. 44 на заседании специализированного совета
К 068.18.11 в Киевском ордена Ленина государственном универси-
тете им. Т.Г.Шевченко по адресу : 252127, Киев-127, просп.40-
летия Октября, 130, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Киевского ордена Ленина государственного университета им.Т.Г.
Шевченко.

Автореферат разослан "8" января 1981 г.

Ученый секретарь
специализированного совета

СЛОБОДЕННИК
Николай Потапович



* 20504155 *

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важные задачи небесной механики, физики и техники приводят к исследованию колебаний и исследованию устойчивости решений систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Методы исследования колебаний и устойчивости решений таких систем разработаны достаточно полно и нашли отражение во многих монографиях.

В последние годы, в связи с развитием некоторых областей науки и техники, в первую очередь систем автоматического регулирования, встречаются системы, которые описываются дифференциальными уравнениями с последствием и разностными уравнениями. Важными вопросами в теории таких уравнений являются вопросы периодичности и устойчивости решений.

В середине 60-х годов А.М.Самойленко разработал численно-аналитический метод исследования периодических решений неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод затем обобщался другими авторами на различные классы дифференциальных уравнений с запаздыванием и разностные уравнения.

Как известно, нелинейные автономные системы с запаздыванием существенно отличаются от неавтономных. Одной из особенностей является тот факт, что для неавтономных систем любое периодическое решение имеет вполне определенный, наперед заданный период, равный или кратный периоду правых частей системы. Автономные системы, поскольку они не содержат явно времени, имеют периодические решения с периодом, который заранее неизвестен.

В связи с этим представляется актуальным обоснование применимости численно-аналитического метода к нелинейным автономным системам с запаздыванием. Кроме того, представляется актуальной задача исследования периодических решений некоторых важных классов систем разностных уравнений.

Задача об устойчивости движения по отношению к части переменных, впервые поставленная А.М.Ляпуновым, к настоящему времени достаточно полно решена усилиями В.В.Румянцева, А.С.Озирянера, К.Пейффера, Н.Руша, К.Кордуняну и их последователей. В последние годы появились отдельные работы Г.С.Кдаева и др., посвященные перенесению, полученных при решении упомянутой задачи, результатов на системы дифференциальных уравнений с последствием.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Однако задача об устойчивости по части переменных решений систем с последействием и разностных уравнений в общей постановке до сих пор не рассматривалась. В силу сказанного, распространение идеи и теорем второго метода Ляпунова на системы дифференциальных уравнений с последействием и разностных уравнений для исследования устойчивости по части переменных решений названных уравнений является актуальным.

Объект исследования. Объектом исследования являются периодические автономные системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, линейные и нелинейные дифференциальные уравнения с последействием, а также линейные и нелинейные разностные уравнения.

Цель работы. 1. Изучение периодических решений автономных систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и некоторых классов систем разностных уравнений при помощи численно-аналитического метода А.М.Самойленко и тем самым расширение области применимости этого метода. Построение эффективных алгоритмов отыскания периодических решений и установление признаков существования таких решений.

2. Исследование общей задачи об устойчивости по части переменных решений систем дифференциальных уравнений с последействием и разностных уравнений на основе второго метода Ляпунова.

Общие методы исследования. В работе при решении задачи о периодических решениях систем с запаздыванием и разностных уравнений используются численно-аналитический метод А.М.Самойленко, а также различные методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Для решения задачи об устойчивости по части переменных систем с последействием и разностных уравнений главным образом применяются идеи второго метода Ляпунова. В доказательствах некоторых признаков устойчивости по части переменных используются также построения и конструкции, предложенные Н.Н.Красовским, А.С.Озианером, А.Халанаяем, Д.Векслером, К.Кордуяну.

Научная новизна. Все поставленные в диссертации вопросы решены впервые. 1. Численно-аналитический метод А.М.Самойленко впервые применяется для исследования периодических решений автономных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Получены новые теоремы существования периодических решений. 2. Построены эффективные алгоритмы отыскания периодиче-

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

ских решений и доказаны теоремы существования таких решений некоторых классов систем разностных уравнений при помощи названного метода А.М.Самойленко. 3. Вводится понятие знакоопределенного и допускающего бесконечно малый вышший предел по части переменных функционала и на основе этого понятия доказываются теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных систем дифференциальных уравнений с последствием. Показано, что теорема об асимптотической устойчивости по части переменных обратима в случае устойчивости, равномерной относительно начальных данных. Установлен критерий устойчивости по части переменных систем с последствием по первому приближению. 4. С помощью понятия знакоопределенной и убывающей по части переменных последовательности скалярных функций Ляпунова идеи и теоремы второго метода Ляпунова распространены на системы разностных уравнений для установления признаков устойчивости и неустойчивости по части переменных этих уравнений. Приведены условия существования скалярных функций Ляпунова, а также критерий устойчивости по части переменных систем разностных уравнений по первому приближению. Установлены необходимые и достаточные условия ограниченности по части переменных решений систем разностных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы: расширяют области применимости численно-аналитического метода А.М.Самойленко; дают возможность исследовать колебательные процессы, описываемые системами нелинейных автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и некоторых классов разностных уравнений; могут быть применены для решения различных задач теории устойчивости дифференциальных уравнений с последствием и разностных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались: на республиканском семинаре по дифференциальным уравнениям при Киевском государственном университете им. Т.Г.Шевченко, руководимом членом-корр. АН УССР, проф. А.М.Самойленко (1978-1980 г.г.); на научно-методических семинарах кафедр математического анализа и вычислительной математики и ежегодной конференции преподавателей Нукусского государственного университета им. Т.Г.Шевченко (1979-1981 г.г.); на I республиканской конференции молодых ученых и специалистов (г.Нукус, 1981 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 научных работ [1-6].

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Объем и структура работы. Объем диссертации составляет 105 страниц машинописного текста. Работа состоит из введения, четырех глав и списка цитированной литературы, содержащего 70 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы, формулируется цель исследования, приводится краткий обзор работ по данной тематике, дается общая характеристика результатов и краткое описание содержания диссертации.

Первая глава диссертации посвящена распространению численно-аналитического метода А.М.Самойленко на нелинейные автономные системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

В § 1.1 изложена схема метода отыскания периодических решений автономных систем с запаздыванием вида

$$\frac{dw(\xi)}{d\xi} = X(w(\xi), w(\xi - \tau)), \quad w = \text{col}(u, v), \quad (1)$$

где w — n -мерный вектор, X — n -мерная вектор-функция, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. Пусть A — постоянная $(n \times n)$ -мерная действительная матрица, все собственные значения которой являются чисто мнимыми и целыми кратными числу i ($i^2 = -1$). Тогда при помощи преобразования переменных

$$u = \exp(A\theta)y(\theta), \quad v = z(\theta), \quad \theta = \omega\xi + \phi \quad (2)$$

данная система (1) может быть приведена к неавтономной системе с запаздыванием с периодической по t периода 2π правой частью и зависящей от неизвестного параметра ω вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\omega} f(t, x(t), x(t - \omega\tau)), \quad x = \text{col}(y, z). \quad (3)$$

Предположим, что вектор-функция $f(t, x, p)$ в области D изменения переменных X удовлетворяет неравенствам

$$|f(t, x, p)| \leq M, \quad (4)$$

$$|f(t, x', p') - f(t, x'', p'')| \leq K_1 |x' - x''| + K_2 |p' - p''|,$$

где M — вектор с положительными компонентами, K_1 и K_2 — матрицы с положительными компонентами, p , кроме того, выполняются условия: 1) множество D_ω не пусто; 2) собственные числа матрицы

$$Q = (K_1 + K_2) \left[\frac{2\pi}{3\omega^2} + \frac{3\omega^2}{4\pi} \tau^2 \left(1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{2\pi} \right)^2 \right]$$

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

лежат в круге единичного радиуса. Здесь D_ω — множество точек области D , принадлежащих области D вместе со своей $\frac{1}{\omega}$ M — окрестностью.

При этих предположениях к системе (3) применим численно-аналитический метод А.М.Самойленко, согласно которому последовательность периодических периода 2π функций

$$x_{m+1}(t, x_0, \omega) = x_0 + \frac{1}{\omega} \int_0^t \{f(s, x_m(s, x_0, \omega), x_m(s - \omega\tau, x_0, \omega)) - \omega \Delta_{m+1}(x_0, \omega)\} ds, \quad (5)$$

$$\Delta_{m+1}(x_0, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(t, x_m(t, x_0, \omega), x_m(t - \omega\tau, x_0, \omega)) dt,$$

равномерно сходится к предельной функции, удовлетворяющей системе интегральных уравнений

$$x(t, x_0, \omega) = x_0 + \frac{1}{\omega} \int_0^t \{f(s, x(s, x_0, \omega), x(s - \omega\tau, x_0, \omega)) - \omega \Delta(x_0, \omega)\} ds,$$

$$\Delta(x_0, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(t, x(t, x_0, \omega), x(t - \omega\tau, x_0, \omega)) dt.$$

Показано, что вектор-функция $\Delta(x_0, \omega)$, в отличие от вектор-функции $\Delta(x_0)$ для неавтономных систем, зависит от начального значения x_0 и параметра ω и является непрерывной по x_0, ω .

§ 1.2 посвящен вопросу существования периодических решений автономных систем с запаздыванием. Пусть система (3) удовлетворяет неравенствам (4) и условиям 1), 2). Тогда справедлива

Т е о р е м а 1. 1. Пусть система (3), удовлетворяющая неравенствам (4) и условиям 1), 2), такова, что

а) для некоторого целого m отображение

$$\Delta_m(x_0, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(t, x_{m-1}(t, x_0, \omega), x_{m-1}(t - \omega\tau, x_0, \omega)) dt$$

имеет изолированную особую точку $(\bar{x}_0^*, \bar{\omega}) : \Delta_m(\bar{x}_0^*, \bar{\omega}) = 0$ с ненулевым индексом;

б) существует замкнутая выпуклая область $D_\omega^1 \subset D_\omega^{n-1} \times J_\omega$, имеющая $(\bar{x}_0^*, \bar{\omega})$ единственной особой точкой, такая, что на ее границе $\Gamma_{D_\omega^1}$ имеет место неравенство

$$\inf_{(\bar{x}_0^*, \bar{\omega}) \in \Gamma_{D_\omega^1}} \sum_{i=1}^n |\Delta_{mi}(x_0^*, \omega)| \geq \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2\pi}{3\omega} (K_1 + K_2) M Q^m (E - Q)^{-1} \right\}_i, m \geq 1.$$

Тогда система (3) имеет периодическое решение, для которого $x_0 \in D_\omega^1$.

Следующее утверждение позволяет выделить такое подмножество $\mathcal{W} = D_\omega^1 \cap \{x_n = x_{n_0}\} \subset D_\omega \times J_\omega$, которому могут принадлежать

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

неравенствам

$$\|y_n\| \leq V_n(x_n) \leq M(\|y_n\| + \|z_n\|), \quad M > 0,$$

$$|V_n(x'_n) - V_n(x''_n)| \leq M(\|y'_n - y''_n\| + \|z'_n - z''_n\|),$$

$$\omega_n(x_n) \leq -(1-q)V_n(x_n), \quad 0 < q < 1,$$

где $\omega_n(x_n)$ -полная разность функции $V_n(x_n)$, взятая в силу системы (16).

Пусть вектор-функции g_n, h_n непрерывны по y_n, z_n и удовлетворяют неравенству

$$\|g_n(y_n, z_n)\| + \|h_n(y_n, z_n)\| \leq \alpha \|y_n\|, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Тогда имеет место

Т е о р е м а 4. 10. Если решение $x_n=0$ линейной системы первого приближения (17) экспоненциально-асимптотически y -устойчиво и если постоянная α достаточно мала, то решение $x_n=0$ возмущенной системы (18) также экспоненциально-асимптотически y -устойчиво.

§ 4.5 посвящен исследованию y -ограниченности решений системы разностных уравнений (16) при помощи метода скалярных функций Ляпунова. Установлен критерий y -ограниченности решений.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ильясов К. О периодических решениях линейных систем разностных уравнений. Мат. физика, 1979, вып. 26, с. 30-34.
2. Ильясов К. Периодическое решение нелинейных дискретных разностных систем, не разрешенных относительно разности. Вестник Каракалп. филиала АН УзССР, 1979, № 2, с. 3-7.
3. Іллясов К. Періодичні розв'язки нелінійних різницевих рівнянь другого порядку, не розв'язаних відносно старої різниці. Вісник Київського ун-ту, сер. матем. та механ., 1979, вып. 21, с. 48-52.
4. Ильясов К. Устойчивость по части переменных решений некоторых классов систем с последствием. В кн.: Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. - Киев, Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 52-59.
5. Ильясов К. Устойчивость по части переменных систем разностных уравнений. В кн.: Материалы I республиканской конференции молодых ученых и специалистов. - Нукус, 1981
6. Ильясов К., Данканич В.А. Периодические решения автономных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. I, II. Вестник Каракалп. филиала АН УзССР, 1981, № 3, 4.

Ильясов К.